

REVISTA DE OBRAS PÚBLICAS

PUBLICACION TECNICA DEL CUERPO DE INGENIEROS DE CAMINOS, CANALES Y PUERTOS

DIRECTOR

D. MANUEL MALUQUER Y SALVADOR

COLABORADORES

LOS INGENIEROS DE CAMINOS, CANALES Y PUERTOS

SE PUBLICA LOS JUEVES

Dirección y Administración: Plaza de Oriente, 6, primero derecha.

PRINCIPIOS

de la moderna pedagogía matemática.

La crítica de los procedimientos clásicos empleados tradicionalmente en la enseñanza de las matemáticas ha conducido, en estos últimos años, á condenarlos con rara unanimidad, como inadecuados al fin principal á que se deben encaminar estos estudios.

En vez de limitarse, como hasta ahora, á proporcionar al alumno un caudal determinado de conocimientos, se aspira á un fin más amplio y más elevado: á que cada individuo se forje, por sí mismo, los instrumentos necesarios para la investigación personal, acometiendo la empresa en su origen, desde el momento mismo en que el niño comienza á escribir los números y á ejecutar las primeras operaciones de la Aritmética; y esto con el fin de que no adquiera vicios que luego es muy difícil desarraigar. Bien se ve que dentro de este objetivo está comprendido el de adquirir y conservar los conocimientos necesarios.

Laisant, en su precioso libro intitulado *La Mathématique, Philosophie-Enseignement*, que deberían leer y consultar con frecuencia todos los profesores de matemáticas, refiriéndose á la enseñanza elemental en Francia, condensa en una frase gráfica y feliz el defecto fundamental de que adolecé, defecto que es común á esta clase de enseñanza en todos los tiempos y en todos los países, y el más directamente opuesto al fin que debe asignársele, de preparar al alumno para la investigación personal. *Tout attendre de la mémoire et presque rien de l'intelligence*. Esperarlo todo de la memoria y casi nada del entendimiento.

Muchos pedagogos modernos, entre ellos el eminente Poincaré, se han valido de un símil muy oportuno para explicar el verdadero objeto de la enseñanza matemática.

El que lee un texto de matemáticas ú oye una explicación y entiende lo que oye ó lo que lee, se asemeja á un espectador de una partida de ajedrez que conoce la marcha de las piezas, observa que los movimientos se realizan conforme á las reglas y que, finalmente, gana uno de los jugadores. El espectador habrá dado un paso muy importante cuando llegue á ver por qué se prefiere una jugada á otra posible, y la analogía con el estudio de las matemáticas es obvia. Mas para disfrutar plenamente del placer del juego, es indispensable que el espectador se convierta en jugador. Observar el juego de otros y analizar los motivos de sus jugadas es preparación imprescindible, pero no basta para apren-

der á jugar bien. Es preciso practicar el juego desde el momento en que se conoce la marcha de las piezas, y este ejercicio es el que provoca la necesidad de estudiar la teoría. Sería tarea desesperante la de pretender enseñar á jugar bien al ajedrez obligando al discípulo á que se limitase á observar el juego ajeno, sin permitirle jugar nunca.

Los textos y las enseñanzas del profesor deben concretarse á guiar al discípulo en su trabajo. La aspiración constante debe ser el trabajo original, y siempre que el estudiante saca consecuencias por sí mismo, hace realmente una obra original. Sin una labor de este género, el estudio de las cuestiones matemáticas es casi inútil para la cultura. En este trabajo se requiere ante todo la corrección y la certeza, y nunca se debe apremiar al alumno, porque lo que se pretende es que lo ejecute bien y no que lo haga pronto.

Algunos alumnos tratan de eludir esta parte del trabajo, que es precisamente la que más les beneficia, aprendiendo de memoria los resultados de la labor ajena. Esta tentación es grande en algunos alumnos, y quizás no hay materia más árida ni más repulsiva que las matemáticas estudiadas así. Diez páginas de matemáticas bien entendidas valen más que ciento aprendidas de memoria, y una página trabajada independientemente por el alumno vale más que diez entendidas con claridad, pero medianamente un trabajo puramente pasivo (1).

