

REVISTA DE OBRAS PÚBLICAS

PUBLICACION TECNICA DEL CUERPO DE INGENIEROS DE CAMINOS, CANALES Y PUERTOS

DIRECTOR

D. MANUEL MALUQUER Y SALVADOR

COLABORADORES

LOS INGENIEROS DE CAMINOS, CANALES Y PUERTOS

SE PUBLICA LOS JUEVES

Dirección y Administración: Plaza de Oriente, 6, primero derecha.

LAS MATEMÁTICAS DEL INGENIERO Y SU ENSEÑANZA

POR

DON LUIS GAZTELU

Ingeniero de caminos, canales y puertos, Profesor de la Escuela especial del Cuerpo.

«Señores:

Para que los actos de esta clase sean interesantes y provechosos para la cultura, deben ser, á mi juicio, breves, aun cuando el conferenciante posea relevantes dotes oratorias y el arte envidiable de exponer sus pensamientos con amenidad. Cuando, como en el caso presente, carece por completo de tales condiciones, deberían ser brevisimas, y á ello he de encaminar mis esfuerzos.

La enseñanza matemática de los Ingenieros es un tema de verdadera actualidad, á cuyo estudio prestan la mayor atención matemáticos y profesores eminentes. Promovida esta cuestión hace ya bastantes años, fué propuesta oficialmente, por decirlo así, en el Congreso internacional de la Enseñanza matemática, celebrado en Milán en 1911. En el Congreso internacional de Matemáticas, de Cambridge, en 1912, se trató de este asunto, aunque, á la verdad, no se le prestó toda la atención que merece. Va á ser estudiado nuevamente en el de la Enseñanza, que se celebrará en París en el próximo mes de Abril, y en el de Matemáticas de Stokolmo, en 1916. Las revistas especiales publican tal cantidad de trabajos sobre el tema de que voy á tratar, que se hace ya difícil seguir ese movimiento, y, entre nosotros, el Instituto de Ingenieros Civiles ha tenido la feliz idea de organizar conferencias para su estudio, y ha creado una Comisión permanente de la enseñanza, prueba bien clara de que se ha sentido la necesidad de orientarnos en materia tan importante y de tomar parte en ese gran movimiento de reforma que con tanta razón preocupa á todas las naciones cultas.

Grande es la dificultad de condensar lo más esencial de materia tan vasta en una breve conferencia.

He tratado de resolverla presentando un bosquejo ó anteproyecto del plan que adoptaría si hubiera de desarrollar el tema en una Memoria extensa ó preparar un curso sobre este asunto. Parece que, tratándose de un anteproyecto, he de considerar como reformable mucho de lo que voy á decir. Así es, en efecto, en lo referente á la exposición y á los detalles; pero las afirmaciones fundamentales que he de sentar no han sido improvisadas al componer esta conferencia, sino que son opiniones elaboradas lenta y gradualmente durante veinticinco años de práctica de la enseñanza, confirmadas y corroboradas por la lectura de gran número

de trabajos recientes sobre Pedagogía matemática y constituyen ya, por consiguiente, convicciones más firmemente arraigadas.

Dividiré la conferencia en tres partes:

En la primera expondré algunas consideraciones generales sobre Pedagogía matemática.

En la segunda examinaré la cantidad y calidad de las matemáticas que necesita el Ingeniero para el ejercicio de su profesión.

Y en la tercera estudiaré cómo se le deben enseñar esas matemáticas, tratando brevemente de los métodos de enseñanza y de su organización.

* *

Puede decirse que la Pedagogía matemática es una ciencia nueva. Los profesores de Matemáticas del siglo XIX no prestaron la atención debida á las cuestiones relativas á la enseñanza, y erraron en los puntos más fundamentales. Uno de sus grandes yerros fué precisamente ese descuido. La Pedagogía era desdeñada como cosa propia, solamente de los maestros de primeras letras, y se suponía que sus aplicaciones debían limitarse á la enseñanza de los niños. Sin embargo, todos pudieron observar que el aprovechamiento de los alumnos de las clases de Matemáticas era muy corto. Este aprovechamiento se puede definir análogamente á lo que llamamos en las máquinas rendimiento, y que más castizamente deberíamos llamar también aprovechamiento. Es la relación de los conocimientos realmente asimilados de un modo sólido, duradero y permanente á la suma de conocimientos que se intentó transmitir al alumno, ó si se quiere, al trabajo que necesite desarrollar para adquirirlos. La experiencia demuestra que esa razón ha sido siempre muy pequeña.

Y era muy natural tratar de inquirir las causas de este mal para poner el remedio oportuno y aumentar así el aprovechamiento.

La reacción contra este estado de cosas partió de Alemania, donde se empezó á elaborar la moderna Pedagogía matemática como ciencia experimental y de observación, se propagó rápidamente á Inglaterra y á los Estados Unidos, donde el movimiento favorable á la reforma adquirió una importancia extraordinaria, y, finalmente, llegó á Francia y á todas las naciones civilizadas, pudiéndose afirmar que, en lo tocante á la apreciación de los errores de los antiguos métodos y á las reformas necesarias en cuanto á sus líneas generales, ha habido perfecta unanimidad entre los más eminentes escritores que han tratado de estos asuntos.

Verdad es que estos estudios pedagógicos se han aplicado hasta ahora á la enseñanza secundaria ó media, y no á la enseñanza superior, propiamente dicha.

Cuando se trata de clases explicadas por un sabio especialista

á un corto número de alumnos, sabios también, que acuden á ellas deseosos de aprender y de trabajar y que no necesitan estímulos de ninguna clase ni más ayudas que la simple comunicación de ideas nuevas, por ser ya muy diestros en el arte de estudiar, claro está que poco tiene que hacer la Pedagogía. Pero estas clases son muy raras, y en nuestra enseñanza son tan pocas, que bien podemos prescindir de ellas al tratar de la enseñanza, en general, y admitir que casi todas nuestras clases de matemáticas pertenecen á la enseñanza media, por cuanto á la inmensa mayoría les conviene la Pedagogía correspondiente á ese grado. Creo innecesario extenderme en más amplias consideraciones para demostrar esto.

