

En las velocidades menores de 550 vueltas por minuto algunas muescas resultan inútiles, y en las velocidades mayores de 550 vueltas, la separación que se produce al pasar de la marcha en serie á la en paralelo, es considerable.

Al calcular el servicio que un automotor benzo-eléctrico puede prestar, existen dos puntos importantes que es preciso determinar: primeramente la velocidad que puede preverse en el horario y luego la fuerza que puede proporcionar de un modo continuo, sin recalentamiento excesivo de la dotación.

Entrettenimiento é inspección.

La dotación de los automotores tiene desde muchos puntos de vista bastante analogía con la de los coches de viajeros para el alumbrado de los trenes; necesita, por lo demás, aproximadamente, los mismos cuidados. Como consecuencia de las propiedades particulares del automotor benzo-eléctrico, que puede asegurar el servicio de las líneas de empalme de poco tráfico mediante un pequeño gasto, no es extraño encontrar automotores en servicio en aquellas secciones más improductivas y alejadas de las grandes líneas.

Los que tienen práctica en el manejo de motores de explosión saben que es preciso prever las reparaciones antes y no después que la avería pueda presentarse.

Este es un hecho bien sabido de los encargados de inspeccionar los automotores; á veces graves averías, cuya reparación ha exigido un día, tenían por causa la deterioración de una pequeña pieza de detalle, que previamente hubiese podido arreglarla cualquiera con un destornillador ó con una llave de tuerca. Esta clase de reparación preventiva es muy necesaria en los automotores benzo-eléctricos, por cuya razón es de grandísima importancia la instrucción de los conductores de estos coches. En lo que respecta á la clase de agentes más convenientes para la mejor conducción de los automotores, se ha elegido ordinariamente al maquinista que anteriormente prestaba servicio en la misma línea en las máquinas de vapor, habiéndose comprobado de un modo general que estos agentes son aptos para la conducción de los automotores, con la condición de que reciban una instrucción completa é inspirada dentro de un sentido amplio y práctico; en otros términos, se procurará preferentemente hacerles comprender los aparatos de la dotación, que no obligarles á responder á una porción de preguntas. Cuando las explicaciones resulten más fáciles gracias á las analogías tomadas á las máquinas de vapor, será ventajoso emplear este procedimiento, pero se tendrá cuidado de no llevarlo más lejos, asimilando, por ejemplo, la derivación de los inductores del motor al manejo de la corredera de una locomotora de vapor.

Es preciso que los conductores de automotores sean capaces de efectuar todo el arreglo de los coches, de inspeccionar el motor mecánico y demás piezas de la dotación al final del día, haciendo una relación de los trabajos de entretenimiento que deben efectuarse antes del día siguiente. Además, también es necesario que uno de los ajustadores del depósito ó del taller de reparaciones esté iniciado en la construcción del automotor; este obrero estará encargado de hacer todas las operaciones regulares corrientes; no tendrá necesidad de emplear más que las herramientas de mano ordinarias de un buen ajustador-mecánico. Si el conductor desempeña con celo la inspección y el ajuste de las piezas de la dotación, la misión del ajustador se limitará á colocar en su sitio una pieza desenchajada ó alguna otra pequeña reparación de la misma clase. Ahora bien, si el conductor no hace la inspección cuidadosamente, la tarea del ajustador se hace más difícil.

Para comprobar el trabajo del conductor y el del ajustador es necesario que en épocas regulares se inspeccione minuciosamente el automotor por otro agente, con preferencia por uno de los electricistas encargados de la inspección de los aparatos de alumbrado eléctrico.

Este agente conocerá muy pronto el automotor y generalmente se interesará en su servicio, enviado periódicamente á inspeccionar los automotores de su circunscripción, es decir, todos los órganos mecánicos y eléctricos, se transmitirá su informe al servicio central, donde servirá para poner al día un cuadro que indique el estado de cada automotor.

En la discusión de esta Memoria se hizo observar que los coches deberían trabajar en el límite de su potencia normal y que no se debía continuamente sacar partido de las sobrecargas posibles.

Debe ejercerse una gran vigilancia en el entretenimiento y las reparaciones hacerse en tiempo oportuno para evitar grandes gastos. Mr. J. E. Hilton, Inspector general de los automotores del Frisco, presenta datos estadísticos muy curiosos. En el primer semestre de 1913, los gastos de conducción y de conservación de siete coches benzo-eléctricos de su red fueron, por término medio, de 57,48 céntimos por kilómetro, comprendido en ello la reparación general de tres coches.