Las mismas ideas dominan en Francia y en Alemania, como tendremos ocasiones de ver en lo sucesivo. He aquí un párrafo de un documento oficial, relativo á la enseñanza matemática de las escuelas de segunda enseñanza en Alemania:

«La tarea más importante de la instrucción matemática consiste en el ejercicio mental que dispone al alumno para aplicar correctamente, en su trabajo personal é independiente, las intuiciones y los conocimientos que ha adquirido. En todos los dominios de esta disciplina, el objetivo debe consistir en alcanzar la inteligencia clara de los teoremas que han de ser desarrollados y de su deducción, así como la práctica y destreza en su aplicación.»

Métodos de enseñanza.

Los principales métodos empleados en la enseñanza de las matemáticas, prescindiendo de los métodos deductivo é inductivo, que todos conocen, pueden reducirse al *socrítico*, el *eurístico*, el de *recitación*, el de *explicación* y el moderno llamado *genético*.

(1) *The Teaching of Mathematics in the Elementary and the Secondary School*, J. W. A. Young, 1911.

co (1). Un buen profesor nunca emplea uno sólo con exclusión de todos los demás.

El método *socrático* consiste en dirigir al discípulo una serie de preguntas á las que éste contesta por simples afirmaciones ó negaciones, conduciéndole con habilidad á prestar su asentimiento á la verdad que se le quiere inculcar. En toda su pureza, es de difícil aplicación y se usa rara vez.

El método *eurístico* difiere del anterior en que las preguntas están dispuestas de tal modo que por ellas se provoca una serie de invenciones ó descubrimientos parciales del discípulo, que le conducen insensiblemente á la verdad que se le quiere demostrar. Ya se ve que este método se conforma muy bien con las ideas que se han expuesto respecto al fin de la enseñanza, y es, con justicia, muy recomendado.

Todo el que ha hecho algún trabajo de investigación personal sabe, por propia experiencia, cuánto más fácilmente se retienen y asimilan, y cuánto más sólidos son los conocimientos así adquiridos que los que proceden de estudios en los libros ó de explicaciones oídas, aunque estos estudios se hayan hecho bien.

Este procedimiento es muy usado: todos los buenos profesores se encaminan hacia él intuitivamente. En nuestra Escuela existen las clases de proyectos, que, siendo por su naturaleza de investigación personal, exigen necesariamente la aplicación del método eurístico. Si el profesor contestase categóricamente á las preguntas que le dirige el alumno, éste haría muchas veces el proyecto al dictado, desempeñando el papel de un mero delineante ó escribiente, en vez de ejercitarse en el de Ingeniero. El profesor debe limitarse á guiarle y orientarle, dejándole libertad en sus iniciativas, y proporcionándole los datos necesarios para que realice por sí mismo las investigaciones parciales que le sean necesarias, fingiendo, á veces, informaciones hipotéticas que luego explicará y razonará en la Memoria.

Muchas veces, cuando yo desempeñaba estas clases, me han dirigido los alumnos preguntas semejantes á estas: ¿Qué materiales adoptaré para este edificio? ¿Por cuál de las laderas de este valle quiere usted que lleve el trazado? A estas preguntas se debe contestar provocando una nueva investigación. La solución á la primera podría ser fijar la localidad en que se ha de ejecutar el proyecto, encargando al alumno que se informe respecto á los materiales usuales y sus precios. Al segundo se le podía responder que debía hacer un breve estudio comparativo para elegir con acierto la ladera; en una palabra, se le debe sugerir una dirección *practicable*, pero nunca darle una contestación categórica. Es conveniente convencer al alumno de que estas contestaciones evasivas no implican descortesía, ni propósito de imponerle un trabajo inútil, ni ignorancia por parte del profesor. Son simplemente la recta aplicación del método eurístico, tan justamente recomendado por los pedagogos modernos.