Siendo así, poco importa, generalmente, que el Profesor sea ó no sea un sabio. La medida de su mérito como Profesor no es su propio saber, sino la instrucción que es capaz de comunicar á sus alumnos, la cual muchas veces no puede ser más que una pequeña parte de lo que sabe el Profesor. Los Profesores sabios deben aceptar con resignación el sacrificio de despojarse de una gran parte de su ciencia para poder enseñar bien, es decir, para conseguir el mayor aprovechamiento posible de los alumnos. Lo que más importa es observar las condiciones de los alumnos, estudiar la elección de los métodos, de la cantidad y calidad de las materias que más les convienen, para lo cual, generalmente, hay bastante latitud, aun con programas impuestos; en una palabra, es de absoluta necesidad prestar gran atención á las cuestiones pedagógicas.

Los pedagogos del siglo XIX aspiraban principalmente á la exposición lógica rigurosa. Tomando como tipo la Geometría de Euclides, pretendían ajustar á ese modelo no sólo la exposición de las demás ramas de la Matemática, sino de todos los conocimientos científicos.

Estudios recientes han demostrado de un modo irrefutable que esa aspiración es quimérica. Porque, lejos de adelantar en ese sentido, la crítica moderna ha demostrado que la misma Geometría euclidiana dista mucho de llenar esas condiciones de rigor lógico, tan cumplidamente como se había creído. Así, muchos matemáticos se han dedicado á descubrir y hacer el inventario de los postulados admitidos implícitamente en los elementos de Euclides, y ante su análisis parece que vacila y se tambalea ese venerable monumento que ha desafiado la acción de veintitrés siglos y es, sin duda, el edificio científico más sólido que jamás logró fabricar la inteligencia humana.

Para exponer la Geometría con rigor lógico irreprochable, adoptan como primeros elementos algunos términos que consideran indefinibles, y con ellos sientan una serie de axiomas, definiciones y postulados, considerando los axiomas más bien como hipótesis de carácter muy general que como verdades evidentes por sí mismas, é imponiéndoles las condiciones de ser independientes unos de otros no contradictorios, é irreducibles entre sí. A los postulados, que se demuestran mediante los axiomas, más bien les cuadra el nombre de teoremas.

Así, Veblen adopta como ideas primitivas indefinibles los términos «punto» y «orden», y establece una serie de doce axiomas, ocho definiciones y nueve teoremas, y sobre esta base edifica su Geometría deductiva con rigor lógico impecable.

He aquí algunas muestras de sus axiomas, definiciones y teoremas:

Axioma I.—Existen por lo menos dos puntos distintos.

Axioma II.—Si tres puntos A , B , C están en el orden ABC , estarán también en el orden CBA . Se dice que el punto B se halla entre A y C .

Axioma V.—Si A y B son dos puntos distintos cualesquiera, existe un punto C tal que A , B , C se hallan en el orden ABC .

He aquí la definición de la línea recta:

La línea recta AB consiste en los puntos A y B , y en todos los puntos X , en uno de los órdenes posibles, ABX , AXB , XAB . Los puntos X en el orden AXB constituyen el segmento AB . A y B son los puntos límites del segmento.

Veamos ahora algunos de los teoremas que, como ya he dicho, se pueden deducir de los axiomas.

Teorema I.—Si los puntos A , B , C están en el orden ABC , no estarán en el orden CAB .

Teorema VI.—Entre dos puntos distintos cualesquiera existe un tercer punto.

Teorema IX.—A cuatro puntos cualesquiera tomados en una recta se les puede asignar la notación A , B , C , D , de modo que se hallen en el orden $ABCD$.

Este último teorema era un axioma en la Geometría de Hilbert, pero Moore lo demostró deduciéndolo de los demás axiomas admitidos.

A la mayor parte de mis oyentes parecerán estos axiomas y teoremas lo que llamamos vulgarmente verdades de Perogrullo. Lo son, sin duda, cuando se admite como prueba la intuición; pero todas estas sutilezas son necesarias cuando se pretende el orden lógico riguroso.

He citado esta serie de axiomas y postulados para hacer sentir palpablemente lo inconveniente y absurdo que sería exponer así los fundamentos de la Geometría á los principiantes.

Con la maravillosa lucidez que le es habitual estudia Poincaré las primeras proposiciones de la Aritmética y del Algebra, relativas á las operaciones fundamentales, en su libro *La ciencia y la hipótesis*, conocido seguramente de la mayor parte de mis oyentes. Hace notar la forma grosera en que se exponen estas demostraciones en los tratados elementales, y demuestra rigurosamente las propiedades distributiva, asociativa y conmutativa de la adición y la multiplicación; pero hace observar la imposibilidad de presentarlas en esa forma á los principiantes por hallarse enteramente fuera de su alcance, y esto á pesar de que las demostraciones que propone irradian una claridad luminosa.

Creo que lo que acabo de exponer demuestra suficientemente que si estas especulaciones para alcanzar el rigor lógico absoluto son de un alto interés para sabios y Doctores, no es, ciertamente, su lugar adecuado la enseñanza elemental.

Es de advertir que en la apreciación del valor relativo de las tres clases de pruebas, lógica, intuitiva y experimental hay mucha variedad. Así, el profesor Vailati, de la escuela filosófico-matemática italiana aceptaba la exposición de la Geometría alternando las pruebas lógicas rigurosas con las experimentales, que no son sino simples comprobaciones gráficas ó numéricas, y rechazaba implacablemente el empleo de la intuición. Y no es esta una opinión personal aislada.

