

# REVISTA DE OBRAS PÚBLICAS

PUBLICACION TECNICA DEL CUERPO DE INGENIEROS DE CAMINOS, CANALES Y PUERTOS

DIRECTOR

D. MANUEL MALUQUER Y SALVADOR

COLABORADORES

LOS INGENIEROS DE CAMINOS, CANALES Y PUERTOS

SE PUBLICA LOS JUEVES

Dirección y Administración: Plaza de Oriente, 6, primero derecha.

## LAS ESTRUCTURAS DE ELEMENTOS TRAPECIALES

### EXTRACTO,

leído en el Congreso de la Asociación española  
para el progreso de las Ciencias, de un extenso trabajo (\*)

PRESENTADO POR

JUAN MANUEL DE ZAFRA,

Ingeniero de Caminos, Profesor de «Puertos» y de «Hormigón armado»  
en la Escuela especial de Caminos.

Durante largo tiempo ha sido el triángulo forma única de la célula elemental de casi todas las estructuras ingenieriles. Un conjunto de piezas rectas, unidas por articulaciones, formando mallas triangulares, simples ó complejas, ha sido y es aún para algunos el ideal constructivo. Ideal utópico, pues sólo con piezas sin peso individual, con articulaciones sin rozamiento alguno y con sobrecargas exclusivamente concentradas en los nudos, se realiza el desideratum de reducir el trabajo elástico al de simples tracciones y compresiones.

En la realidad las piezas tienen peso nada despreciable; las uniones ofrecen resistencia bastante grande, aun siendo, como en América, articuladas; grandísima cuando, como en Europa, son enlaces remachados; las sobrecargas actúan en y fuera de los nudos. A las formas simples de trabajo se agrega en todas las piezas del sistema la de flexión, el mal llamado trabajo secundario, á veces de importancia más decisiva que el por comodidad considerado como principal y aun para algunos único.

El rápido desenvolvimiento del hormigón armado ha hecho surgir nuevas formas constructivas, racional y prácticamente derivadas de su cualidad característica, el monolitismo. El nudo de enlace resulta con este material precisamente el inverso de una articulación; á menos de quererlo hacer mal ó de adoptar disposiciones especiales, forzosamente es, por necesidades prácticas de unión de armaduras y de moldeo del hormigón, más robusto, en general, que el resto.

Los buenos constructores, los que consideran desatinado copiar con hormigón armado las construcciones metálicas ó las de madera con sus características cruces de San Andrés, los enemigos del rutinarismo y del cálculo por fórmulas-recetas, y á la cabeza de todos, los Ingenieros alemanes, vienen estudiando con ahínco en lo que va de siglo la Mecánica de las nuevas estructu-

ras nacidas del nuevo material. Son éstas, puede decirse en general, esencialmente hiperestáticas, con indeterminación de orden á veces elevadísimo y calculables tan sólo mediante el estudio de las deformaciones ó del trabajo elásticos.

Base fundamental es la verdad ya indiscutida y hasta la saciedad confirmada, de que el hormigón armado pasa, como todos los materiales metálicos, de un primitivo estado de imperfecta elasticidad y mediante un proceso de adaptación molecular á las cargas sucesivas, á un estado final perfectamente elástico.

Justo es reconocer que no sólo al hormigón armado se debe la evolución de la Mecánica moderna; el estudio del llamado trabajo secundario en las construcciones metálicas ha coadyuvado también á su desarrollo y á la adopción de formas no trianguladas.

Lo que pudiéramos llamar tejido celular típico de las nuevas formas constructivas se reduce, como muestra la figura 1.<sup>a</sup>, á