Es también muy común la aplicación de este método en las clases orales, y, en general, siempre que se establece un diálogo entre el profesor y el discípulo, tratando el primero de evitar que degeneren en el reprochable método de la recitación de memoria. Estos diálogos, bien dirigidos, interesan vivamente á toda la clase y no aprovechan sólo al interlocutor, como algunos creen. En mi opinión, para conseguir este resultado, debe oírse más frecuentemente la voz del profesor que la del alumno, pero evitando, sin embargo, caer, sin necesidad, en el extremo opuesto, que es el método de explicación. A éste habrá de acudir el profesor cuando crea conveniente comunicar alguna noticia nueva ó

dar algún desarrollo fuera del alcance de las facultades inventivas del alumno, aun guiado por el profesor.

Al tratar del método de *recitación*, dejo la palabra al profesor americano J. W. A. Young. Aunque creo que si hubiera escrito yo acerca de esto sin haber leído á este autor, hubiera expresado casi los mismos conceptos, prefiero citarlo textualmente para que mis opiniones vayan reforzadas con la autoridad de un pedagogo tan ilustre y experimentado:

«En el método de *recitación* (este autor le llama *modo de examen*, *examination mode*), el profesor señala alguna tarea al alumno, generalmente algún trozo de un libro de texto que aquél debe aprender (más ó menos de memoria) ó algunos problemas que debe resolver. El tiempo de la clase se invierte en un verdadero examen de los alumnos por el profesor, el cual averigua por medio de diversas pruebas si los alumnos han hecho ó no el trabajo señalado. En su forma cruda y sin atenuaciones, el profesor queda reducido á poco más que una máquina. No proporciona más ayuda, estímulo ó inspiración á sus alumnos que el reloj que advierte al obrero la hora del trabajo ó la balanza que pesa la obra que ha ejecutado. Es fácil imaginar una especie de fonógrafo que podría desempeñar igualmente bien la tarea de tal profesor, permaneciendo callado mientras se le pronunciasen las palabras textuales de un libro determinado y dijera: «¡Mal! El siguiente» en el momento en que el alumno tropezase. Es difícil pensar que se pueda decir algo en favor de este método, felizmente abandonado.»

Reidt (1) describe uno de estos casos como sigue:

«Se señalaba un teorema. Los alumnos debían recitarlo sucesivamente al pie de la letra conforme á un libro. A los que lo conseguían, se les señalaba el teorema siguiente para que lo aprendiesen en el libro. Los que no sabían el primer teorema continuaban estudiándolo. Así, al poco tiempo, cada alumno estudiaba un teorema distinto. Los ejercicios se ordenaban del modo siguiente: Al entrar en clase, el maestro hacía una señal al primer alumno para que dijera su teorema, luego al segundo y así sucesivamente. Por medio de una señal convenida, á los alumnos que habían sabido su teorema se les señalaba el siguiente para la próxima lección, y por medio de otra señal recibían los demás la orden de repasar el suyo. El profesor se jactaba de que, por este procedimiento, daba su clase sin pronunciar una sola palabra.»

Dice Young que no cree que pueda encontrarse en ninguna parte un caso llevado á este extremo, pero es muy cierto que aun se conservan métodos que exigen un empleo abusivo de la memoria.

Estos profesores me recuerdan el caso de algunas madres que toman á sus hijos las lecciones de latín ó de psicología. En punto á severidad, suelen ser tan inexorables como el fonógrafo del Dr. Young, y dejan muy atrás á los profesores de *peor reputación* de nuestras escuelas especiales. Por fortuna para las Matemáticas, los sen α , cos φ , cotang θ y otros símbolos aun más complicados hacen muy difícil, si no del todo imposible, este método casero de enseñanza.

Existe un método de *recitación* atenuado, en el cual se sigue un texto que los alumnos aprenden, no ya de memoria, sino de *concepto*. Este método no deja de presentar en gran parte los inconvenientes del anterior, y es muy fácil caer insensiblemente en aquél, aun contra la voluntad del profesor. No recita éste, pero es difícil que pueda evitar *siempre* que el alumno caiga en esta gravísima falta. Todos conocen el caso, muy repetido entre los principiantes, de alumnos que llevan, al parecer, de un modo

(1) Al método llamado en América «Método de laboratorio», que no es otra cosa que la Escuela pedagógica del profesor Perry, le dedicamos un capítulo especial.