Algunos de estos vehículos prestan un servicio muy duro remolcando 27,22 toneladas métricas y los resultados han sido muy satisfactorios. El gasto medio menor de un coche fué de 46,91 céntimos por kilómetro durante seis meses haciendo un recorrido total de 49.115 kilómetros y remolcando 29,94 toneladas métricas.

H.

ANÁLISIS DE LAS CURVAS DE LAS CORRIENTES ALTERNAS

MÉTODO DE FOURIER—MÉTODO DE RUNGE SIMPLIFICACIÓN DE LOS CÁLCULOS (1)

POR

F. W. GROVER

VERSIÓN ESPAÑOLA

POR

B. O. R.

INGENIERO DE CAMINOS

- V. Varias aplicaciones: 1.^a Cálculo de los valores medio y eficaz de una magnitud periódica. 2.^a Cálculo de la potencia media de un circuito. 3.^a Deducción de las ecuaciones de las curvas de la potencia. 4.^a Descomposición de la curva de la potencia en dos componentes. 5.^a Deducción de las ecuaciones de las curvas de las componentes de la potencia.

V. Varias aplicaciones.

- 1.^a—CÁLCULO DE LOS VALORES MEDIO Y EFICAZ
DE UNA MAGNITUD PERIÓDICA.

Es costumbre definir el valor *medio* de una f. e. m. ó de una corriente alterna por la ordenada media de una semionda, positiva ó negativa, porque como las de signos contrarios son simétricas, el valor medio de las ordenadas correspondientes á un período es cero. Cuando las curvas que representan aquellas magnitudes son muy irregulares, como sucede, por ejemplo, con la de la corriente de un condensador (fig 5.^a), es muy difícil, por no decir imposible, la determinación del origen de una semi-

(1) Véase el número anterior.

onda. Cuando la curva oscila rápidamente entre valores positivos y negativos es impracticable fijar el principio de la curva en el punto en que pasa por cero. El valor medio de una f. e. m. ó de una corriente alterna es, por lo tanto, una cantidad que depende del origen escogido para las fases, el cual no se puede fijar con facilidad en forma tal que sea aceptable la definición dada para dicho valor medio. De aquí en adelante se entenderá por valor medio de una f. e. m. ó de una corriente alterna la ordenada media de una semionda cuando se toma por origen de fases el cero de la armónica fundamental, definición que no conduce al mismo valor que se obtiene cuando se toma por origen el punto en que la curva corta al eje, pero las diferencias son, por regla general, muy pequeñas, sobre todo cuando las curvas presentan pocas irregularidades.

Si la ecuación de la curva es:

$$e = E_1 \sin \frac{2\pi}{T} t + E_3 \sin \left[3 \left(\frac{2\pi}{T} \right) t - \beta_3 \right] + \dots + E_n \sin \left[n \left(\frac{2\pi}{T} \right) t - \beta_n \right] + \dots$$

el valor medio está definido por

$$\epsilon = \frac{2}{T} \left[E_1 \int_0^{\frac{T}{2}} \sin \frac{2\pi}{T} t dt + E_3 \int_0^{\frac{T}{2}} \sin \left(3 \frac{2\pi}{T} t - \beta_3 \right) dt + \dots + E_n \int_0^{\frac{T}{2}} \sin \left(n \frac{2\pi}{T} t - \beta_n \right) dt + \dots \right]$$

en cuya fórmula T es el periodo de la armónica fundamental.

Hay que calcular la integral general.

$$\int_0^{\frac{T}{2}} \sin \left(\frac{2\pi n}{T} t - \beta_n \right) dt$$

cuyo valor es

$$\frac{T}{\pi n} \cos \beta_n$$

y el de ϵ será por lo tanto

$$\epsilon = \frac{2}{\pi} \sum \frac{E_n}{n} \cos \beta_n \quad (14)$$

en el cual

$$\beta_n = n(\varphi_n - \varphi_1)$$

φ_n representa lo mismo que en la ecuación (13).