El eminente matemático Euriques supone que ese es el criterio predominante en la escuela de Peano, y cita el tratado del dinamarqués Bonnesen como ejemplo notable de enlace entre el verdadero rigor lógico y el empleo de la experiencia.

El orden lógico riguroso sólo podría convenir á un ser abstracto, puramente hipotético, especie de estatua de Condillac, y ajeno á toda realidad. El alumno, lejos de asemejarse á este ente de razón, ofrece un conjunto de condiciones sumamente complejas, que varían hasta el ∞ , aun en un mismo individuo desde que emprende hasta que termina sus estudios, porque éstos se realizan precisamente en la época de la vida sujeta á las más profundas y rápidas variaciones. Vano y quimérico sería todo intento de adaptación como la que se realiza entre los cuerpos que considera la Mecánica racional y los reales que estudia la Mecánica aplicada.

No bastaría ya un coeficiente numérico de corrección; sería menester una función de tal número de variables, que la sola enumeración es absolutamente imposible.

La verdadera lógica en los planes de estudios científicos debe, pues, buscarse en la adaptación de las enseñanzas á las condiciones psicológicas y á las facultades mentales del alumno, y esto me parece tan evidente como los axiomas geométricos citados anteriormente.

Síguense de aquí consecuencias importantísimas.

En la elección de materias se deben tener muy en cuenta los gustos y aficiones de los alumnos, procurando que despierten su interés, y para ello es preciso que sean en lo posible de utilidad práctica inmediata, y para que puedan apreciar bien esto se deben presentar desde luego algunas aplicaciones.

Deben omitirse en los elementos los trabajos largos y enojosos repulsivos para la generalidad de los alumnos, porque carecen de valor educativo. La experiencia demuestra que los trabajos hechos á disgusto nunca se ejecutan bien y, por consiguiente, no aprovechan para la cultura.

Deben aceptarse sin escrúpulo proposiciones no demostradas, aplazando su demostración cuando se juzgue conveniente, y aun omitiéndola en algunos casos. Esto permite suprimir algunas de esas materias de cuya asimilación de un modo definitivo y permanente nadie se preocupa, y que el profesor Peny, en su lenguaje picante y pintoresco llama *excrecencias*.

Citaré un ejemplo. Al explicar la formación de las tablas trigonométricas, para poder tomar la longitud del arco de un minuto en vez de su seno y determinar el número de cifras decimales comunes, se demuestra, con una prueba bastante artificiosa, que la diferencia entre el arco y el seno, para ángulos menores que un cuadrante, es menor que la cuarta parte del cubo del arco.

Es una de esas demostraciones reservadas para uso exclusivo de examinadores y examinados, de las que éstos suelen repasar con febril ansiedad en los momentos que preceden al examen, por si algún examinador tiene la humorada de cerciorarse de que no hace mucho tiempo que la leyó. Poco tiempo después estudia el alumno el desarrollo en serie del seno y á su simple inspección puede ver que esa diferencia, ó límite de error, es menor no sólo que la cuarta parte, sino menor que la sexta parte del cubo del arco. Puede, por consiguiente, suprimirse aquella demostración. Se me dirá que hay alumnos que abandonan el estudio de las matemáticas sin llegar al desarrollo en serie del seno; á eso contestaré que es imposible que esos alumnos se asimilen este conocimiento de un modo permanente y definitivo, porque no tienen ocasiones de aplicar la Trigonometría y no suelen tener la costumbre de repasarla á menudo para que no se les olvide.

Es muy conveniente romper el orden sucesivo tradicional en el estudio de la Aritmética, el Algebra, la Geometría, etc., tratando estas ramas de la Matemática con absoluta independencia y aun con prohibición de mezclarlas. Esta prohibición es funesta, porque impide observar multitud de analogías y aun hace que aparezcan muchas veces como diferentes y sin ninguna conexión proposiciones idénticas y conocimientos que, apoyándose mutuamente, se retienen mucho mejor.

Ejemplos: La prohibición impide que al demostrar que el orden de dos factores no altera el producto en la forma acostumbrada en los primeros elementos, se pueda hacer observar al alumno que ha demostrado también de paso la regla para hallar el área del rectángulo, en el caso en que los lados son conmensurables. Y no se puede negar que, á quien comienza á estudiar las matemáticas le es urgente adquirir este conocimiento, que queda

así asociado con la primera verdadera demostración que se le presenta.

Otro ejemplo: Muy pocos son seguramente los alumnos y aun quizás los Profesores que hayan observado que el problema de la determinación del volumen del tetraedro y el de la cuadratura de la parábola constituyen, en el fondo, un solo y único problema.

Y así se podría continuar indefinidamente aduciendo innumerables ejemplos.

Dedúcese también inmediatamente del principio admitido que conviene presentar al principiante todas las cuestiones en forma concreta, aplazando las generalizaciones hasta que el alumno, mediante el ejercicio del razonamiento matemático, haya adquirido la fuerza de abstracción necesaria para comprenderlas bien.

La introducción prematura de fórmulas y raciocinios generales produce en muchos alumnos la confusión de ideas, y lo que es peor, á veces provoca el estudio de memoria para suplir lo que les cuesta trabajo entender. Podría citar casos que he tenido ocasión de observar, pero desisto de ello por no hacer interminable esta conferencia.

Otro punto importante en que erraron nuestros predecesores es el fin que asignaban á la enseñanza.

Parece que su propósito se limitaba á encasillar en las células del cerebro del alumno una colección de hechos y de teorías. Verdad es que algunos pensadores llamaron accidentalmente la atención sobre la importancia grande de cultivar la inteligencia del alumno preparándole para la invención y la investigación personal y enseñándole á discurrir por su propia cuenta. Citan los autores ingleses la *Inventional Geometry*, de Spéncer, padre del célebre Herberto, y yo no quiero omitir la mención de nuestro gran Balmes, que en esa joya titulada *El criterio* señala claramente el verdadero objeto de la enseñanza conforme al concepto de la moderna Pedagogía.