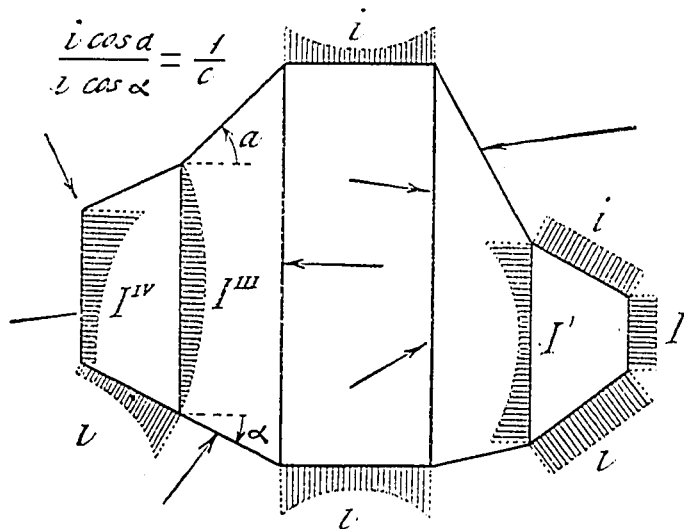


Fig. 1.<sup>a</sup>

una serie de elementos trapeziales, compuestos por montantes ó pilares paralelos y por dos cabezas que forman cada una sola pieza continua, recta ó quebrada.

Hasta ahora, que sepamos, nadie ha logrado calcular un sistema trapezoidal sino en casos particulares y mediante numerosas hipótesis simplificadoras, muchas de ellas en completo desacuerdo con la realidad.

Permitásenos la inmodestia de afirmar que hemos llegado á resolver el problema con toda la generalidad y exactitud apetecibles, y que la solución es no una lucubración imposible ó difi-

(\*) Parte del segundo tomo de la obra *Construcciones de hormigón armado* que con el título «Cálculo de estructuras» prepara su autor.—*N. de la R.*

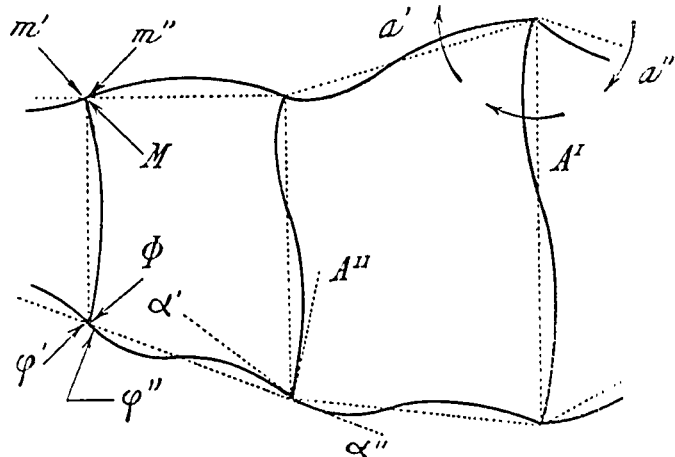
cilísima de llevar á la práctica, sino perfectamente factible, en una palabra, una solución ingenieril.

Véase en qué términos planteamos el problema. Los pilares, todos paralelos, de longitudes y separaciones diversas, pueden estar empotrados por continuidad elástica, ó simplemente articulados todos, ó alguno, ó en alguno solo de sus extremos, en las cabezas. Sus momentos de inercia,  $I$ , pueden ser, en unos constantes, en otros variables, según una ley geométrica, en la práctica parabólica de segundo ó tercer grado. Estas leyes, distintas en cada pilar, son simétricas si los dos extremos están enlazados del mismo modo, ó asimétricas si un extremo está empotrado y otro articulado. Las áreas rayadas representan dichas leyes.

Las cabezas ofrecen inclinaciones diversas, momentos de inercia,  $i$ ,  $\iota$ , variables en ley y en valor de un elemento á otro.

Una sola condición necesitamos imponernos: la constancia de la relación de las proyecciones  $i \cos \alpha$ ,  $\iota \cos \alpha$ , sobre la dirección de los pilares, de los momentos de inercia correspondientes en líneas paralelas á aquéllos. Por lo demás, esa relación, constante para todo el sistema, puede tener cualquier valor, nulo, finito, infinito; y nuestro postulado, lejos de estar en desacuerdo, puede decirse que está lógicamente impuesto por la distribución del trabajo elástico real y por las conveniencias constructivas.