La *raíz cuadrada media* ó el valor *eficaz* se puede definir con más precisión que el valor medio, porque es completamente independiente del punto que se elija para origen. Si la ecuación de la curva se escribe en la forma

$$e = E_1 \sin \left(\frac{2\pi}{T} t - \theta_1 \right) + E_3 \sin \left(3 \frac{2\pi}{T} t - \theta_3 \right) + \dots + E_n \sin \left(n \frac{2\pi}{T} t - \theta_n \right) + \dots$$

el valor de su cuadrado será:

$$e^2 = E_1^2 \sin^2 \left(\frac{2\pi}{T} t - \theta_1 \right) + E_3^2 \sin^2 \left(3 \frac{2\pi}{T} t - \theta_3 \right) + \dots + E_n^2 \sin^2 \left(n \frac{2\pi}{T} t - \theta_n \right) + 2 E_1 E_3 \sin \left(\frac{2\pi}{T} t - \theta_1 \right) \sin \left(3 \frac{2\pi}{T} t - \theta_3 \right) + \dots + 2 E_3 E_n \sin \left(3 \frac{2\pi}{T} t - \theta_3 \right) \sin \left(n \frac{2\pi}{T} t - \theta_n \right) + \dots$$

y el cuadrado del valor eficaz será:

$$E^2 = \frac{1}{T} \int_0^T e^2 dt$$

Las integrales

$$\int_0^T \sin \left(m \frac{2\pi}{T} t - \theta_m \right) \sin \left(n \frac{2\pi}{T} t - \theta_n \right) dt$$

son nulas y las

$$\int_0^T \sin^2 \left(n \frac{2\pi}{T} t - \theta_n \right) dt$$

se reducen á $\frac{T}{2}$ si se hace uso de la relación

$$\int \sin^2 x dx = \frac{x}{2} - \frac{\sin x \cos x}{2}$$

y el valor de E^2 es sencillamente

$$E^2 = \frac{1}{2} (E_1^2 + E_3^2 + \dots + E_n^2 + \dots) \quad (15)$$

2.ª—CÁLCULO DE LA POTENCIA MEDIA DE UN CIRCUITO.

La potencia media de un circuito es la media de los productos que se obtienen al multiplicar los valores instantáneos y simultáneos de la f. e. m. y de la intensidad de la corriente, medidas sobre las curvas correspondientes. La potencia media se puede obtener con rapidez y facilidad si se utilizan los elementos que proporciona el análisis armónico.

Si los valores instantáneos de la f. e. m. y de la corriente se escriben en la forma que sigue:

$$e = E_1 \sin \left(\frac{2\pi}{T} t - \theta_1 \right) + E_3 \sin \left(3 \frac{2\pi}{T} t - \theta_3 \right) + \dots + E_n \sin \left(n \frac{2\pi}{T} t - \theta_n \right) + \dots$$

$$i = I_1 \sin \left(\frac{2\pi}{T} t - \delta_1 \right) + I_3 \sin \left(3 \frac{2\pi}{T} t - \delta_3 \right) + \dots + I_n \sin \left(n \frac{2\pi}{T} t - \delta_n \right) + \dots$$

el de la potencia, también instantáneo, será:

$$ei = E_1 I_1 \sin \left(\frac{2\pi}{T} t - \theta_1 \right) \sin \left(\frac{2\pi}{T} t - \delta_1 \right) + E_3 I_3 \sin \left(3 \frac{2\pi}{T} t - \theta_3 \right) \sin \left(3 \frac{2\pi}{T} t - \delta_3 \right) + \dots + E_1 I_3 \sin \left(\frac{2\pi}{T} t - \theta_1 \right) \sin \left(3 \frac{2\pi}{T} t - \delta_3 \right) + \dots + E_1 I_n \sin \left(\frac{2\pi}{T} t - \theta_1 \right) \sin \left(n \frac{2\pi}{T} t - \delta_n \right) + \dots + E_3 I_1 \sin \left(3 \frac{2\pi}{T} t - \theta_3 \right) \sin \left(\frac{2\pi}{T} t - \delta_1 \right) + \dots + E_3 I_5 \sin \left(3 \frac{2\pi}{T} t - \theta_3 \right) \sin \left(5 \frac{2\pi}{T} t - \delta_5 \right) + \dots$$

cuya integral entre 0 y T , dividida por T , será el valor medio de la potencia.

Las integrales de la forma

$$\int_0^T \sin \left(m \frac{2\pi}{T} t - \theta_m \right) \sin \left(n \frac{2\pi}{T} t - \theta_n \right) dt$$

son nulas.