Pero en la práctica pocos eran los Profesores que se daban cuenta clara de esa parte tan importante de su misión, muchos menos los que intentaban llevarla á la práctica y ninguno se ha preocupado hasta una época muy reciente de estudiar este asunto metódicamente por medio de la observación y de la experiencia y de dar á conocer los resultados obtenidos para que todos puedan aprovecharlos y contribuir á su vez á una mejora de tanta trascendencia.

Estos principios son admitidos hoy por los más eminentes pedagogos y matemáticos que han estudiado estos asuntos.

Me limitaré á citar el nombre del matemático y profesor alemán Klein, cuya autoridad es reconocida tan universalmente, que ha sido elegido Presidente de la Comisión internacional permanente de la enseñanza matemática.

* *

Me he extendido en el primer punto más de lo que proporcionalmente le correspondía, pero también yo necesitaba sentar sólidamente mi serie de axiomas y postulados.

Procedería ahora á estudiar detenidamente cuál es la intervención de las matemáticas en los trabajos habituales de la práctica de la ingeniería en sus diversas especialidades para poder deducir directamente qué matemáticas necesita el Ingeniero, qué extensión proporcional conviene dar á cada una de las diversas ramas, cómo se le deben enseñar esas matemáticas y otras cuestiones semejantes. Pero este método, muy propio de un tratado ó de un curso, me llevaría demasiado lejos, y habré de limitarme aquí á algunas observaciones.

Hay, en primer lugar, ciertos conocimientos matemáticos ele-

mentales, independientes de la mecánica, que puede decirse que intervienen constantemente en casi todos los trabajos del Ingeniero. En los trabajos técnicos se aplica casi siempre la mecánica en grado más ó menos avanzado, y de todos estos conocimientos ha de tener el Ingeniero un perfecto dominio, porque son los instrumentos que maneja diariamente, como el carpintero se vale á cada paso de la sierra, del berbiquí ó del escoplo.

Por otra parte, el conocimiento que necesita de la mecánica para poder hacer uso de ella en las aplicaciones le obliga indispensablemente á estudiar los elementos del cálculo infinitesimal, y siempre que proyecta hace uso de la parte elemental de la geometría descriptiva. A veces, los trabajos técnicos le conducen también á problemas de un carácter mucho más elevado.

Para poseer estos conocimientos con la perfección necesaria es indispensable que estudie mucho más, porque nadie retiene todo lo que estudió en su juventud.

Necesita, por otra parte, conocimientos matemáticos suficientes para poder seguir el desarrollo de las aplicaciones científicas de su especialidad, y esto es muy importante. Si á los Ingenieros que hicimos nuestros estudios hace treinta ó treinta y cinco años nos hubieran limitado la instrucción matemática á lo estrictamente indispensable para la práctica ordinaria de la profesión en aquella época, hoy nos encontraríamos en situación muy difícil y comprometida ante una multitud de problemas técnicos nuevos en cuya resolución tenemos que intervenir diariamente; por ejemplo, los relativos á la electrotecnia, necesarios hoy en mayor ó menor escala para todos los Ingenieros. Y este daño sería mucho más sensible aun para los actuales alumnos dentro de muy pocos años, porque el movimiento de avance es visiblemente acelerado.

El Ingeniero debe hallarse penetrado del espíritu matemático, que constituye el fondo de todos los trabajos técnicos de la ingeniería propiamente dicha.

Poco importa que en los problemas prácticos no pueda muchas veces aplicar literalmente los procedimientos analíticos clásicos por la forma muy compleja en que se le presentan. Los métodos matemáticos son los que le guían para hallar la solución, y tanto más apreciamos los trabajos técnicos de ingeniería, cuanto más se acercan á la forma matemática en el fondo del razonamiento y en el método de exposición.

Las matemáticas constituyen una preparación admirable para el uso de símbolos. Y es de observar que en toda clase de negocios el desempeño de los cargos más elevados requiere el empleo de símbolos, mientras los más humildes y menos retribuidos son los que obligan á manejar directamente los objetos reales. Así, el Director de una gran Compañía de ferrocarriles rige las actividades de millares de personas encerrado en su despacho y haciendo uso de símbolos, mientras los mozos de estación trabajan directamente con los objetos materiales, empujando los vagones, por ejemplo. El capitalista archimillonario maneja todos sus fondos y dirige sus negocios por medio de símbolos y sólo sus servidores de orden ínfimo son los encargados de llevar y traer materialmente los sacos de plata ó de calderilla. Y así puede observarse que tanto mayor es la necesidad del empleo de símbolos, cuanto mayor es la importancia del cargo y la amplitud é importancia de los negocios encomendados á quien lo desempeña. El estudio de las matemáticas habitúa á razonar constantemente con símbolos, y á pasar y repasar frecuentemente de los símbolos á su significación y viceversa; posee, por consiguiente, un alto valor educativo muy apropiado como preparación para una multitud de ocupaciones de carácter elevado y muy singularmente para la ingeniería.

El problema de la elección de materias y su extensión, ó sea

de formar planes de enseñanza y programas, es esencialmente indeterminado. En primer lugar, hay mucha variedad de Ingenieros y no pueden convenir á todos las mismas matemáticas. Aun dentro de una misma especialidad y entre los Ingenieros de un mismo Cuerpo, se comprende que ha de haber forzosamente opiniones y apreciaciones muy variadas.

Voy á exponer algunas opiniones que conozco de profesores de ingeniería de reputación universal para tratar de formar con ellas una especie de escala graduada.

Colombo, en un discurso que pronunció en el Congreso de Milán, se manifestó como partidario de una elevada instrucción matemática general para los Ingenieros, considerando como demasiado bajo el nivel de estos estudios en la Politécnica de Milán, una de las escuelas técnicas en que más importancia se concede á los estudios matemáticos. Representa, por decirlo así, la extrema derecha conservadora.

