

debajo del lecho de la fábrica y antes de aplicar el revestimiento al tejido.

Un sustituto de este material se ha encontrado en el fieltro perforado y saturado de la misma manera. Esto es, sencillamente, reconocer la eficacia del material saturado con mallas abiertas, que está libre de los inconvenientes que presenta el fieltro perforado, como son: distintos lechos en forma de alternadas capas, poca resistencia á la rotura por tensión, falta de adherencia á los materiales y tendencia al deslizamiento, sobre todo en la posición vertical; en lugar de todos estos inconvenientes, el tejido saturado posee la ventaja de actuar como refuerzo y soporte de la membrana, siendo más elástico y apto para extenderse sobre una gran área.

RAMÓN MARÍA SERRET.

Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales.

DISCURSO DEL NUEVO ACADÉMICO

DON AUGUSTO KRAHE

Modesto Profesor de Matemática, consagrábame al cuidado de iniciar inteligencias juveniles en estas disciplinas del humano saber, cuando, abrumado por vuestras bondades, me encuentro exaltado por vosotros al puesto que dejó vacante la muerte del insustituible y llorado D. Eduardo Saavedra. Aun temiendo fundadamente que el compromiso contraído sea muy superior á mis fuerzas, he aceptado el inmerecido cargo honrado y complacido, y aquí me tenéis dispuesto á compartir vuestras tareas.

Mi nombramiento no tiene ni puede tener otra explicación que el haber llegado á vuestros oídos mi fervoroso y casi innato entusiasmo hacia las ciencias exactas, y vuestra designación, que no he de ocultaros que con toda el alma agradezco, me pone en trance parecido al del noble godo, al del histórico personaje, que, alejado del mundanal ruido, vióse sorprendido por su exaltación al trono. Mi eterna gratitud, Sres. Académicos, y desde ahora insignes compañeros; por vuestra donación generosa.

Convendréis conmigo, y quedaréis por ello obligados á ser muy indulgentes, en que para mantener el honor del puesto con el brillo y esplendor con que lo mantuvieron Echegaray y Saavedra—entre otros muy ilustres varones que honraron la medalla núm. 6—, tendría que desplegar esfuerzos muy superiores á los de mis modestos músculos mentales. Admitiréis igualmente no ser éste ya solamente puesto de honor, sino sitio de verdadero peligro, por la tensión y desasosiego espirituales á que ha de estar sometido el que intente, no ya igualar, sino ni aun siquiera tratar de seguir ó de imitar á tan perfectos modelos. Echegaray y Saavedra alcanzaron fama mundial.

Tanto el uno como el otro, por sus aptitudes variadísimas y excepcionales para las más opuestas disciplinas, y por las obras maestras producidas por sus excelsas mentalidades, conquistaron, desde su juventud, el derecho á ver inscritos sus preclaros nombres, con áureos é indelebles caracteres, en las páginas de la Historia.

Perdido Saavedra para la Ciencia y la Literatura patrias, restantes el ilustre Presidente de esta Real Academia, este asombroso veterano, admiración de propios y extraños por su vigor y agilidad intelectuales, más bien acrecidos que amenguados por la edad, y cuyos recientes trabajos compiten con ventaja, en fres-

cura, belleza y lozanía, con los que su genio produjera en aquella juventud de que nos habla en sus exquisitos *Recuerdos*.

No tuve la honra de conocer personalmente á Saavedra, mas asóciáanse en mi memoria las noticias primeras de su inmenso saber con mis evocaciones infantiles.

Para los que frecuentábamos, en una de las últimas décadas del siglo anterior, las aulas de la Escuela de Caminos, por las cuales desfilaron, primero como alumnos y después como Maestros meritísimos, Saavedra y Echegaray, estos ilustres Ingenieros seguían formando parte de aquella casa. Aunque no les hubiéramos alcanzado como Profesores, sentíamos aún en el ambiente el luminoso rastro de sus enseñanzas.