Las restantes:

$$\int_0^T \sin \left(n \frac{2\pi}{T} t - \theta_n \right) \sin \left(n \frac{2\pi}{T} t - \varepsilon_n \right) dt = \\ = \frac{1}{2} \int_0^T \left[\cos (\theta_n - \varepsilon_n) - \cos \left\{ 2n \frac{2\pi}{T} t - (\theta_n + \varepsilon_n) \right\} \right] dt$$

se reducen á

$$\frac{T}{2} \cos (\theta_n - \varepsilon_n)$$

porque

$$\int_0^T \cos \left[2n \frac{2\pi}{T} t - (\theta_n + \varepsilon_n) \right] dt = 0$$

Luego el valor medio de la potencia será

$$P = \frac{1}{2} [E_1 I_1 \cos (\theta_1 - \varepsilon_1) + E_3 I_3 \cos (\theta_3 - \varepsilon_3) + \dots \\ + E_n I_n \cos (\theta_n - \varepsilon_n)] \\ = \frac{1}{2} [E_1 I_1 \cos \varphi_1 + E_3 I_3 \cos \varphi_3 + \dots + E_n I_n \cos \varphi_n] \quad (16)$$

φ_n es la diferencia de fase entre las armónicas del orden n correspondientes á la f. e. m. y á la corriente. La última ecuación comprueba el hecho bien conocido de que las f. e. m. y las corrientes de frecuencias distintas no influyen en la potencia de un circuito.

El factor de potencia de un circuito, en el cual las curvas de la f. e. m. y de la corriente tienen una forma cualquiera, se define por la relación de la potencia media al producto de la f. e. m. eficaz por la intensidad eficaz de la corriente. Si dichas curvas son sinusoides, aquel factor es igual al coseno de la diferencia de fase entre la f. e. m. y la corriente; pero si tienen formas irregulares el factor de potencia es el coseno de un ángulo, que se puede llamar *diferencia de fase eficaz*, que carece de existencia física, pero que es igual á la diferencia de fase que existiría entre dos curvas sinusoidales que tuvieran, respectivamente, los mismos valores eficaces que la f. e. m. y la corriente actuales y á las que correspondiera la misma potencia media que á ésta.

Cuando se dispone de los análisis armónicos de las curvas de la f. e. m. y de la corriente en un circuito es muy sencillo calcular los valores medios y eficaces de la f. e. m. y de la corriente, el factor de forma, la potencia media, el factor de potencia y la diferencia de fase entre la f. e. m. y la corriente.

Algunas de estas cantidades se pueden obtener directamente de las curvas con sólo medir un número suficiente de ordenadas y formar las medias de sus cuadrados y de sus productos.

Los valores *medios* de la f. e. m. y de la corriente, y, por lo tanto, sus factores de formas, no se pueden obtener con bastante exactitud sin analizar las curvas, operación indispensable si éstas son muy irregulares: los valores de las demás cantidades se determinan más pronto y con más exactitud haciendo uso de las armónicas que midiendo un gran número de ordenadas. Más adelante, en los ejemplos 9.º, 10 y 11 se aplicarán las fórmulas (14), (15) y (16).

3.ª.—DEDUCCIÓN DE LAS ECUACIONES DE LAS CURVAS DE LA POTENCIA.

La ecuación de la curva correspondiente á la *potencia instantánea* durante un ciclo, se deduce sin dificultad de las ecuaciones que representan las curvas de la f. e. m. y de la corriente.

En efecto:

$$e = E_1 \sin (pt - \theta_1) + E_3 \sin (3pt - \theta_3) + \dots \\ + E_n \sin (npt - \theta_n) + \dots \\ i = I_1 \sin (pt - \varepsilon_1) + I_3 \sin (3pt - \varepsilon_3) + \dots \\ + I_n \sin (npt - \varepsilon_n) + \dots$$

y por lo tanto:

$$ei = E_1 I_1 \sin (pt - \theta_1) \sin (pt - \varepsilon_1) + \\ + E_1 I_n \sin (pt - \theta_1) \sin (npt - \varepsilon_n) + \dots \\ + E_3 I_1 \sin (3pt - \theta_3) \sin (pt - \varepsilon_1) + \dots \\ + E_3 I_n \sin (3pt - \theta_3) \sin (npt - \varepsilon_n) + \dots \quad (17) \\ \dots \dots \dots \\ E_n I_1 \sin (npt - \theta_n) \sin (pt - \varepsilon_1) + \dots \\ + E_n I_n \sin (npt - \theta_n) \sin (npt - \varepsilon_n) + \dots$$

