

REVISTA DE OBRAS PÚBLICAS

PUBLICACION TECNICA DEL CUERPO DE INGENIEROS DE CAMINOS, CANALES Y PUERTOS

DIRECTOR

D. MANUEL MALUQUER Y SALVADOR

COLABORADORES

LOS INGENIEROS DE CAMINOS, CANALES Y PUERTOS

SE PUBLICA LOS JUEVES

Dirección y Administración: Plaza de Oriente, 6, primero derecha.

LOS MÉTODOS DE CÁLCULO DE ESTRUCTURAS DERIVADOS DEL TRABAJO ELÁSTICO

POR D. JUAN MANUEL DE ZAPRA,

Profesor de Hormigón armado y de Puertos en la Escuela especial de Caminos
Canales y Puertos.

(Continuación.)

VIII

Aplicación á las líneas de influencia.

Conocido es este poderoso medio de cálculo, por fortuna bastante difundido, aunque nunca tanto como debiera. Lo que resulta casi ignorado es su origen, pura y exclusivamente debido á la única verdadera fuente, al principio del trabajo elástico, del que Mohr lo derivó en 1868, para aplicarlo poco después al cálculo de reacciones indeterminadas y de fuerzas superabundantes.

La base fundamental de las líneas de influencia es la reciprocidad de las deformaciones, ó teorema de Maxwell, que ya hemos visto con qué facilidad se deduce de los teoremas del trabajo.

La deformación total en un punto p debida á un tren de fuerzas, de valores $A_1, A_2, \dots, A_n$, aplicadas á los puntos $1, 2, \dots, n$, es, según la expresión general (12), prescindiendo del factor unidad, es decir, pasando de la igualdad entre trabajos á la igualdad entre recorridos total y parciales:

$$a_{p(123\dots n)} = a_{p1}^1 \times A_1 + a_{p2}^1 \times A_2 + \dots + a_{pn}^1 \times A_n$$

y como, según el teorema de Maxwell,

$$a_{pq}^1 = a_{qp}^1$$

podemos, permutando el orden de todos los subíndices, escribir:

$$a_{(123\dots n)p} = a_{1p}^1 \times A_1 + a_{2p}^1 \times A_2 + \dots + a_{np}^1 \times A_n \quad (79)$$

Recordemos que prescindir de la unidad equivale á considerar, no las acciones propiamente dichas, A , sino sus valores numéricos

$$\frac{A \text{ unidades}}{1 \text{ unidad}}$$

Todas las deformaciones unitarias a_{kp}^1 que intervienen en esta expresión son las producidas en los puntos $1, 2, \dots, k, \dots, n$ por la unidad actuante en p , y, como hemos visto en el ejemplo 14.º,

basta una sola elástica, la relativa á la unidad, aplicada en p , para obtener todos esos valores, cuyas sumas de productos dan el recorrido total $a_{(123\dots n)p}$.

Nos remitimos á lo ya dicho en ese ejemplo respecto á la determinación, analítica ó gráfica, escalas de representación, etc., de la elástica producida por la unidad de fuerza.

Si p es el punto de aplicación de una indeterminada, de valor Y , (H ó V) su recorrido es la deformación unitaria a_{pp} medida en el mismo punto y en la misma elástica, multiplicada por el valor de Y . Si dicho recorrido, por las condiciones de la sustentación es nulo, ó una función de Y , la ecuación

$$a_{(123\dots n)p} + a_{pp} \times Y = y = \begin{cases} 0 \\ \varphi(Y) \end{cases} \quad (80)$$

da el valor de Y originado por el tren de fuerzas $A_1, A_2, \dots, A_n$.

La elástica (p) es la línea de influencia de la indeterminada Y : cualquiera que sea la composición y distribución del tren de fuerzas, con aquella línea tendremos siempre el valor correlativo de la reacción Y , sin más que medir las ordenadas a_{kp} , hacer la suma $\sum_1^n a_{kp} \times A_k$ y resolver la ecuación (80).

En el caso más general y es prácticamente nulo y la expresión se simplifica:

$$Y = - \frac{a_{(123\dots n)p}}{a_{pp}} = - \frac{\sum a_{kp}}{a_{pp}} \quad (81)$$

expresión independiente de la escala de representación ó de la distancia polar de la elástica (p).