Las causas exteriores que actúan sobre el sistema, acciones y reacciones que necesariamente han de resultar en equilibrio, pueden ser cualesquiera, fuerzas y pares, concentradas ó repartidas aquellas en los nudos y en cualquier parte de los pilares y cabezas. Pueden ser también variaciones de longitud por cambio de estado higrométrico ó térmico.

Fig. 2.<sup>a</sup>

La deformación de las células trapeciales obedece á la condición intrínseca al sistema, de ser iguales los ángulos descritos por los elementos inmediata y elásticamente enlazados en cada nudo. Así, las rotaciones  $a'$ ,  $a''$ , de las tangentes á los extremos derecho é izquierdo de dos partes sucesivas de una cabeza, son iguales entre sí y lo son también á la rotación  $A'$  del extremo del pilar (fig. 2.<sup>a</sup>).

Dichas rotaciones son expresables en función de las dimensiones elásticas y geométricas y leyes de distribución de las mismas en cada parte, datos concretos del problema, y de las flexiones, esfuerzos normales y tangenciales que los elementos extremos de esas partes soportan, todas ellas incógnitas.

El equilibrio del nudo exige, estáticamente, el de dichas flexiones y esfuerzos con las causas exteriores que allí actúan.

De tener en cuenta todas esas causas inmediatas de deformación, el cálculo resulta, como la inmensa mayoría de los de Mecánica elástica, perfectamente planteable, pero de una complicación espantosa é imposible de ser llevado á la práctica. No bastaría tener en cuenta las variaciones de orientación de los nudos;

habría que hacer cosa análoga con sus coordenadas. Pero se sabe, de un modo cierto, racional y experimental, que la influencia de los esfuerzos normales y tangenciales en la producción de las deformaciones y desarrollo del trabajo elástico es insignificante (salvo en casos muy especiales) comparada con la influencia de las flexiones. El error cometido al prescindir de aquellos esfuerzos y tener sólo en cuenta las deformaciones por flexión es de menor orden que el implicado por las bases generales de la Mecánica en su estado actual de adelanto.

Las incógnitas quedan así reducidas á las flexiones marcadas en la figura,  $m'$ ,  $m''$ ,  $M$ ;  $\varphi'$ ,  $\varphi''$ ,  $\Phi$ ; seis por cada pilar, salvo los extremos, en que se reducen á cuatro. Las ecuaciones de rotación elástica, mas las de equilibrio estático de cada nudo, suman igual número.

La primera consecuencia de las igualdades de rotaciones  $a' = a''$ ,  $\alpha' = \alpha''$ , es que, con entera independencia de las flexiones de pilares  $M$ ,  $\Phi$ , hay entre cada cuatro momentos extremos correspondientes á dos tramos consecutivos y ciertas funciones de las sobrecargas en ellos actuantes, una ecuación característica. Es la que, cuando el pilar intermedio se articula en lugar de empotrarse, degenera en la conocidísima de los tres momentos.

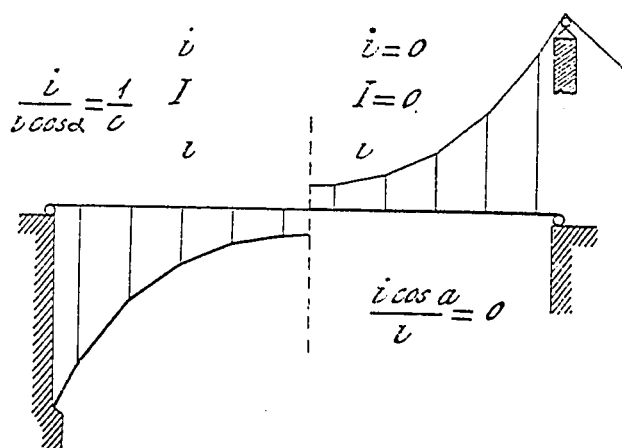
Es fácil expresar, directa y separadamente, cada una de las flexiones en las cabezas  $m$ ,  $\varphi$ , en función de las causas exteriores y de los momentos  $M$ ,  $\Phi$ , de todos los pilares, á partir de un extremo del conjunto, que son el lazo de unión de ambos sistemas de piezas, virtualmente independientes. Mediante esto se logra eliminar las 4  $n$  incógnitas  $m$ ,  $\varphi$ , y establecer, de un modo sencillo y directo:

1.º Los valores de las flexiones  $M$ ,  $\Phi$ , en los pilares primero y último, cada uno en función de las causas exteriores.