(1) *Math. Unterricht*, pág. 29.

admirable la demostración de un teorema, y una cita de una página y un número que interrumpe inoportunamente el razonamiento, prueba que todo ello era una recitación literal. Aun cuando se estudie entendiendo bien, este método exige un abuso de la memoria, según el moderno concepto de la enseñanza.

Un alumno sobresaliente explica un teorema de Geometría, exponiendo con claridad la demostración, enunciando con precisión y en el orden debido todos sus corolarios, y hasta contesta acertadamente á las observaciones ú objeciones del profesor; en una palabra, se ha enterado perfectamente. Es muy cierto que, aun en este caso, ha hecho un uso de la memoria que no es necesario en la investigación personal, y que los partidarios de los modernos sistemas pedagógicos condenan muy lógicamente. Este alumno no ha pasado de espectador en el grado ínfimo de la partida de ajedrez que sirvió de comparación con los grados de aprovechamiento en los estudios matemáticos. Y esto es consecuencia del método, que es defectuoso.

¿Cómo se enseñará entonces la Geometría? He aquí la solución que dan los profesores modernos, de acuerdo con sus principios. Al empezar el estudio, los únicos trabajos que puede hacer el alumno y que tengan el carácter de investigación personal, son ejercicios ó problemas muy sencillos, en los cuales siempre hay algo de invención. Pero como le faltan materiales aun para eso, se le suministra un pequeño conjunto de verdades, que se le exponen en forma axiomática, con lenguaje claro y sencillo, y aun algunas con pruebas groseras, sin ninguna pretensión de rigor, como las de la Geometría experimental, de las que más adelante se citarán ejemplos. Con estos elementos puede adelantar bastante en la Geometría práctica, y de ello se verán las pruebas más adelante. Sólo entonces deberá empezar la Geometría demostrada, y este estudio lo deberá hacer también inventando sus demostraciones con la ayuda del profesor, que aplicará el método eurístico, y así se irá formando un cuerpo de doctrina creado por sí mismo y asimilado sin ningún esfuerzo de la memoria.

El estudio de las demostraciones en este sistema se hace como ejercicio del arte de demostrar, sin preocupación ninguna de que aquello se pueda olvidar. No se podrá estudiar así toda la Geometría, pero el provecho obtenido en orden al desarrollo de la inteligencia es incomparablemente mayor, y lo que se ha estudiado de este modo queda definitivamente adquirido por el alumno, mientras que empleando el método de *recitación*, aun atenuado y rectamente interpretado, lo aprendido se olvida en cuanto pasan los exámenes.

Ejercicios numerosos, variados, bien graduados y elegidos, al principio; más tarde, el estudio de las demostraciones, sin pretender estudiarlas todas, ni en su orden lógico riguroso, combinado esto con otros ejercicios de mayor dificultad. Tales son los trabajos de los alumnos en esta primera fase de sus estudios, trabajos que cumplen bien con la condición de ser investigaciones personales, y en los cuales interviene de un modo muy predominante la inteligencia, quedando la memoria relegada al lugar muy secundario que le corresponde.

El método de *explicación* es el que se emplea en las clases elevadas, y es el que conviene en las clases de adultos bien preparados, siempre que no se acumule un número excesivo de lecciones, porque, en tal caso, no se dejaría tiempo suficiente á los alumnos para el estudio y ejercicio de lo que se les va enseñando. Tratándose de la enseñanza elemental y con alumnos muy jóvenes, todos convienen en que no es recomendable este sistema. El Dr. Young no parece muy convencido de sus excelencias, aun en el caso de las clases adelantadas.

Mi experiencia me ha demostrado que este método es excelen-

te cuando se combina con los repases y preguntas frecuentes de lo ya explicado (me refiero á la clase de puentes, que corresponde al cuarto año de la Escuela). Los alumnos adquieren ideas más claras que cuando estudian en un texto, sobre todo si se trata de uno de esos textos voluminosos y en lengua extranjera, sistema que debe proscribirse en absoluto por muchas razones. Pero es preciso que las explicaciones no se sucedan con excesiva frecuencia por las razones ya indicadas, y porque, siendo tantas las lecciones que comprende un curso en nuestras escuelas, la aplicación continua de este sistema por todos los profesores del mismo año daría lugar á acumular una cantidad de materia tal, que inevitablemente produciría la indigestión intelectual de los alumnos, aun de los más capaces. Llevado á este extremo, considero este método casi tan funesto para la enseñanza como el señalamiento de un texto para aprenderlo de memoria.