Reproduciendo la elástica (p) con ordenadas reducidas, tomando a_{pp} por unidad, ó ($a_{kp} : a_{pp} = \rho_k$) la línea representativa de ρ da por simple suma el valor de $Y = - \sum_1^n \rho_k$. El signo, que así resulta manifiesto, corresponde al sentido de Y opuesto al de las A .

Si hay varios apoyos $p, q, r, \dots$ con otras tantas reacciones indeterminadas, las elásticas (p) (q) (r) $\dots$ dan para cada posición del tren tantas ecuaciones como incógnitas:

$$a_{p(12\dots n)} + a_{pp} \times Y^{(p)} + a_{pq} \times Y^{(q)} + a_{pr} \times Y^{(r)} + \dots = 0$$

$$a_{q(12\dots n)} + a_{qp} \times Y^{(p)} + a_{qq} \times Y^{(q)} + a_{qr} \times Y^{(r)} + \dots = 0$$

$$a_{r(12\dots n)} + a_{rp} \times Y^{(p)} + a_{rq} \times Y^{(q)} + a_{rr} \times Y^{(r)} + \dots = 0$$

$$\dots\dots\dots$$

El ángulo τ , de la tangente con la cuerda, nulo en la clave, alcanza un máximo en los arranques

$$\operatorname{tang} \tau = \left(\frac{dy}{dx} \right)_0 = 4 \frac{f}{l}$$

Como la influencia de τ solo interviene en la evaluación del trabajo de N , se comete un error tanto más pequeño cuanto más rebajado es el arco y, por otra parte, en general *por exceso*, suponiendo

$$\cos \tau = \frac{dx}{dl} = \dots 1 \quad ; \quad \sin \tau = \dots 0$$

equivalente á confundir dl con dx . Así se hace siempre, tomando $N = -H$ para todo el arco. Dicho error sólo afecta al término en N . En el relativo á λ ya veremos que la evaluación se hace exactamente.

Para la nulidad del recorrido de m , multiplicando (86) por la constante El_0 , sustituyendo el valor (84) de y , resulta:

$$\frac{dM}{dm} = +1 \quad ; \quad \frac{dN}{dm} = 0$$

$$\int_0^1 (m - Hy + Vx) dx + \int_1^l (Pi - Px) dx = 0$$

$$lm - \frac{2}{3} lfH + \frac{l^2}{2} V - \frac{(l-i)^2}{2} P = 0 \quad (A)$$

Del mismo modo, para la nulidad del recorrido de H :

$$\frac{dM}{dH} = -y = -\frac{4f}{l^2} x(l-x) \quad ; \quad \frac{dN}{dH} = -\cos \tau \quad (*)$$

$$\int_0^1 (m - Hy + Vx) \times \frac{4f}{l^2} x(x-l) dx +$$

$$+ \int_1^l (Pi - Px) \times \frac{4f}{l^2} x(x-l) dx +$$

$$+ \frac{I_0}{S_0} \int_0^1 H dx - El_0 \lambda \int_0^1 \cos \tau dl$$

se obtiene, observando que $\cos \tau dl = dx$:

$$- \frac{2}{3} lf m + \frac{8}{15} lf^2 H - \frac{1}{3} l^2 f V + \frac{I_0}{S_0} l H - El_0 \lambda l +$$

$$+ \frac{1}{3} l^2 f P \left\{ 1 - 2 \frac{i}{l} + 2 \frac{i^2}{l^2} - \frac{i^3}{l^3} \right\} = 0 \quad (B)$$

Y, finalmente, resulta de la nulidad del recorrido de V :

$$\frac{dM}{dV} = +x \quad ; \quad \frac{dN}{dV} = -\sin \tau \quad (**)$$

$$\int_0^1 (m - Hy + Vx) x dx +$$

$$+ \int_1^l (Pi - Px) x dx - El_0 \lambda \int_0^1 \sin \tau dl = 0$$

(*) Valor exacto, aplicable al término en λ . Para el relativo á N se toma el valor aproximado $\frac{dN}{dH} = -1$.