Siguiendo la comparación, representa muy bien la extrema izquierda ó partido radical el profesor Perry, cuyas opiniones son muy conocidas.

Ocupa una posición intermedia Le Chatelier, cuya conferencia destinada al Congreso de Cambridge figura en el libro de actas, aunque no la pronunció allí su autor por no haber podido acudir.

Su trabajo es interesante y merece que fijemos en él nuestra atención algunos momentos.

El autor se fija en las necesidades del Ingeniero práctico, no en el que aspira á ser un investigador científico émulo de Lord Kelvin. La enseñanza general debe ajustarse al primer caso.

No se muestra Le Chatelier muy exigente, y parece que en la escala á que me he referido más se acercan sus opiniones á las de Perry que á las de Colombo.

Para el Ingeniero que se contente con aplicar los métodos conocidos, inspirándose en el ejemplo de sus predecesores, basta, según este autor, las geometrías euclidiana y descriptiva, el cálculo algebraico elemental, la resolución de las ecuaciones de los dos primeros grados, algunos elementos del cálculo diferencial é integral y un poco de Trigonometría. Parece que el trabajo necesario para aprender esto se reduce á bien poca cosa, hace observar á continuación. *Il n'est rien*, responde. Nada de eso; para adquirir estos conocimientos elementales con la perfección con que los necesite el Ingeniero hace falta una suma de trabajo mucho mayor de lo que generalmente se cree.

Después de examinar lo que se necesita estudiar de materias más elevadas para conseguir la asimilación perfecta de lo ya enumerado, deduce que los estudios matemáticos del Ingeniero deben abarcar un campo próximamente doble del citado anteriormente. Algo vaga es esta medida, pero no es fácil precisar esto en una proposición de carácter general. En resumen, las opiniones y consideraciones que expone Le Chatelier me parecen muy razonables y bastante bien ajustadas á las necesidades de la generalidad de nuestros Ingenieros.

Voy ahora á exponer algunas observaciones propias; pero claro está que no he de molestar vuestra atención con la árida lectura de un plan de estudios ó de una colección de programas.

Lo que se ha venido llamando Matemáticas elementales, la Aritmética, Algebra, Geometría y Trigonometría de la segunda enseñanza es de tal importancia, que se han de poseer á la perfección, de tal modo que se conserven durante toda la vida dispuestas constantemente para su uso. Deben, sin embargo, suprimirse las *excrecencias*, que no le hacen falta al Ingeniero..... ni á nadie.

A esa parte del Algebra que impropriamente se ha llamado superior, porque su superioridad es, al fin y al cabo, muy rela-

tiva, y muy especialmente á la teoría general de las ecuaciones, se le ha dado una extensión desmedida que nada justifica. Yo creo que ha sido causa muchas veces del abandono de las Matemáticas por alumnos capaces y de buenas disposiciones. A los ejercicios de Algebra superior se referiría probablemente Lamar-tine al escribir su célebre frase antimatemática: «L'enseignement mathématique fait l'homme machine et dégrade la pensée».

La falta de métodos generales, la acumulación de innumerables reglas particulares minuciosas y los enojosos y áridos cálculos á que conducen, da por resultado que su valor educativo sea muy limitado, aun para el que se propone cultivar las matemáticas puras. Se ha tratado de argumentar en su favor diciendo que es una gimnasia intelectual muy útil; pero hay que reconocer que, aun dentro de las matemáticas puras, y sin salir del campo del análisis, hay ramas que pueden proporcionar al Ingeniero una gimnasia mucho mejor adaptada á sus necesidades. Gimnasia es el ejercicio de levantar pesas, y gimnasia es también la que ejecuta para adquirir el mecanismo y soltar los dedos el pianista que invierte horas enteras en hacer escalas, arpeggios y ejercicios de posición fija; pero á nadie se le puede ocurrir recomendar al pianista el ejercicio de levantar pesas, ni que se dedique á tocar el piano quien aspira á convertirse en atleta.

En cuanto á las aplicaciones, todos sabemos que son muy raras; si por excepción se encuentra el Ingeniero con alguna ecuación numérica de grado elevado en un caso concreto, el problema práctico le indicará casi siempre límites de las raíces aprovechables mucho más próximos á éstas que los que dan las reglas conocidas, y nunca necesitará explorar todo el campo real de la variable de $-\infty$ á $+\infty$, y mucho menos el campo imaginario; con un poco de paciencia, la consideración de la derivada y la aplicación del método de aproximación de Newton podrá, generalmente, resolver la dificultad. Yo creo que no daría prueba de sagaz ingenio ni de poseer grandes recursos matemáticos el Ingeniero que en uno de estos casos no supiera sortear la cuestión y se enfrascara en la resolución completa de la ecuación aplicando directamente los pesados é inelegantes métodos clásicos.

Y en la conveniencia de limitar este estudio á lo estrictamente indispensable están conformes todos los que han estudiado con atención estos problemas. Colombo, representante de la extrema derecha en la escala á que he aludido anteriormente, propone que se reduzca á los pocos capítulos de álgebra necesarios para la resolución de las ecuaciones numéricas, presentados á manera de introducción de la Geometría analítica y del cálculo infinitesimal.

Aun entre los matemáticos puros se encuentra esta opinión. Así, D. Zoel Galdeano, á quien nadie podrá tachar de ser partidario de la reducción excesiva de los programas de matemáticas, recomienda en este punto que se limite á un capítulo de carácter histórico el examen de las tentativas de Descartes, Newton, Rolle, Lagrange, Sturm, etc., para edificar la teoría de las ecuaciones numéricas, y se dé mayor importancia á las teorías modernas, más generales, de Abel y de Galois.