2.º Los valores de cualquier momento  $m$ ,  $\varphi$ , en función cada uno de dichas causas y de todos los  $M$ ,  $\Phi$ , de los pilares precedentes y por tanto ya calculados.

El problema, de pavorosa complicación en un principio, resolver un sistema de  $6n + 2$  ecuaciones, irrealizable, puede decirse, á poco que valga  $n$ , se reduce á la resolución sucesiva de  $n + 1$  sistemas binarios independientes.

Conocidas las flexiones de pilares, todas las demás resultan directamente determinadas y con ellas se calculan facilísimamente las reacciones hiperestáticas en cada nudo y el estado elástico, definido por la flexión, esfuerzo normal y tangencial, en cada punto del sistema.

Fig. 3.<sup>a</sup>

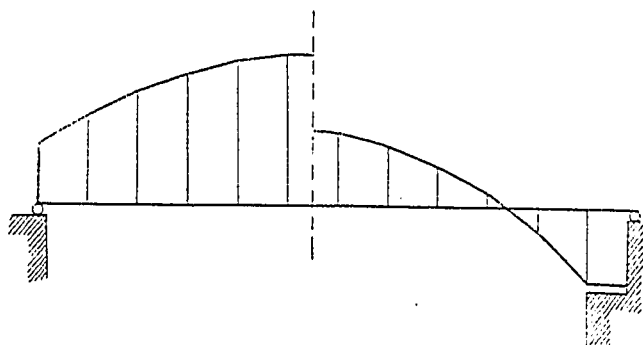
La forma que hemos planteado y resuelto en toda su generalidad abarca la mayoría de las estructuras usuales, variantes ó degeneraciones del sistema típico. Véanse las principales.

Figura 3.<sup>a</sup>—Puente de arco, con tímpano de simples mon-

tantes; los tres momentos de inercia y la relación  $\frac{1}{c}$  tienen valores finitos.

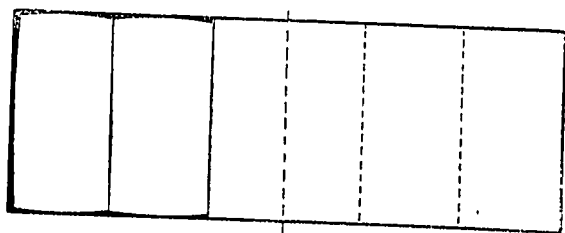
Puente colgado moderno, con viga de rigidez; son nulos  $i$ ,  $I$ ,  $\frac{1}{c}$ ;  $i$ , momento de inercia de la viga, es constante ó variable.

Figura 4.<sup>a</sup>—Puente de arcadas ó Vierendeel, cuyas cabezas pueden ser rectas paralelas ó una recta y otra poligonal.

Fig. 4.<sup>a</sup>

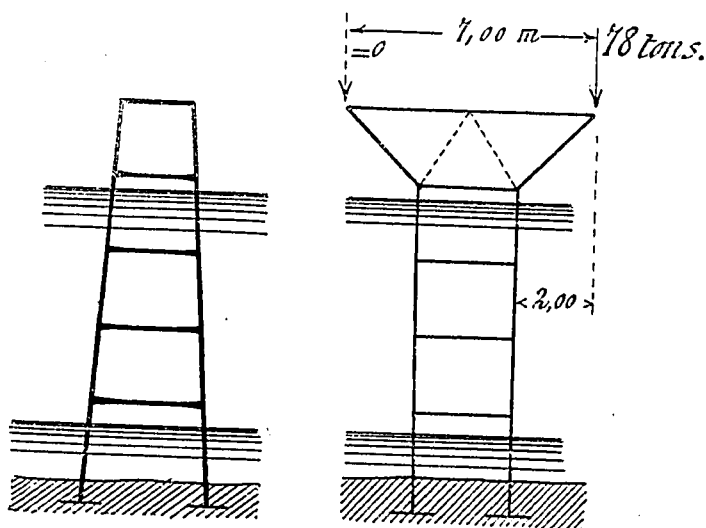
Puente mixto, de arco atirantado por el piso.