(**) Valor exacto, aplicable al efecto de λ . Valor aproximado, $\frac{dN}{dV} = 0$, para lo tocante á N .

Pero como:

$$\sin \tau dl = dy \quad ; \quad \int_0^1 dy = \frac{4f}{l^2} \int_0^1 (l - 2x) dx = 0$$

resulta integrando:

$$\frac{1}{2} l^2 m - \frac{1}{3} l^2 f H +$$

$$\frac{1}{3} l^3 V - \frac{1}{6} l^3 P \left\{ 2 - 3 \frac{i}{l} + \frac{i^2}{l^2} \right\} = 0 \quad (C)$$

Tomemos por unidad la luz l , refiriendo á ella las demás dimensiones, y hagamos:

$$\text{El rebajamiento} \dots \dots \dots \frac{f}{l} = \varphi$$

$$\text{La relación del radio de giro } r = \sqrt{\frac{I_0}{S_0}} \text{ á la luz. } \frac{r}{l} = \rho$$

$$\text{El momento de empotramiento por unidad de luz} \dots \dots \frac{m}{l} = \mu$$

$$\text{La relación de la abscisa } i \text{ á la luz, } l \dots \dots \dots \frac{i}{l} = \xi$$

Los elementos φ , ρ , ξ son *números abstractos* y las tres ecuaciones simplificadas toman la forma, prescindiendo por ahora del término relativo á λ :

$$\left. \begin{aligned} 6 \times \mu - 4 \varphi \times H + 3 \times V &= 3 P \{ 1 - 2\xi + \xi^2 \} \\ 10 \varphi \times \mu - (8 \varphi^2 + 15 \rho^2) \times H + 5 \varphi \times V &= 5 \varphi P \{ 1 - 2\xi + 2\xi^2 - \xi^3 \} \\ 3 \times \mu - 2 \varphi \times H + 2 \times V &= P \{ 2 - 3\xi + \xi^2 \} \end{aligned} \right\} \quad (88)$$

Este sistema se resuelve fácilmente: las ecuaciones I y III dan desde luego:

$$V = P \{ 1 - 3\xi^2 + 2\xi^3 \} \quad (v)$$

que para P igual á la unidad es la línea de influencia de la reacción vertical. Se comprueba desde luego que para $\xi = 0$, $V = P$; para $\xi = 1$, $V = 0$ y para $\xi = \frac{1}{2}$, $V = \frac{1}{2} P$, y siempre V tiene el valor correspondiente á la pieza recta empotrada en sus extremos.

Sustituído V en I y II resultan:

$$\left. \begin{aligned} 3 \mu - 2 \varphi H &= 3 P \{ -\xi + 2\xi^2 - \xi^3 \} \\ 10 \varphi \mu - (8 \varphi^2 + 15 \rho^2) H &= 5 \varphi P \{ -2\xi + 3\xi^2 - \xi^3 \} \end{aligned} \right\} \quad (89)$$

de las que obtenemos:

$$H = P \frac{\xi^2 - 2\xi^3 + \xi^4}{45 \rho^2 + 4 \varphi^2} \times 15 \varphi \quad (h)$$

$$\mu = \frac{m}{l} = P \frac{\varphi^2 \{ -4\xi + 18\xi^2 - 24\xi^3 + 10\xi^4 \} - 45 \rho^2 \{ \xi - 2\xi^2 + \xi^3 \}}{45 \rho^2 + 4 \varphi^2} \quad (m)$$

Las ecuaciones (h) y (m) son, para $P = 1$, las de las líneas de influencia del empuje y del momento de empotramiento.

Se comprueba inmediatamente que

$$\text{para } \xi = 0, H = 0, m = 0$$

$$\text{para } \xi = 1, H = 0, m = 0$$

y que si la parábola degenera en recta ($\varphi = 0$), H es nula y $m =$

$l\mu$, es el momento en la sustentación izquierda de la pieza recta empotrada

$$m = -\xi(1-\xi)^2 \times Pl = -\frac{P}{l^2} i(l-i)^2$$

La línea (v), de tercer grado, es puramente *geométrica*: la reacción vertical sólo depende de $\xi = \frac{i}{l}$, y no cambia con el rebajamiento $\varphi = \frac{f}{l}$.