No necesita el Ingeniero estudiar la Geometría analítica con el carácter de generalidad que se le da en las Facultades de Ciencias. Le basta conocer y manejar bien los sistemas de coordenadas cartesianas y polares porque son las que encuentra casi exclusivamente en los tratados técnicos, y una gran parte de este estudio puede y debe refundirse con el cálculo infinitesimal. Las teorías generales de las curvas y de las superficies pueden ser estudiadas con más generalidad y de un modo más completo como aplicaciones del cálculo.

El cálculo infinitesimal es para el Ingeniero el estudio más importante de las diversas ramas de matemáticas puras. Puede

decirse que todos los estudios de análisis que le preceden no tienen otro objeto que prepararle para el estudio del cálculo como este estudio es á su vez preparatorio para el de la mecánica. Ya se ha visto que las aplicaciones directas del Algebra son muy limitadas. Aquí no basta ya que el alumno se ejercite y adquiera la práctica de los cálculos, sino que importa mucho que adquiera ideas muy claras de los fundamentos, no debiéndose omitir los desarrollos teóricos necesarios para conseguirlo, porque también esto es indispensable para comprender y aplicar bien la mecánica, que es el fin principal. Esta es la ocasión oportuna para que haga la gimnasia intelectual matemática de que antes hablabamos, y ésta le aprovechará mucho más que el estudio y los ejercicios de resolución de ecuaciones.

No quiero decir con esto que convenga dar un curso muy extenso, pretendiendo llegar á poseer á la perfección las aplicaciones geométricas y analíticas más difíciles que se encuentran en los tratados clásicos. En este punto, el criterio sano y seguro es la observación de las fuerzas de los alumnos. No conviene de ningún modo empeñarse en llevarlos más lejos de lo que consienta su capacidad y su instrucción efectiva. Lo importante es que posean bien los fundamentos y la práctica de los cálculos elementales con capacidad para aplicarlos con soltura y seguridad. Así preparado un alumno, se hallará más tarde en disposición de leer sin dificultad la mayor parte de los tratados técnicos de aplicación, y si, andando el tiempo, llega á necesitar alguna teoría que desconoce, poco trabajo le costará suplirla; al paso que si hace este estudio á disgusto, como sucederá siempre que tenga que estudiar teorías cuyos fundamentos no conoce suficientemente, llegará á tomarle tal aversión que rehuirá durante toda su vida la lectura de cualquier libro en que se repita con alguna frecuencia el signo de la integración.

La Geometría descriptiva tiene una importancia extraordinaria. Ya se ha visto que en las aplicaciones se halla constantemente en juego, por lo menos, la parte elemental, y es, además, una excelente preparación para el estudio de la Topografía y de otros muchos conocimientos prácticos. Su valor educativo es grande, porque se presta muy bien, mejor quizá que ninguna otra rama de las Matemáticas, á que el alumno pueda realizar trabajos personales y se ejercite en discurrir por su propia cuenta en cuestiones geométricas.

En casi todos los programas de las escuelas de Ingenieros figuran las superficies alabeadas en forma muy parecida á la del tratado ya centenario de Leroy. Como estudio geométrico es rudimentario y semiempírico, pues todo queda reducido á examinar en un corto número de casos particulares, siempre los mismos, la determinación de las generatrices y del plano tangente en uno de sus puntos. En la investigación y demostración de las propiedades de estas superficies y de las desarrollables, mucho más se adelanta en las breves nociones que se estudian generalmente por los métodos analíticos como aplicación del cálculo diferencial.

Esto indica claramente que el objeto de ese estudio es disponer al alumno para algún problema práctico, y fácil es adivinar que no puede ser otro que el estudio de la estereotomía de las bóvedas de intradós alabeado y de los puentes oblicuos.

Así se explica que aquel estudio se limite á la determinación de las generatrices y del plano tangente en un punto de la superficie para poder trazar la normal. Pero hoy día se pueden y se deben evitar construcciones tan costosas como las bóvedas de sillera de intradós alabeado y los cañones oblicuos, y para reemplazarlas con ventaja dispone el Ingeniero de las estructuras metálicas, del hormigón en masa con ó sin articulaciones, y sobre todo del hormigón armado.

El estudio de las superficies alabeadas en la forma acostumbrada obedece, por consiguiente, á necesidades que ya pasaron á la historia, y parece que tiene algo de anacrónico.

La Geometría descriptiva debe, á mi juicio, estudiarse, sobre todo, prácticamente, aplicándola á la representación de los objetos propios de la ingeniería que más tarde ha de tener que proyectar el alumno, ya en sus estudios ulteriores, ya en el ejercicio de la profesión.

Procede estudiar ahora, en esta tercera y última parte de la conferencia, cómo se deben estudiar las partes de las Matemáticas que acabo de enumerar.

Comprende esta parte los métodos de estudio y de enseñanza y la organización general de los estudios. Habré forzosamente de limitarme á algunas brevisimas indicaciones de carácter general.

Los métodos más usados entre nosotros se pueden reducir al estudio en libros de texto y al de explicaciones del Profesor. Ambos son, cuando se extreman, viciosos é ineficaces.

El estudio en libros de texto es muy peligroso, porque fácilmente cae el alumno en el gravísimo defecto de estudiar de memoria. Aunque no lo estudie todo así, la tentación es grande en los pasajes difíciles de entender, porque al pronto le economiza trabajo, y una vez iniciado este vicio, rueda inevitablemente por la pendiente; adquirido este hábito funesto y roto el hilo de la serie de razonamientos, ya no puede hacer otra cosa que aprender de memoria símbolos que no entiende, y llegado este caso, puede afirmarse que ha claudicado definitivamente; tiene que volver á empezar desarraigando el vicio contraído. Este método suena á herejía ante la Pedagogía moderna. Y está muy generalizado desgraciadamente entre nosotros, no sólo en las matemáticas sino en toda clase de estudios. Lo prueba la frase tan común y vulgar de «dar y tomar la lección» en la cual están trocados los papeles del maestro y del discípulo. En ella se significa que da la lección el discípulo y el maestro es quien la toma; lo contrario, precisamente, de lo que debe suceder con un método racional de enseñanza, porque al maestro corresponde dar la lección y al discípulo recibirla ó tomarla.