En Inglaterra es frecuente que el profesor principal (*lecturer*) explique un corto número de conferencias por semana, y los demás días, los alumnos tienen tiempo señalado para trabajar sobre lo que aquél ha explicado, ya en el laboratorio, ya en otras clases, bajo la dirección de profesores auxiliares que reciben diversos nombres (*assistant-professor*, *assistant-lecturer*, *demonstrator*, etc.). Análogo papel desempeñan en Francia los llamados *répétiteur*. En España, el profesor único ejerce por sí mismo todos estos cargos y debe distribuir el tiempo atendiendo á todos aquellos trabajos, que son indispensables para que la enseñanza sea provechosa.

El *método genético* consiste en una verdadera imitación del sistema parlamentario. El profesor dirige la discusión, los alumnos exponen sus opiniones, y el *Presidente* procura que de estas opiniones resulte la demostración que desea. Iguro dónde y con qué resultados se ha aplicado este método; pero no parece muy apropiada la discusión parlamentaria para la investigación de las verdades matemáticas. No me atrevería á recomendar que se ensaye en España.

Libros de texto.

Al condenar el abuso de los *libros de texto* en el método de recitación y en los que más ó menos se acercan á él, no debe creerse que se proscribe el uso oportuno de esa clase de libros, que pueden prestar muy buenos servicios, y aun puede decirse que son absolutamente necesarios, sobre todo en la enseñanza elemental. El texto evita la necesidad de que los alumnos tomen apuntes durante la explicación, lo cual distrae su atención del objeto principal, y de ningún modo conviene á los principiantes. Aun en clases adelantadas, los apuntes resultan siempre con algunos claros que hay que suplir al repasarlos, y para ello habrá que acudir á los libros de texto; pero ya se ve que en ambos casos se utilizan más bien como libros de consulta. Lo que siempre hay que evitar es que el texto se considere como un libro que hay que aprender en toda su extensión, ciñéndose servilmente al mismo orden en la exposición y en la elección de las demostraciones. Son también muchas veces de absoluta necesidad las colecciones de ejercicios y problemas, porque en las clases numerosas, sobre todo, es imposible que el profesor pueda componer por sí mismo el gran número de ejercicios que debe repartir entre sus alumnos, si ha de atender á las recomendaciones de los pedagogos modernos en su parte más esencial.

Intervención de la memoria.

He insistido mucho, de acuerdo con los más eminentes maestros en esta materia, en la necesidad de limitar el uso de la memoria al papel muy secundario que le corresponde. Es muy cierto

que cuando se ha obtenido un resultado por medio de razonamientos propios, y en consecuencia se ha llegado á ver con toda claridad, y después ha sido aplicado muchas veces en los ejercicios y problemas, ese resultado ó proposición se graba profundamente en la memoria sin esfuerzo alguno.

Uno de los ejercicios más convenientes consiste en reducir al mínimo el número de fórmulas ó proposiciones que es necesario retener en la memoria. Para explicar mi pensamiento me valdré de un ejemplo, tomándolo del estudio de la parte elemental de la Trigonometría, en el cual muchos principiantes ponen innecesariamente en tortura sus facultades retentivas, esforzándose en aprender de memoria muchas fórmulas, que llegan á convertirse casi en intuiciones cuando el estudiante ha hecho un gran número de ejercicios, único medio de dominar esta parte de las matemáticas tan importante, y que tanta resistencia suele oponer á los esfuerzos de los principiantes.