Nuestros maestros habían sido discípulos de ambos, y en la orientación de los programas notábase la influencia de aquellos insignes varones. Los triunfos científicos y literarios de los dos egregios Ingenieros eran considerados como victorias propias; nuestro incipiente espíritu de Cuerpo, que en la juventud—á veces también en otras edades—adquiere marcados tintes de exclusivismo, no admitía peros ni distinguos tratándose de sus producciones. Cuando los trabajos estaban al alcance de nuestros conocimientos, los alabábamos por convicción; cuando así no era, por demasiado elevados en relación á nuestra escasa base científica, postulábamos, como dicen los matemáticos, y eran ensalzados á sentimiento, por hipótesis. Un drama ó un artículo de Física de nuestro Echegaray, un trabajo sobre resistencia de materiales ó un informe académico del ínclito Saavedra, eran admitidos como dogmas, sin dudas ni vacilaciones. Enteramente parecía que hubiéramos colaborado en aquéllos ó que sus autores no los publicaron sin haber obtenido antes nuestro beneplácito. En honor á la verdad, el sabio profesorado de aquel ilustre Centro docente nos daba el ejemplo, procurando injertar con toda ocasión y con todo motivo, en los primeros brotes de nuestra cultura técnica, la admiración hacia las enseñanzas del afamado Ingeniero. Aun recordarán con gusto, como yo lo recuerdo, los que en aquella época fueron mis entrañables compañeros, el deleite que nos producía la sustitución de la conferencia marcada para el día por la lectura y comentario y algún trozo entresacado de las Memorias ó monografías del insigne maestro.

Ha sido estudiado Saavedra por meritísimos escritores como Ingeniero, como Arquitecto, como historiador, como arqueólogo, como arabista, como filólogo, como matemático y como literato, mereciendo singular mención la admirable y sentidísima biografía que en la *Revista de la Sociedad Matemática Española* le dedicó nuestro egregio Presidente. Repetir como un eco, como una resonancia, lo que todos sabéis y lo que no se habrá seguramente borrado de vuestra memoria, me parecería casi una redundancia, y, en cambio, pretender hacer un análisis serio y de primera mano de la obra de Saavedra, sería en mí una verdadera temeridad, un loco atrevimiento, casi una profanación. Confieso que carezco de la preparación necesaria para esa labor de honda é intensa cultura, y estas cosas no son de las que se improvisan. Para estudiar á Saavedra se necesitaría casi ser otro Saavedra. El juego sinovial de sus escritos, la variadísima erudición de sus obras, la multiplicidad de sus creaciones, la diversidad de sus actividades mentales, todo ello requiere una base de ilustración y una altura de pensamiento fuera del alcance de mi especialización matemática. Yo leo, v. gr., el estudio de Saavedra acerca de nuestras calzadas romanas, y me parece que me hallo frente á un Ingeniero de los Escipiones; mas he de limitarme á eso, á admirarlo, y sería pretensión pueril atreverme á más; leo sus concienzudas investigaciones acerca de la arquitectura árabe, y me parece que me hallo ante un alarife del Cá-

lirato, sin que por cuenta propia me atreviera á decir otra cosa que lo que en diversas formas se ha repetido y que todos sabéis. Creo, en suma, que la mejor forma de honrar la memoria de nuestro gran Saavedra, de aquel espíritu tan sincero, tan enemigo de las falsas apariencias, tan apegado á la verdad, es beber en mi vaso, cultivar mi jardín. Me parece como que oigo la voz patriarcal de nuestro D. Eduardo, que me dice al oído: «Zapatero, á tus zapatos», y obedeciendo la orden, á mis zapatos, es decir, á mis matemáticas me voy.

*
*
*

•El cálculo de los vectores tiene un sentido geométrico claro y preciso, y las operaciones analíticas con los símbolos marchan paralelamente con estas construcciones geométricas, que son tan firmes y tan claras, y que, por decirlo así, son aún más plásticas que las mismas operaciones numéricas.—*Resolución de ecuaciones y teoría de Galois*. Lecciones explicadas en el Ateneo de Madrid por José Echegaray, pág. 36.

Mis primeros pasos en la Matemática fueron dirigidos por maestros tan competentes como Catalá, Portuondo y Garcini, de cuyo valer científico tenéis brillantes pruebas en publicaciones de esta docta Corporación. Sean mis primeras palabras, al abordar mi tema, para rendirles público homenaje de respeto y de cariño.