Para que el método de explicación dé buen resultado, se requieren varias condiciones; los alumnos deben estar muy bien preparados y hay que asegurarse de que poseen una gran aplicación y deseo de aprender y aprovechar. Además, las conferencias ó explicaciones no deben ser demasiado frecuentes, porque hay que dejar tiempo á los alumnos para que estudien y se ejerciten en hacer aplicaciones de lo que se les ha explicado. Yo creo que nadie puede aprender bien oyendo dos ó tres conferencias diarias sobre materias nuevas. Ni el alumno mejor dispuesto y de aplicación más perseverante llegará á adquirir así conocimientos sólidos y el hábito de discurrir é investigar, sino á lo sumo, una erudición vana y estéril. Y en los que no reúnan esas condiciones, el fracaso será completo.

A los ejercicios prácticos y problemas de aplicación ha de asignarse un lugar preferente. En la enseñanza elemental me atrevo á afirmar que debe ser predominante.

Y en esta parte de la enseñanza matemática ha habido en España un abandono que también se refleja en el lenguaje. Ejemplos los llamaban frecuentemente los autores antiguos, y este nombre parece indicar que no estaba en la mente de los que lo empleaban la idea de prodigarlos, como se deben prodigar los ejercicios. No ejemplos en número muy limitado, sino ejercicios muy numerosos deben ser estos problemas de aplicación.

Los dos métodos de enseñanza que acabamos de examinar

tienen el defecto común de que la actitud del alumno, en su aplicación, es puramente pasiva, y, por consiguiente, no cumplen bien uno de los fines de la enseñanza, el de preparar al alumno para la investigación personal, que es el más importante.

Lo que parece más recomendable para conseguir este fin, conforme á los principios de la Pedagogía moderna, es el empleo combinado del método eurístico con el método de laboratorio.

El método eurístico, que consiste en guiar al alumno para que vaya descubriendo por sí mismo las verdades que se le quieren demostrar, se presta mejor que ningún otro á conseguir ese fin tan importante de la enseñanza, y es el que más conviene para comunicar al alumno nociones nuevas, á lo menos en la enseñanza elemental.

El método de laboratorio, que no es sino la ejecución de ejercicios bien organizada, graduando sus dificultades y eligiéndolos con sano criterio, completará la obra.

El método de laboratorio tiende á generalizarse en todos los ramos de la enseñanza, y, sobre todo, en la científica y en la técnica.

Pronto se vió que era de absoluta necesidad en el estudio de la Química, que es imposible aprender en libros y conferencias sin el estudio de la práctica.

Lo mismo puede decirse de la Física y de la Mecánica, sobre todo de las diversas ramas de la Mecánica aplicada, cuyo estudio, para ser completo, requiere imprescindiblemente la ejecución de experimentos y el trabajo de laboratorio.

Poincaré hace observar la incapacidad de los alumnos de la segunda enseñanza para aplicar al mundo real las nociones de Mecánica que han estudiado. Cuando hacen ejercicios de aplicación parece que sustituyen mentalmente la definición de la fuerza, que por otra parte saben recitar perfectamente, por esta otra:

«Las fuerzas son unas flechitas con las cuales se forman paralelogramos».

Es el resultado natural del estudio puramente abstracto, independiente de la experimentación.

El que estudia así la Estática gráfica, por ejemplo, sólo en los libros ó mediante aplicaciones y ejecutando las construcciones geométricas, no puede tener una idea cabal de su objeto ni de su valor en la resolución de los problemas prácticos á que se destina. El que ha visto las fuerzas en acción; observando y midiendo las tensiones y compresiones de las diversas fuerzas en las pruebas de puentes metálicos, y ha comparado los hechos observados con las previsiones teóricas que se deducen de aquellas construcciones geométricas, posee un conocimiento mucho más perfecto y mucho más aproximado á la realidad.

Y no puede menos de ser así, porque todo problema de aplicación consta de tres partes:

1.^a El paso de lo concreto á lo abstracto, que es la sustitución del objeto real por un esquema abstracto que lo representa, y al cual se aplican los procedimientos matemáticos.

2.^a La resolución del problema matemático aplicada á ese ser abstracto.

3.^a El regreso de lo abstracto á lo concreto, que consiste en la comprobación y discusión de los resultados en el objeto real, estudio esencialmente experimental, por consiguiente.

El que se limite á estudiar en los libros y en el papel, sólo fija su atención en la segunda parte del problema, y se hallará muy expuesto á cometer graves y trascendentales errores, sobre todo en la resolución de la primera parte, cuando proyecte disposiciones nuevas y siempre que no se concrete á usar estructuras ó disposiciones muy conocidas, utilizando así la experiencia ajena.

El método de laboratorio, indispensable en el estudio de la Química, de la Física y de las diversas ramas de la Mecánica, se aplica también con excelentes resultados á la Matemática pura.

Y nada tiene esto de extraño, pues se ha llegado á aplicar también á las ciencias filosóficas, económicas y sociales, y parece predestinado para llegar á ser el método predominante en el siglo XX en toda clase de estudios.

En lo tocante á la organización de estos estudios, yo abrigo la convicción de que la mejor solución consiste en una escuela preparatoria común para todos los Ingenieros de los diversos ramos. El 12 de Julio de 1892, en que se suprimió la Escuela general preparatoria de Ingenieros y Arquitectos, fué un día de luto para la enseñanza científica y técnica en España. Aquella Escuela tenía indudablemente una organización defectuosa; pero no era eso motivo para suprimirla, sino para reorganizarla corrigiendo los defectos.