Si se aplica la fórmula

$$2 \sin x \sin y = \cos (x - y) - \cos (x + y)$$

la (17) se convierte en la siguiente:

$$2ei = E_1 I_1 \cos (\varepsilon_1 - \theta_1) + E_3 I_3 \cos (\varepsilon_3 - \theta_3) + \dots \\ + E_n I_n \cos (\varepsilon_n - \theta_n) + \dots$$

+ una serie de términos que contienen los cosenos de múltiplos pares de pt .

Los términos de las dos primeras líneas de la ecuación precedente representan la potencia media, según ya se ha demostrado; los restantes son de la forma

$$P_n \cos [2npt - \alpha_1] \quad Q_n \cos [2npt - \alpha_2], \text{ etc.}$$

que se pueden simplificar mediante la relación

$$M_1 \cos (x - \alpha_1) + M_2 \cos (x - \alpha_2) + M_3 \cos (x - \alpha_3) + \dots \\ = N \sin (x - p) \quad (17a)$$

en la cual

$$N^2 = (M_1 \sin \alpha_1 + M_2 \sin \alpha_2 + M_3 \sin \alpha_3 + \dots)^2 + \\ + (M_1 \cos \alpha_1 + M_2 \cos \alpha_2 + M_3 \cos \alpha_3 + \dots)^2$$

y

$$\tan \gamma = \frac{-(M_1 \cos \alpha_1 + M_2 \cos \alpha_2 + M_3 \cos \alpha_3 + \dots)}{(M_1 \sin \alpha_1 + M_2 \sin \alpha_2 + M_3 \sin \alpha_3 + \dots)}$$

El valor de la potencia será:

$$2ei = 2P = E_1 I_1 \cos (\varepsilon_1 - \theta_1) + E_3 I_3 \cos (\varepsilon_3 - \theta_3) + \dots \\ + E_n I_n \cos (\varepsilon_n - \theta_n) + \dots \\ + N_1 \sin (2pt - \gamma_1) + N_2 \sin (4pt - \gamma_2) + \\ + N_3 \sin (6pt - \gamma_3) + \dots \quad (18)$$

Este procedimiento se aplica en el ejemplo 12. En aquellos casos en que no se puede prescindir de las armónicas de orden elevado, tanto de la curva de la f. e. m., como de la corriente, es necesario tomar un gran número de términos en la ecuación (17), y entonces el método resulta algo laborioso. Es preferible formar los productos de las ordenadas utilizadas en los análisis de las curvas de la f. e. m. y de la corriente, y hacer el análisis de la curva de la potencia con los modelos en que se incluyen las armónicas pares. (Véase el apéndice B.)

Los dos procedimientos se desarrollan en el ejemplo 12, y conducen á la misma ecuación, salvo ligeras diferencias.

4.ª—DESCOMPOSICIÓN DE LA CURVA DE LA POTENCIA EN DOS COMPONENTES.

Con mucha frecuencia tiene interés la descomposición de la curva de la potencia en dos componentes, una que represente la potencia gastada en el circuito, por ejemplo, en calentar una resistencia, en pérdidas en los núcleos de hierro ó en los dieléctricos, y otra que corresponde á la energía que alternativamente se toma y se devuelve al campo magnético ó al dieléctrico. El valor medio de la potencia gastada es $E I \cos \varphi$; E_x ó $I \sin \varphi$, respectivamente, los valores eficaces de la f. e. m. y de la corriente $\cos \varphi$ el factor de potencia, en el que φ , si las curvas son sinusoidales, es la diferencia de fase entre la f. e. m. y la corriente.

Cuando las curvas son sinusoidales, desde el punto de vista matemático, es indiferente, por lo que se refiere al valor medio de la potencia, una de estas dos cosas:

1.ª Descomponer la f. e. m. en dos componentes $E \cos \varphi$ y $E \sin \varphi$, en fase y en cuadratura, respectivamente, con la corriente y hacer los productos de estas dos componentes por la corriente.

2.ª Descomponer la corriente en dos componentes $I \cos \varphi$ ó $I \sin \varphi$, en fase y en cuadratura, respectivamente, con la f. e. m. y hacer los productos de estas dos componentes por la f. e. m.