Iniciado en estos estudios por los ilustres Profesores que acabo de citar, y á los cuales me atreveré á calificar de *oportunistas* en Matemática, en contraposición con los dogmáticos é intransigentes, apasionados del puro Análisis ó de la Geometría purísima, nunca entendí bien, y cada día lo comprendo menos, el deslinde de campos, analítico y geométrico, que muchos, á mi entender equivocadamente, tratan de establecer. Acaso sea yo el equivocado; mas creo firmemente que las intransigencias, ya sean analíticas, ya geométricas, antes perjudican que favorecen los adelantos matemáticos.

No está mal que dediquemos algunas horas de estudio á los verdaderos y hermosísimos monumentos científicos, edificadas con pie forzado por geniales matemáticos; pero cuidado con entregarnos de por vida á la contemplación, repetición y comentario de lo que dijera el maestro. Tales apasionamientos, vuelvo á repetir, antójanseme nocivos, por constituir una rémora para el desenvolvimiento de la personalidad en los trabajos de investigación.

Pudo creerse en tiempos de Galois, y así hubo éste de afirmarlo, que una parte del problema de la resolución algebraica de las ecuaciones constituía en cierto modo como un coto aislado, sin conexiones de ningún linaje con el resto de los estudios matemáticos. Trabajos más recientes sobre el particular han quebrantado un tanto semejante afirmación. Seguramente darán buena cuenta de ella las investigaciones de matemáticos vivientes ó venideros. No es necesario el don de profecía para formular tales pronósticos. La Historia de la Matemática, tan descuidada por cierto en nuestra Patria, á pesar de los esfuerzos y clamores con que el heroico García de Galdeano trata de llamar la atención de los rectores de nuestra enseñanza hacia estos importantísimos estudios, esa Historia, repito, tan abandonada, nos demuestra á cada paso que las cuestiones matemáticas, al parecer más inconexas, poseen afinidades que, una vez puestas de manifiesto, constituyen los más firmes puntos de apoyo para el rápido avance de la ciencia.

No extrañaréis, tras de esta profesión de fe, que como veis tiene sus raíces en los ya lejanos tiempos de mi iniciación en los

hermosos estudios de la Matemática, que en el trabajo que os ofrezco—modesto tributo á vuestro saber—espigue mis recursos, á medida de la necesidad, en los campos de la Geometría y del Análisis. Aun así, temo que mi labor no tenga el jugo bastante para justificar la elección con que me honrásteis.

Antes de desarrollar el método que he seguido en la resolución de las ecuaciones de cuarto grado he de decir algo acerca de otras de menor grado, que aclarará el trabajo de investigación.

No me detendré en la determinación del cociente de dos complejas, ó de dos vectores, interpretación geométrica de la resolución de las de primer grado, por ser sobrado conocida de todos aquellos que se han asomado al estudio de la teoría de los vectores.

Pongamos nuestra atención breves momentos en la de segundo grado. En una ecuación de éstas, cuya forma sea binomia, son conocidas sus soluciones inmediatamente. Sus raíces se representan geométricamente en el plano de Cauchy por dos afijos simétricos respecto al origen. Reduciremos á éste el caso general. Consideremos la ecuación general de segundo grado con una incógnita. Los afijos de sus raíces determinarán los extremos de un segmento rectilíneo, cuyo punto medio tiene por coordenada las semisumas de las del mismo nombre de sus extremos. La imaginaria correspondiente á este punto medio será la semisuma de las raíces de la ecuación de segundo grado, cantidad que ya sabemos cómo está formada en función de los coeficientes.

Una traslación, definida por el vector correspondiente á dicha semisuma, llevará á coincidir aquel punto medio con el origen, y tendremos de esta suerte á la ecuación convertida en una binomia. Obsérvese que la marcha señalada geométricamente es la que se sigue en los elementos al resolver la ecuación de segundo grado. La traslación equivale á la sustitución que hace desaparecer el término de primer grado ó, lo que es lo mismo, al aumento, en los dos miembros, del término necesario para convertir á uno de ellos en el cuadrado de una función de primer grado de la incógnita y al otro en una cantidad conocida.