Empieza este estudio con las definiciones de las líneas trigonométricas, que se aprenden bien mediante una consideración atenta de su significación. De las relaciones entre las líneas trigonométricas de un arco, basta recordar estas dos:

$$\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1;$$

$$\operatorname{tang} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x},$$

y esto se hace sin esfuerzo de memoria, con sólo imaginar la figura. Todas las demás se deducen inmediatamente, y basta el frecuente empleo que se hace de ellas para que se retengan algunas otras, también sin esfuerzo. Es costumbre aprender de memoria las cuatro fórmulas relativas á las sumas de dos arcos. En realidad, basta saber una de ellas, porque las otras tres se pueden escribir por sencillas sustituciones hechas mentalmente.

De éstas se deducen, á su vez, tan sencillamente las relativas á los arcos duplos que, para escribirlas, no hace falta esfuerzo alguno de memoria.

Las fórmulas logarítmicas de las sumas y diferencias de senos y cosenos son quizás las únicas de esta parte de la Trigonometría que exigen un esfuerzo de memoria, y es el único que se debería recomendar, porque son de uso frecuente, y el deducirlas mentalmente siempre que haga falta puede dar lugar á equivocaciones. Las fórmulas relativas á la resolución de los triángulos rectángulos se escriben sin intervención alguna de la memoria, pues no son otra cosa que las definiciones de las líneas trigonométricas, y para saber las necesarias para la resolución de los triángulos oblicuángulos, bastan tres ó cuatro observaciones análogas á las que acabamos de exponer. A esto se reduce el empleo de la memoria cuando se estudia bien, es decir, á fuerza de resolver ejercicios.

Suelen decir que hace falta una memoria feliz para dominar la primera parte del cálculo integral los que no la han estudiado bien, que son los que no la han practicado bastante, no me cansaré de repetirlo. Nada más inexacto que esta afirmación. Las fórmulas que verdaderamente hay necesidad de retener se reducen á media docena de integrales inmediatas, y esto se consigue sin ningún esfuerzo mediante su empleo, que es frequentísimo. De las demás, casi puede afirmarse que más dependen de la práctica y de la inteligencia que de la memoria. Así, cuando un matemático, práctico en esta parte del cálculo integral, escribe

$$\sqrt{a + bx + x^2} = z - x$$

con el fin de hacer desaparecer el radical y obtener una expresión racional de la variable z , no creo que pueda decirse con

propiedad que hace uso de la memoria. Ve perfectamente cómo al elevar al cuadrado desaparecerá x^2 , y cómo x y dx se podrán expresar en función racional de z ; y su práctica le sugiere esta invención cuantas veces se le ofrezca la necesidad de aplicarla. Y lo mismo puede decirse de las demás transformaciones usuales.

Es muy cierto que, en cualquier clase de estudio, la importancia del papel que desempeña la memoria disminuye á medida que se va avanzando. Y en los principios, será mejor aquel método de enseñanza y de estudio que menor fatiga imponga á la memoria.

Exámenes.

Los exámenes, sobre todo los exámenes ante Tribunales desconocidos, son ciertamente un gran obstáculo para que la enseñanza se dirija á su verdadero objeto, porque, cuando el resultado final depende de un examen, el profesor y el alumno considerarán siempre como principal objetivo de la enseñanza la preparación para el examen, como es muy natural. Así resulta que el profesor carece de libertad y de iniciativa para elegir las materias del curso que más convienen á los alumnos, se ve obligado á desarrollar un programa completo, casi siempre demasiado extenso, y que hace imposible el estudio lento y bien graduado, que es el único que puede producir resultados provechosos en la enseñanza; no ofrecen garantía cierta de una buena elección entre los candidatos, como lo acredita la experiencia de todos los tiempos y países, y presentan otros muchos inconvenientes, que no es necesario enumerar por ser muy conocidos.

Pero, con todo esto, los exámenes son un mal necesario é inevitable. Podrá cambiarse la forma, podrá cambiarse el nombre, pero su esencia, el hecho de que quien quiera acreditar que posee determinados conocimientos haya de exponerlos ante un jurado que se supone competente, sometiéndose al fallo que éste dicte, no es posible evitarlo. Los que pretenden encontrar este ideal pueden ser comparados con los ilusos que buscan todavía la cuadratura del círculo, la duplicación del cubo, ó el movimiento continuo.