Por esto se suele hablar de la componente con vatios y de la componente sin vatios de la corriente y de la f. e. m. Sin embargo, no parece correcto, si se procede con lógica, hablar de una componente sin vatios de la corriente, porque en la potencia perdida, $I^2 R$ y no solamente entra $I \cos \varphi$, sino también $I \sin \varphi$. Además, se demuestra con facilidad que de los dos métodos de descomposición indicados, el primero es el que representa la realidad de los hechos, pero á pesar de ello es conveniente en muchos casos considerar las componentes de la corriente como se han definido antes (ejemplo, corriente de imitación de un transformador). Uno y otro modo de descomposición se considerarán más adelante, después de estudiar en qué difieren.

Si se admite que tanto la f. e. m. como la corriente son funciones sinusoidales del tiempo, sus valores instantáneos serán:

$$\begin{aligned} e &= E \sin pt \\ i &= I \sin (pt - \phi) \end{aligned} \quad (18 a)$$

y el de la potencia

$$ei = \frac{1}{2} E I [\cos \phi - \cos (2 pt - 2 \phi)] \quad (19)$$

El valor medio del segundo término es cero; el del primero es la expresión corriente del valor medio de la potencia, es decir, el valor medio de la potencia *gastada*.

Si el circuito es inductivo y la f. e. m. se descompone en dos componentes, e_1 y e_2 , una en fase con la corriente y otra con 90° de avance, se podrá escribir:

$$\begin{aligned} e_1 &= E \cos \phi \sin (pt - \phi) \\ e_2 &= E \sin \phi \cos (pt - \phi) \end{aligned} \quad (20)$$

de donde se deduce:

$$\begin{aligned} e_1 i &= \frac{1}{2} E I \cos \phi [1 - \cos (2 pt - 2 \phi)] \\ e_2 i &= \frac{1}{2} E I \sin \phi \sin (2 pt - 2 \phi) \end{aligned} \quad (21)$$

La suma de las curvas que representan estas dos ecuaciones es la correspondiente á la (19).

Si la corriente se descompone en dos componentes, i_1 ó i_2 , una en fase con la f. e. m. y la otra con 90° de retraso, se tendrá:

$$\begin{aligned} i_1 &= I \cos \phi \sin pt \\ i_2 &= -I \sin \phi \cos pt \end{aligned} \quad (22)$$

$$e i_1 = \frac{1}{2} E I \cos \phi (1 - \cos 2 pt)$$

$$e i_2 = \frac{1}{2} E I \sin \phi \sin 2 pt \quad (23)$$

La suma de las dos últimas es la (19).

Relaciones análogas se obtendrían si el circuito tuviera capacidad.

La fórmula que expresa la potencia de un circuito inductivo es:

$$ei = R i^2 + \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} L i^2 \right) \quad (24)$$

El primer término corresponde al consumo de energía, y el segundo á la variación de la energía cinética de la corriente.

Si se sustituye i por su valor (18 a) se obtiene:

$$\begin{aligned} R i^2 &= \frac{1}{2} I^2 R [1 - \cos (2 pt - 2 \phi)] = \\ &= \frac{1}{2} E I \cos \phi [1 - \cos (2 pt - 2 \phi)] \end{aligned} \quad (25)$$

puesto que la fórmula $i = \frac{E}{R} \cos \phi$ es aplicable á los valores máximos de la f. e. m. y de la corriente.

Además:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (L i^2) &= \frac{1}{2} L p I^2 \sin (2 pt - 2 \phi) = \\ &= \frac{1}{2} E I \sin \phi \sin (2 pt - 2 \phi) \end{aligned} \quad (26)$$

porque $L p I = E \sin \phi$.

Si se comparan las fórmulas (25) y (26) con las (21), se verá que la primera de éstas representa, con toda corrección, el valor instantáneo de la potencia consumida en calor y la segunda el de la que se almacena en el campo magnético.