Pasemos á la ecuación de tercer grado. Si ésta fuera una binomia, tendría sus raíces representadas por los vértices de un triángulo equilátero, cuyo centro coincidiría con el origen. Intentemos reducir á este caso la resolución de la ecuación completa. Imaginándonos el triángulo cualquiera, cuyos vértices sean los afijos de sus raíces, sabemos que existen dos puntos del plano, los cuales, tomados como polos de una inversión por radios vectores recíprocos, transforman el triángulo en equilátero. Estos puntos, llamados por Neuberg *centros isodinámicos* del triángulo, están determinados por las raíces de una ecuación de segundo grado, resolvente de la de tercero, cuya ecuación es la que se conoce en las teorías de las formas con el nombre de *co-variante canónico* ó *canonizante*, de la forma binaria cúbica que corresponde al primer miembro de la ecuación dada. Como quiera que las sustituciones lineales efectuadas con las variables imaginarias equivalen á las operaciones geométricas de traslación, rotación, homotecia é inversión, tendremos trazado el camino que conduce á reducir á binomia la ecuación de tercer grado. Llevaremos, mediante una traslación, á coincidir uno de los centros isodinámicos con el origen. Transformaremos por una inversión el triángulo en equilátero. Por último, haciendo coincidir, por una nueva traslación, el origen con el centro de este último triángulo, tendremos resuelto el problema. Este fué el procedimiento que seguí y desarrollé en otro lugar al resolver las ecuaciones de este orden (1).

(1) *Mathesis*, 1905, páginas 61-66.

Existe un grupo de ecuaciones, á las cuales llamé armónicas por ser los afijos de sus raíces los vértices de un polígono armónico; cuya resolución puede hacerse de un modo análogo al indicado para las de tercer grado. Los polígonos armónicos tienen, como los triángulos, dos centros isodinámicos que permiten la transformación del polígono en otro regular por medio de una inversión.

Estas ecuaciones se resolverán valiéndose de una ecuación de segundo grado y una binomia del mismo grado que el de la ecuación dada. En particular, son armónicas las de cuarto grado, cuyo invariante de tercer orden es nulo (1).

El procedimiento que desarrollo más adelante para la resolución de las ecuaciones de cuarto grado no tiene en su parte analítica nada común con los conocidos de Ferrari Descartes, Euler y Lagrange; tampoco es análogo al que se deduce del estudio de las ecuaciones poliédricas del ilustre Klein. Es algo muy elemental, y cuya exposición no necesita del auxilio de elevadas teorías, aunque en su parte final, como ya veréis, se puede enlazar con los de Cayley y Sylvester. Estos insignes geómetras ingleses hicieron verdaderos derroches de sagacidad eliminatoria al tratar algunos de los casos de reducción de las formas binarias á sus canónicas; problema que, aplicado á las de cuarto grado, viene á ser en el fondo el de la reducción de la ecuación á bicuadrada. Respecto á la parte geométrica del tema por mí desarrollado y á la manera de reducir la ecuación á recíproca, las creo de alguna novedad; por lo menos, no conozco ningún trabajo análogo que haya sido hecho para las de cuarto grado.

El malogrado matemático italiano Cesaro dió en la traducción y arreglo al alemán de su notable obra de Análisis una interpretación geométrica de las raíces de la resolvente de sexto grado (Jacobiana de la binaria bicuadrática). El eminente Profesor mencionado desarrolló el asunto de la reducción de la binaria de cuarto grado á su canónica, como suelen hacerlo los continuadores de la obra de Cayley y Sylvester, y se fundó en la definición de razón armónica de cuatro números imaginarios para llegar á la consecuencia de ser las raíces del jacobiano los puntos dobles de las tres involuciones que determinan las cuatro raíces. En la parte final del estudio cinemático que tengo la honra de someter á vuestra benevolencia llevo de un modo natural y breve á estos puntos dobles. Los centros de las tres involuciones, puntos de los cuales no se ocupó Cesaro, son los que empleo en la simplificación del problema.