Siendo, pues, un mal irremediable, debe tratarse de que sus consecuencias perniciosas se atenúen todo lo posible.

En primer lugar, se observará que son de absoluta necesidad los ejercicios escritos, que no son invención moderna, sino que han existido siempre en todas las escuelas extranjeras de universal reputación. Un examen oral en que sólo se exija la repetición de teorías y ejercicios preparados de antemano, es el instrumento más formidable para fomentar el estudio por el método de recitación de memoria. Ni el alumno ni el profesor se preocuparán ciertamente, en este caso, de la resolución de otros muchos ejercicios, que son indispensables como ya se ha visto. Su único objetivo será aprender bien el texto, y, sobre todo, en el repaso ó repases de los últimos días, se llegará al colmo del delirio en el abuso de la memoria, para que no se olvide alguna fórmula ó algún artificio de una demostración en el acto del examen, dando lugar muchas veces á que el alumno se presente en un estado de verdadera incapacidad intelectual, que está muy lejos de ser habitual en él.

Si, por otra parte, se han de proponer ejercicios ó problemas que no sean una aplicación literal de reglas ó fórmulas conocidas, lo cual es indispensable para conocer el verdadero estado de instrucción del alumno, es evidente que no se puede elegir un medio más inconveniente que el de hacerle resolver problemas en la pizarra, ante los profesores del Tribunal, cuyas miradas considera como apremiantes, y en el estado de ánimo más inadecuado para poder formular el más sencillo razonamiento.

El examen escrito suprime, al menos en parte, estos inconvenientes, sobre todo si se eligen bien los ejercicios y se concede al examinando tiempo muy sobrado para la resolución del problema propuesto. He insistido siempre en recomendar, predicando con el ejemplo, que estos ejercicios sean sencillos y no exijan largos desarrollos de cálculos, ni construcciones geométricas complicadas, que, muchas veces, á causa del estado de ánimo del alumno, pueden dar lugar á que cometa equivocaciones materiales que no prueban ignorancia, pero deslucen el trabajo, el cual quizás hubiera podido ser bien ejecutado con más tiempo y en condiciones de ánimo más favorables.

Durante muchos años he preparado los ejercicios de cálculo integral que han sido propuestos en los exámenes de ingreso de la Escuela, y para su composición adopté algunas reglas que creo oportuno dar á conocer aquí.

En primer lugar, los ejercicios deben referirse á las teorías más importantes, y nunca á esas otras que figuran como apéndices, sin desarrollo ulterior, que mejor sería suprimir en todos los programas de ingreso. Aplicando esta regla al cálculo integral, adoptaba, casi siempre, algún caso de determinación de volúmenes ó áreas de superficies curvas (1). Al plantear el ejercicio, examinaba la integral resultante para ver qué reglas elementales se le podían aplicar y desarrollaba completamente los cálculos, llevando cuenta del tiempo que invertía en ello. Cuando empleaba más de un cuarto de hora, desechaba el ejercicio y buscaba otro más sencillo, y luego se concedía á los alumnos tres cuartos de hora ó una hora para su resolución. Además, concretaba el problema á la parte de cálculo integral, para lo cual dibujaba en la pizarra, junto al enunciado, una figura lo más clara posible, y daba una explicación verbal sobre la naturaleza y posición de las diferentes superficies que limitaban el sólido ó el contorno trazado en la superficie curva, en una palabra, de todos los preliminares que corresponden á la Geometría analítica.

Estos ejercicios eran considerados como muy fáciles por los profesores de los Tribunales, por los de las Academias preparatorias y por los mismos aspirantes al ingreso y, sin embargo, no todos los resolvían bien, ni mucho menos. El número de los que los resolvían de un modo completamente satisfactorio, obteniendo los verdaderos resultados ó cometiendo sólo ligeras equivocaciones materiales, perfectamente excusables, era siempre muy limitado.