Para crearla se invocaron razones de economía, y luego se suprimió para obtener nuevas economías. Aparte de esa chocante contradicción, los mezquinos motivos de una economía tan pequeña que no se supo valuar ni conocer ciertamente su existencia ni al crearla ni al suprimirla, están ahí fuera de su lugar. Es un proceder semejante al de un agricultor que, teniendo bien preparado un campo que promete pingüe cosecha, tratara de economizar algunas pesetas en la cantidad y calidad de la semilla.

No he de extenderme en tratar de probar teóricamente la bondad de esta solución. Por encima de todas las razones que pudiera aducir está la experiencia repetida ya por tres veces, y no he de aconsejar que se repita una vez más.

En 1836, cuando se reorganizó la Escuela de Ingenieros de Caminos y se publicó el primer reglamento del Cuerpo, se decretó la creación de un Colegio científico preparatorio para las Escuelas de Arquitectura, de Minas y de Caminos, únicas escuelas técnicas que existían entonces. Este Colegio no se llegó á organizar.

En 1848 se creó una preparatoria para esas mismas escuelas; fué suprimida en 1855.

Se creó nuevamente en 1886 la Escuela general preparatoria de Ingenieros y Arquitectos, y fué suprimida en 1892.

¿Cuáles fueron las causas del fracaso de una institución que tan brillantes resultados produjo en Francia y en algunas otras naciones?

Conviene decirlo claramente, la causa principal fué la rivalidad y los celos de los diversos Cuerpos de Ingenieros. A tal extremo llegó el mal, que el Gobierno se vió en la necesidad de nombrar Director, con el título de Delegado regio, á un médico político ilustre, sí, pero completamente ajeno á los estudios del establecimiento docente que regía.

Nuestro ilustre consocio Sr. Torres Quevedo ha insinuado la idea de crear una Escuela de ampliación científica común para todos los Cuerpos de Ingenieros. Muy de temer es que si se intentara llevarla á la práctica, aquellos celos y emulaciones resurgieran con mayor pujanza en razón precisamente de la mayor importancia de esta escuela comparada con las fenecidas preparatorias.

Por mi parte, creo que la obra más urgente es la de reforzar ó, mejor dicho, de reconstruir los cimientos del edificio de nuestra enseñanza científico-técnica, acudiendo á mejorar la enseñanza elemental, porque cuando la enseñanza elemental es defectuosa, no se libra nadie del naufragio.

Estamos presenciando un movimiento consolador, desusado y sin precedentes en nuestro país. La Sociedad Matemática española por una parte, y el Instituto de Ingenieros civiles por otra,

han pensado simultáneamente, con entera independencia y sin previo acuerdo, en organizar conferencias, siendo el tema concreto de las del curso del Instituto, la enseñanza técnica. Se ha procurado una aproximación de ambas Sociedades para colaborar reunidas en los asuntos que interesan igualmente á ambas entidades. Ninguno hay que les pueda interesar tanto como la vulgarización de los estudios matemáticos y la mejora de la enseñanza elemental, y á ello debemos dedicar toda atención preferente. Aprovechemos esta ocasión. Imitemos á los ingleses y norteamericanos. Hace pocos años el nivel de los estudios matemáticos elementales, salvo en algunos centros muy reducidos, era muy bajo, tanto en Inglaterra como en la América del Norte, y su situación era parecida á la nuestra. La divulgación de los nuevos métodos de enseñanza ha mejorado extraordinariamente su situación en muy pocos años. El número de alumnos que estudian Matemáticas prácticas crece en Inglaterra con arreglo á la ley del interés compuesto, y en el año 1912 alcanzó la enorme cifra de 100.000.

Al recomendar que imitemos ese ejemplo, no quiero decir que debemos copiar servilmente sus procedimientos, incurriendo nuevamente en un error tantas veces repetido. Debemos estudiar á fondo esos métodos para tomar de ellos lo más conveniente, adoptándolos á nuestra situación y á las condiciones de nuestros alumnos y profesores. Mi objeto se limita á hacer un llamamiento á ambas, la Sociedad Matemática Española y el Instituto de Ingenieros civiles, igualmente interesados en este asunto, para que, puestos de acuerdo, estudien las necesidades de nuestra enseñanza elemental y provean los medios de conseguir que se lleven á la práctica las reformas necesarias.

Si logramos establecer una enseñanza elemental sólida, bien entendida y adecuada á nuestras necesidades, habremos conseguido sentar sólidamente las bases indispensablemente necesarias para elevar el nivel de los estudios matemáticos y técnicos en nuestro país, y los resultados no se harán esperar mucho tiempo.»

Las carreteras del porvenir.

En el concurso abierto recientemente por el Instituto de Ingenieros Civiles y para el tema «Las carreteras del porvenir», fijado por la Asociación de Caminos, Canales y Puertos, ha sido premiada la Memoria presentada por el distinguido Ingeniero don Federico Moreno Pineda, afecto á la Jefatura de Obras públicas de Gerona.

Según tenemos entendido, el Instituto está preparando la publicación de dicha Memoria, lo que permitirá sea en breve plazo conocida de la mayor parte de nuestros lectores; pero como el asunto que forma su objeto es de tan reconocida actualidad y de tan gran interés, y está desarrollado con un perfecto conocimiento de las nuevas condiciones que á las carreteras impone la creciente circulación automovilista, y como en ella se ofrece solución á los múltiples problemas que en el mundo entero suscita el empleo del automóvil, tanto de turismo y lujo, como de servicio público de pasajeros y carga, creemos útil adelantarnos á aquella publicación con un extracto de las principales consideraciones expuestas en la Memoria premiada.

Empieza el autor haciendo constar las variaciones que en el concepto público ha tenido la importancia concedida á las carreteras, cómo hubo una época, todavía no muy lejana, en que se consideró la carretera poco menos que inútil, al comparar su