Si en la ecuación (24) se sustituye i por $i_1 + i_2$ se obtiene:

$$ei = R (i_1^2 + 2 i_1 i_2 + i_2^2) + L \left(i_1 \frac{di_1}{dt} + i_2 \frac{di_2}{dt} + i_1 \frac{di_2}{dt} + i_2 \frac{di_1}{dt} \right) \quad (27)$$

Con los valores (22) es fácil demostrar que las dos componentes de la potencia $e i_1$ y $e i_2$ (23) son respectivamente iguales á las sumas

$$\begin{aligned} R (i_1^2 + i_2^2) + L \left(i_1 \frac{di_1}{dt} + i_2 \frac{di_2}{dt} \right) \\ 2 R i_1 i_2 + L \left(i_1 \frac{di_2}{dt} + i_2 \frac{di_1}{dt} \right) \end{aligned}$$

que sumadas dan la ecuación (27).

Si se recuerda que las fases de $\frac{di_1}{dt}$ y de $\frac{di_2}{dt}$ tienen un avance de 90° sobre las de i_1 ó i_2 , respectivamente, se notará que el primer grupo de términos está constituido por productos de cantidades que están en fase, mientras que las que forman las del segundo están en cuadratura: es correcta, por lo tanto, la separación de los términos de la ecuación de la potencia en dos series, una que comprenden los que influyen en la potencia media, otra los que tienen un valor medio igual á cero durante un ciclo, pero no hay que olvidar que la descomposición de la corriente en la forma que se ha hecho es completamente artificial y no corresponde á ningún hecho físico positivo.

Si las curvas de la f. e. m. y de la corriente no son armónicas habrá que escribir:

$$e = E_1 \operatorname{sen}(pt - \theta_1) + E_3 \operatorname{sen}(3pt - \theta_3) + E_5 \operatorname{sen}(5pt - \theta_5) + \dots$$

$$i = I_1 \operatorname{sen}(pt - \delta_1) + I_3 \operatorname{sen}(3pt - \delta_3) + I_5 \operatorname{sen}(5pt - \delta_5) + \dots \quad (28)$$

Como el producto de dos armónicas de distinta frecuencia, una de la curva de la f. e. m. y otra de la de la corriente, no influye en el valor medio de la potencia durante un ciclo, es lógico establecer las ecuaciones siguientes para los dos componentes de la f. e. m., una en fase y otra en cuadratura con la corriente:

$$e_1 = E_1 \cos(\delta_1 - \theta_1) \operatorname{sen}(pt - \delta_1) + E_3 \cos(\delta_3 - \theta_3) \operatorname{sen}(3pt - \delta_3) + \dots$$

$$e_2 = E_1 \operatorname{sen}(\delta_1 - \theta_1) \cos(pt - \delta_1) + E_3 \operatorname{sen}(\delta_3 - \theta_3) \cos(3pt - \delta_3) + \dots \quad (29)$$

Las componentes de la corriente, en fase y en cuadratura con la f. e. m., están expresadas por las ecuaciones siguientes:

$$i_1 = I_1 \cos(\delta_1 - \theta_1) \operatorname{sen}(pt - \delta_1) + I_3 \cos(\delta_3 - \theta_3) \operatorname{sen}(3pt - \delta_3) + \dots$$

$$i_2 = I_1 \operatorname{sen}(\delta_1 - \theta_1) \cos(pt - \delta_1) + I_3 \operatorname{sen}(\delta_3 - \theta_3) \cos(3pt - \delta_3) + \dots \quad (30)$$

Si las armónicas $E_1, E_3, \dots, I_1, I_3, \dots$ son conocidas por estar hecho el análisis de las respectivas curvas, es, evidentemente, muy sencilla la formación de las ecuaciones de las componentes de la f. e. m. y de la corriente, que servirán para deducir las correspondientes a las curvas de las componentes de la potencia, como se verá más adelante; cuando tiene interés el conocimiento de la forma en estas curvas, hay que hacer la representación gráfica de sus ecuaciones, lo cual lleva mucho trabajo. Si la mayoría de las armónicas son pequeñas ó se pueden despreciar, la tarea se simplifica, porque sin cálculo alguno se pueden dibujar las curvas: basta fijar los puntos del eje de los tiempos, los máximos, los mínimos, y trazar luego á ojo la curva. La resultante de todas las armónicas se puede construir gráficamente, y sus ordenadas demostrarán lo que se separa la curva actual de la sinusoidal fundamental, la cual se puede dibujar con todo cuidado y corregirla después para obtener una representación suficientemente aproximada de la curva real.

5.ª—DEDUCCIÓN DE LAS ECUACIONES DE LAS CURVAS DE LAS COMPONENTES DE LA POTENCIA.