Creo poder deducir de aquí que estos ejercicios de examen deben ser siempre sencillos, breves y relativos á las teorías más importantes del programa, aun en el caso en que se presenten muchos candidatos para pocas plazas. El temor de que un gran número de aspirantes resuelva á la perfección media docena de ejercicios sencillos, aunque se trate de ramas de las matemáticas menos elevadas que el cálculo integral, es y será desgraciadamente pura ilusión, mientras no se mejoren los métodos de enseñanza.

La elección de ejercicios es de gran importancia y requiere una atención especial por parte de los Tribunales. Debe evitarse con sumo cuidado proponer problemas que estén fuera del alcance de la generalidad de los alumnos, porque el hecho de que nadie resuelva un ejercicio propuesto cede en desprestigio del Tribunal, y difícilmente lo excusará el público. No se puede negar que revela muchas veces un error grave en la apreciación de la realidad, y da lugar á que se crea que no se ha prestado la debida atención á un asunto tan delicado y trascendental para el porvenir de los aspirantes.

En algunas escuelas de Inglaterra se da tanta importancia á la elección de los ejercicios de examen, que se invita con la debida anticipación á los profesores á que propongan algunos, y el Director ó una Comisión independiente del Tribunal elige los que se han de utilizar en el examen. También es frecuente la práctica de proponer á los candidatos varios problemas, dejándoles la libertad de elegir entre ellos.

Podría citar numerosos textos de autores ingleses en apoyo de las opiniones que he emitido, pero me abstengo de ello por no cansar al lector.

Generalmente se completa el ejercicio escrito con un breve examen oral, en que se reconoce la instrucción del alumno en los puntos fundamentales de las teorías que comprende el programa. Considero necesario este examen, porque los conocimientos de que se trata no se prestan bien á ser desarrollados por escrito, si no se prolonga excesivamente el examen, y los ejercicios no bastan como garantía de que el alumno posee los conocimientos necesarios. En los exámenes de cálculo infinitesimal para el ingreso se ha presentado con alguna frecuencia el caso de alumnos que resolvieron bien los ejercicios y luego revelaron, en el examen oral, una ignorancia absoluta de las nociones fundamentales.

Respecto al género de exámenes en que interviene principalmente el propio profesor, semejantes á los de los cursos de la Escuela, hace Young las siguientes observaciones, que considero muy acertadas:

Estos exámenes no deben ser considerados como un factor muy importante para juzgar el aprovechamiento del alumno. A éste se le debe convencer de que lo que importa, sobre todo, es la aplicación y la asiduidad durante el curso, de modo que, aunque se conceda alguna importancia al examen, nunca será tan grande que anule la del trabajo hecho en clase, ni será tampoco capaz de remediar los efectos de un abandono excesivo. Así se evita el miedo al examen en los alumnos aplicados, y se quita toda esperanza de remediar con un buen examen su desaplicación á los holgazanes. Nunca se debe considerar el examen como medio de averiguar el aprovechamiento y la labor ejecutada por el alumno. Esto lo debe conocer antes el profesor.

Entendido así el examen, sirve para motivar un repaso muy provechoso de todo lo estudiado durante el curso.

Si se quiere considerar como prueba de suficiencia del alumno, ha de ser mirando á lo futuro, no á lo pasado.

La prueba debe limitarse á averiguar la capacidad de aplicar los conocimientos adquiridos en los estudios ulteriores. Debe, pues, permitírsele llevar al examen los libros de texto, apuntes ó libros de consulta que desee tener á mano.

Esto quita todo temor de un fracaso por falta de memoria, y hace inútiles esos repastos inconvenientes de los días que preceden al examen.

Los ejercicios propuestos no deben consistir en una mera repetición de lo expuesto en el curso, sino que deben tender á averiguar hasta qué punto sabe aplicarlo el alumno.

Como se ve, muchas de estas prescripciones se practican ya de un modo corriente y forman parte de las costumbres académicas de nuestra Escuela (1).

LUIS GAZTELU.

(1) De la interesante Memoria sobre «La enseñanza matemática en las escuelas técnicas de Inglaterra», del distinguido Ingeniero, profesor de la Escuela, Sr. Gaztelu

(1) Véase *Revista de la Sociedad Matemática Española*, números 7, 8, 9 y 10.