Figura 5.<sup>a</sup>—Cajones flotantes para construcción de diques. Los mamparos pueden ser tales, empotrados y corridos, tipo de Barcelona; ó ser substituidos por grupos de riostras con simple

Fig. 5.<sup>a</sup>

apoyo ó con empotramiento en los costados. Los depósitos, silos y varias construcciones análogas entran dentro de esta forma de generada.

Figura 6.<sup>a</sup>—Pilas de puente ó viaducto, de forma ordinaria

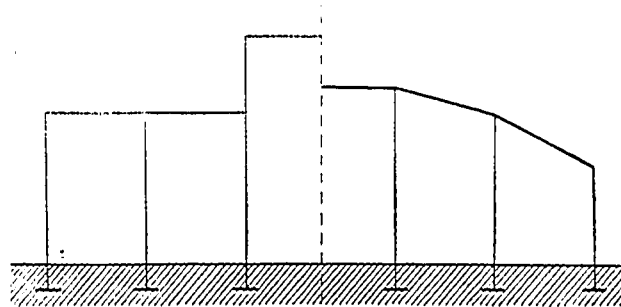
Fig. 6.<sup>a</sup>

ó con la forma especial que para un puente en el Guadiana hemos proyectado y que permite reducir considerablemente las luces de los tramos que soporta. Esta disposición ha sido aprobada

oficialmente, aunque imponiéndonos rendir tributo á las viejas tradiciones introduciendo la triangulación marcada con puntos. Este aditamento, cuyo trabajo será mucho más moral que elástico, tan sólo alivia de la flexión por peso propio á la pieza superior, siempre tensa aun en el caso extremo de faltar uno de los tramos y cargar excéntricamente en cada cercha 78 toneladas.

Todas estas estructuras son completas, es decir, conservan las dos cabezas, aunque una de ellas pueda (puente colgado), sin perder la sección necesaria, carecer en absoluto de rigidez ó momento de inercia.

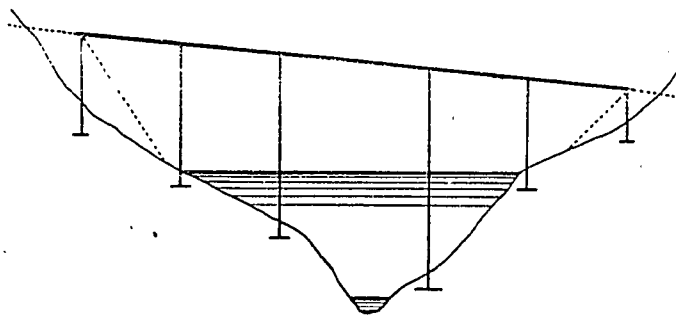
Figura 7.<sup>a</sup>—Una cabeza se hace infinitamente rígida, desaparecen las flexiones  $\phi$  y los pilares se empotran ó se articulan sobre el terreno. Llegamos á los entramados de edificios industriales, pórticos simples ó múltiples, con cubiertas planas, escalonadas ó poligonales.



$$L = \infty$$

Fig. 7.<sup>a</sup>

Figura 8.<sup>a</sup>—A ese mismo tipo corresponde el puente ó viaducto, en horizontal ó en rasante quebrada, continuo sobre empotramientos en general elásticos. Nuestro estudio arranca precisamente de haber construido hace años varios viaductos de tal tipo, algunos hasta de 23 tramos seguidos, de 9 metros de luz sobre pilares hasta de 14 de altura, para ferrocarril minero, con locomotoras muy pesadas (\*). Desde entonces ha sido nuestra obsesión lograr el cálculo exacto y minucioso de tal sistema, lo que desarrollamos con todo detalle en nuestro trabajo, abarcando



$$L = \infty$$

Fig. 8.<sup>a</sup>

do toda clase de acciones en vigas y pilares, variaciones de longitud, asentos de los cimientos, etc., con todas las formas posibles (fig. 9.<sup>a</sup>) de variación de momentos de inercia, de empotramientos absolutos  $e$ , articulaciones  $a$ , en la viga, ó empotramientos elásticos  $e$  de la misma, con pilares empotrados  $e$ ,  $e$ , ó articulados  $a$ ,  $a$ .