Todo lo que hasta aquí he dicho respecto á las ecuaciones de los tres primeros grados, y la investigación referente á la de cuarto, se basa en aquellos movimientos geométricos que corresponden á las sustituciones lineales con variables imaginarias. Mas nótese que pueden concebirse multitud de transformaciones geométricas, las cuales, una vez traducidas al lenguaje algebraico, permitirán abordar los problemas de este género por muy diversas sendas.

Si, juzgándolo con suma indulgencia, mereciera vuestra aprobación el estudio cinemático que presento, creeré haber contribuido en la medida de mis fuerzas á enaltecer en día tan solemne para mí la memoria del insigne Saavedra.

(Continuará.)

Los climas en la época histórica.

Que el clima de la tierra ha variado, es cosa sobre la cual no parece que pueda caber la menor duda. Obliga á creerlo, de modo casi irresistible, la consideración de las formas distintas de vida que se han sucedido durante las edades geológicas, y cuya existencia nos revelan los fósiles aprisionados en los estratos del terreno.

El estado presente no se ha de mantener tampoco por tiempo indefinido: la ciencia moderna deja entrever la necesidad de cambios profundos que, por remotos que se los suponga en las lejanías del porvenir, tampoco parecen menos ciertos. El cambio es, pues, la regla, y es natural preguntarse hasta qué punto esos cambios se han operado en la serie de siglos que abarca la historia humana.

Para dar á esta pregunta razonada respuesta, lo primero será conocer cuáles son los factores de que el clima depende.

Ahora bien, la energía de casi todos los fenómenos meteorológicos que integran el clima procede de una fuente única: la radiación solar. Una parte de esta energía es absorbida por la atmósfera; el resto llega á la superficie de nuestro planeta y se emplea en calentarla; pero este calentamiento no es uniforme. De una parte, la desigual inclinación con que reciben los rayos solares las distintas regiones de la Tierra y la variable duración del día, introducen diferencias notables de temperatura; de otra, el contraste de tierras y mares origina también diferencias no menos importantes, procedentes, en su mayor parte, de las distintas capacidades caloríficas de los elementos líquido y sólido.

Unas y otras diferencias de temperatura se comunican al aire, y dada la movilidad extrema de líquidos y gases, originanse, en consecuencia, corrientes marinas y aéreas, principalmente condicionadas por la forma y distribución de los continentes. La humedad y la repartición de la lluvia dependen, á su vez, de la circulación de la atmósfera; de modo que temperatura, vientos, humedad y lluvia son, en definitiva, el resultado del calor solar y de la geografía terrestre. Mientras no varíen uno ni otra, tampoco parece que deben variar aquellos elementos esenciales del clima.

Ahora bien, los efectos de una variación en la radiación solar habrían de ser forzosamente generales; nunca el cambio podría localizarse en una región determinada. Bastará, pues, probar que en una sola el clima no ha cambiado, para que se siga la constancia sensible de aquella radiación. Esta comprobación es fácil en muchos casos; bastan cambios muy débiles en la temperatura media, para que determinadas especies vegetales dejen de vivir ó de producir fruto. Con diferencias inferiores á un grado centígrado, el fruto de la palmera, una vez producido, puede llegar ó no á maduración; pues bien, en Grecia, lo mismo hoy que en tiempo de Aristóteles y Teofrasto, la palmera fructifica, pero su fruto no madura. La vid se aclimata bastante bien á condiciones diversas de clima; pero la calidad del producto es muy varia de unas á otras regiones y, aun en la misma región, se notan diferencias de uno á otro año; y, sin embargo, desde los tiempos de Columela (siglo I) y de Gregorio de Tours (siglo VI), las mismas variedades, en las mismas laderas y hasta en los mismos sitios de esas laderas, son las que han producido los mejores vinos de la Borgoña. En seis siglos, á que alcanzan en algunas localidades de Francia datos precisos sobre la época de las vendimias, no ha podido notarse, á pesar de las naturales variaciones anuales, diferencia alguna en las fechas de carácter progresivo (1).

(1) Angot, *Traité élémentaire de Météorologie*, Paris, 1907, páginas 400 y 410.

(1) *Revista de la Real Academia de Ciencias*, tomo II, núm. 3.—Ecuaciones armónicas.