Las fórmulas que expresan los valores e_1, i_1 y e_2, i_2 se obtienen multiplicando las ecuaciones (29), por la segunda de las (28). En la componente e_1, i_1 habrá, además de la serie de términos constantes correspondientes á la potencia media, otra serie de términos de la forma

$$P \operatorname{sen}(mpt - \delta_m) \operatorname{sen}(npt - \delta_n)$$

con los que se pueden formar dos grupos, por virtud de la relación

$$2 \operatorname{sen}(mpt - \delta_m) \operatorname{sen}(npt - \delta_n) = \cos[(m-n)pt - (\delta_m - \delta_n)] - \cos[(m+n)pt - (\delta_m + \delta_n)]$$

y, por último, se pueden reunir en un solo término todos los que se refieren á la misma frecuencia, en los que entra como factor

el seno de esta última, resultado á que se llega con las ecuaciones antes establecidas.

En la componente e_2, i_2 entran términos de la forma

$$Q \operatorname{sen}(mpt - \delta_m) \cos(npt - \delta_n)$$

las que se pueden descomponer en dos series si se hace uso de la relación

$$2 \operatorname{sen}(mpt - \delta_m) \cos(npt - \delta_n) = \operatorname{sen}[(m+n)pt - (\delta_m + \delta_n)] - \operatorname{sen}[(m-n)pt - (\delta_m - \delta_n)]$$

y entonces todos los términos de la misma frecuencia se pueden agrupar si se aplican las siguientes ecuaciones de transformación:

$$M_1 \operatorname{sen}(2npt - \alpha_1) + M_2 \operatorname{sen}(2npt - \alpha_2) + M_3 \operatorname{sen}(2npt - \alpha_3) + \dots = N \operatorname{sen}(2npt - \gamma) \quad (31)$$

$$N^2 = [M_1 \operatorname{sen} \alpha_1 + M_2 \operatorname{sen} \alpha_2 + M_3 \operatorname{sen} \alpha_3 + \dots]^2 + [M_1 \cos \alpha_1 + M_2 \cos \alpha_2 + M_3 \cos \alpha_3 + \dots]^2$$

$$\operatorname{tang} \gamma = \frac{M_1 \operatorname{sen} \alpha_1 + M_2 \operatorname{sen} \alpha_2 + M_3 \operatorname{sen} \alpha_3 + \dots}{M_1 \cos \alpha_1 + M_2 \cos \alpha_2 + M_3 \cos \alpha_3 + \dots} \quad (32)$$

El problema de determinar las ecuaciones de las curvas que representan e_1, i_1 y e_2, i_2 no se diferencia en nada esencial de las consideraciones que preceden.

Los detalles de los cálculos correspondientes se exponen con toda claridad en los ejemplos 13 a y 13 b.

El trabajo que exigen los cálculos aumenta rápidamente con el número de armónicas de las curvas de la f. e. m. y de la corriente, y si no fuera por el que lleva el cálculo de las ordenadas de las curvas componentes de la f. e. m. y de la corriente, sería más fácil hacer el análisis de las curvas en función de una serie de ordenadas, como se hace en el ejemplo 12 para obtener la curva de la potencia total.

(Continuará.)

Puerto de Huelva (1)

CONDICIONES ECONÓMICAS DE LAS OBRAS

Artículo 1.º Presupuesto.—Dedicado este artículo á justificar las mediciones de las obras y los precios que se adoptan para su valoración, no diremos aquí más que el presupuesto general consta de siete presupuestos parciales con los siguientes títulos:

- 1.º Presupuesto del movimiento de tierras.
- 2.º Presupuesto del muro de muelle en un metro de longitud.
- 3.º Presupuesto de una escalera intermedia doble.
- 4.º Presupuesto de una escalera extrema.
- 5.º Presupuesto de los espigones de abrigo.
- 6.º Presupuesto de un flotador.
- 7.º Presupuesto de las obras accesorias.

Finalmente, reuniendo estas valoraciones en cuatro grupos, tendremos el presupuesto general de la obra dividido en otros tantos artículos, que son: «Explanación», «Obras de fábrica», «Obras accesorias» y «Obras auxiliares», cuyos importes reunidos ascienden á la cantidad de 6.231.803,90 pesetas.

Teniendo en cuenta la división que hemos hecho, según el

(1) Véase el número anterior.