Los asentos sistemáticos, es decir, los producidos en cada nudo por la deformabilidad propia del pilar ó de su cimiento,

(\*) Embarcaderos de Cala, en Sevilla. (REVISTA DE OBRAS PÚBLICAS, 24 de Agosto de 1905.)

proporcionalmente á la reacción que en cada caso de sobrecarga tiene que desarrollar, dan á este tipo un carácter de absoluta generalidad interesantísimo. Demostramos la existencia de un teorema que podemos llamar de los ocho momentos consecutivos, ligados por dos ecuaciones, cada una de las cuales comprende

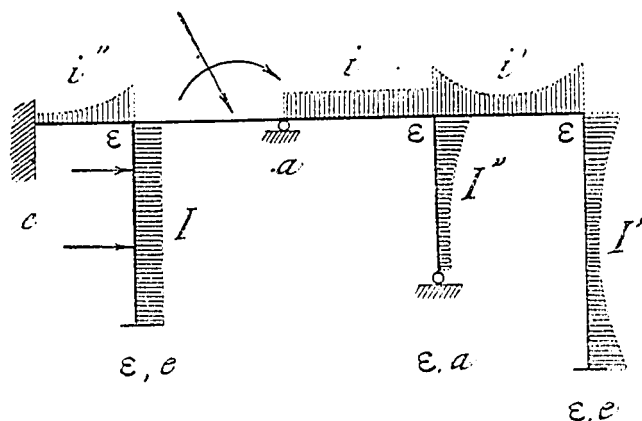


Fig. 9.ª

seis (fig. 10) en las secciones marcadas. Es el caso del puente sobre pilares elásticos flotantes, del que constituye una sencilla degeneración el problema de la vía férrea, cuando los pilares desaparecen y la viga se apoya simplemente sobre las traviesas. Estas *flotan*, puede decirse, en el balastó, que actúa como un líquido virtual de enormísima densidad (3.000 á 8.000). Las dos ecuaciones de los ocho momentos se reducen entonces á una sola que liga cinco flexiones sucesivas sobre los apoyos, con funciones de las sobrecargas actuantes en alguno ó en los dos tramos centrales.

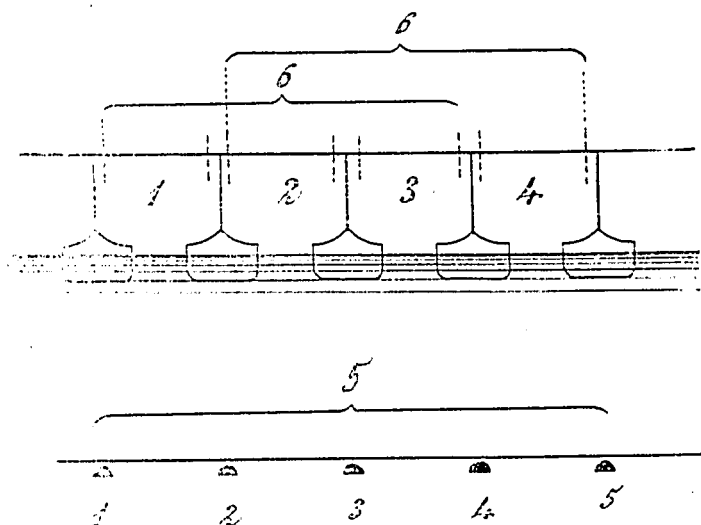


Fig. 10.

Aun en casos tan complicados como éste llegamos á deducir las líneas de influencia de las flexiones, esfuerzos tangenciales, reacciones y deformaciones, relativas á las cargas móviles. Todas estas líneas, ordinariamente consideradas de tercer grado, en la supuesta constancia del momento de inercia, son de quinto ó sexto, cuando este elemento varía según parábolas de segundo ó tercer grado, respectivamente.

En este largo estudio aprovechamos una porción de elementos de soluciones parciales de los numerosos problemas de detalle que involucra, debidos á diversos Profesores é Ingenieros alemanes, suizos y daneses (\*). Pero reivindicamos como propia, no sólo

(\*) *Summ cuique*. Después de impresos nuestros artículos «Los métodos de cálculo de estructuras derivados del trabajo elástico», (REVISTA DE OBRAS PÚBLICAS de Noviembre y Diciembre 1912, Enero 1913), dedicados á divulgar la obra y enaltecer la Memoria de Alberto Castigliano, encontramos en el Bo-

la solución general y amplísima del problema de las estructuras trapeciales, sino también la solución completa, á la vez amplia, rigurosa é ingenieril, del viaducto elásticamente sustentado, del que hasta hoy sólo existen soluciones llenas de hipótesis restrictivas y sumamente incompletas, en particular respecto á las acciones horizontales y á los cambios de estado higrométrico y térmico.

## REPRESENTACIÓN GRÁFICA

### PARA FIJAR LA CAPACIDAD DE UN EMBALSE REGULADOR DEL RÉGIMEN DE UN RÍO

En un estudio de aprovechamiento de un lago en Noruega, para formar, mediante su cierre en el punto de partida del emisario, un embalse que regularizase el régimen de este río, tuve ocasión de ver empleada una representación gráfica que, usada más tarde por mí, me ha demostrado prácticamente la gran comodidad que ofrece para resolver todos los problemas y tantear todas las soluciones que con aquella cuestión se relacionan, dando cuenta rápida y exacta de la influencia de los diversos factores que en ella intervienen. Por ejemplo: determinar hasta qué grado de regularización permite un pantano de capacidad determinada; cuál ha de ser, viceversa, la capacidad de un embalse para conseguir una regularización fijada *a priori*, es decir, una máxima discrepancia entre el mínimo y el máximo caudal de un río; en qué época se producirán éstos; cuál es la mínima capacidad del embalse que permita la regularización absoluta del río á caudal constante, etc., etc.

El no haber visto, ni aun apuntada, la idea de este sistema de representación en ninguna de las obras que, usualmente, manejamos en España los Ingenieros, y la experiencia de la comodidad que ofrece para tratar estos problemas y otros similares, me induce á dar de aquél una idea en las columnas de nuestra revista.

Supongamos que en el elegido emplazamiento de la presa del pantano á proyectar, se hayan practicado aforos que permitan fijar, con la necesaria exactitud, el régimen del río durante un año. Tomemos dos ejes coordenados: el de abscisas para los tiempos, y el de ordenadas para los volúmenes de agua que, desde el origen escogido para los tiempos, pasan por la sección considerada. Así, dibujaremos una curva que representa, en este sistema convencional, el régimen variable del río.

De la definición de esta curva se deducen algunas de sus propiedades. Así, la diferencia entre las ordenadas correspondientes á dos instantes determinados, representa el volumen de agua que entre dichos dos instantes ha pasado por la sección transversal del río en el punto considerado. Las ordenadas de la curva serán siempre crecientes, ó, como caso límite, aquélla tendrá un segmento rectilíneo y paralelo al eje de los tiempos, si el caudal del

letín de la Sociedad de Ingenieros civiles de Paris (1888), cierta Memoria acerca de las deformaciones elásticas, titulada «Théorie nouvelle et applications», recibida por dicha Sociedad con gran aplauso. Aparecen en ella los teoremas de Maxwell y de Mohr y casi entera la teoría fundamental de Castigliano; jamás sus nombres. Pudiera creerse en una *reinvención*, pero por fin, en un apéndice, aparece el nombre de Castigliano, tan sólo para sentar que su teorema, el de las derivadas del trabajo elástico, es un mero corolario de la «Théorie nouvelle»... y para demostrarlo se estampan no menos que dos páginas llenas de integrales. Una de las demostraciones que, inspirándonos en la de Föppl, damos en los artículos citados, suma catorce líneas y sin embargo establece con absoluta generalidad el trascendental teorema que, formulado en 1873, en 1888, quince años después, había de quedar en modestísimo corolario.....!