Las líneas (h) y (m), ambas de cuarto grado, son *geométricas* y *elásticas*: intervienen no sólo ξ y φ , sino la *característica de rigidez* del arco

$$\rho^2 = \frac{r^2}{l^2} = \frac{l}{S} \times \frac{1}{l^2}$$

que afecta en las ecuaciones fundamentales al único término representativo del trabajo de N , $\frac{I_c}{S_c} lH$ en la (B). Prescindir de éste ó de los términos en ρ^2 implica un error, inadmisible cuando $\varphi \lesssim \frac{1}{8}$, pero que decrece rápidamente cuando aumenta φ y para rebajamientos de $\frac{1}{4}$ á $\frac{1}{2}$ es pequeñísimo.

En la figura 31 están las tres líneas representadas para un rebajamiento $\varphi = 0,08 = \frac{1}{12,5}$ y un radio unitario ρ convencional, que por sencillez hemos supuesto $\rho^2 = \frac{1}{45} \times \frac{1}{10} = 0,0022 \dots$

Resulta así el denominador:

$$45\rho^2 + 4\varphi^2 = 0,1 + 4 \times 0,08^2 = 0,1256$$

Los máximos de V y de H corresponden respectivamente á $\xi = 0$ y $\xi = 0,5$; el de μ ó de m depende de ρ y de φ : en el caso supuesto corresponde sensiblemente á $\xi = 0,30$. Sabido es que en la viga empotrada:

$$\varphi = 0 \quad ; \quad \mu = -\left\{ \xi - 2\xi^2 + \xi^3 \right\} P$$

el máximo corresponde á $\xi = \frac{1}{3} = 0,333$ y vale $\frac{4}{27} = 0,148$, mientras que en el arco ($\varphi = 0,08$) sólo alcanza 0,125.

Tengamos ahora en cuenta la variación de volumen, que como no depende de condición geométrica ó posición de la causa, no da lugar á línea de influencia. El término $-EI_c \lambda l$ de la ecuación (B) conduce, con las mismas simplificaciones y para $P = 0$, á

$$\left. \begin{aligned} 6 \times \mu - 4\varphi \times H + 3 \times V &= 0 \\ 10\varphi \times \mu - (8\varphi^2 + 15\rho^2) \times H + 5\varphi \times V &= -15EI_c \lambda \times \frac{1}{l^2} \\ 3 \times \mu - 2\varphi \times H + 2 \times V &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (90)$$

de donde:

$$\left. \begin{aligned} V &= 0 & (vi) \\ H &= \frac{45EI_c \lambda}{45\rho^2 + 4\varphi^2} \times \frac{1}{l^2} = \frac{45EI_c \lambda}{45\rho^2 + 4\varphi^2} & (ht) \\ l\mu = m &= \frac{30EI_c \lambda}{45\rho^2 + 4\varphi^2} \varphi \times \frac{1}{l} = \frac{30EI_c \lambda}{45\rho^2 + 4\varphi^2} f & (mt) \end{aligned} \right\} \quad (91)$$

valores que para $\varphi = 0$ dan únicamente

$$H = \frac{EI_c}{\rho^2} \times \frac{\lambda}{l^2} = \frac{EI_c}{r^2} \lambda = ES_c \times \lambda$$

fuerza normal en la pieza recta cuyos extremos no ceden, coartando en absoluto la variación lineal λ .

Invitamos al lector á que pase la vista por los cálculos del arco empotrado hechos por los métodos usuales, bien en las obras de Bresse, Résal, etc., bien en los estudios especialmente dedicados al problema en los *Anales de Puentes y Calzadas*, por Collignon (1890), Belliard (1893-4), Souleyre (1895), Boulongne (1902), Pigeaud (1905-6) y aun en los métodos más modernos de Ritter, Weyrauch, etc. Compare los laboriosísimos cálculos allí desarrollados con el que acabamos de exponer (*) y resaltará ante su ánimo la aplastante superioridad del método del trabajo elástico sobre los usuales. Y, sin embargo, el planteo del problema es idéntico: igualar á cero los, para nosotros, *recorridos* de las reacciones izquierdas, que para los autores citados son las *variaciones* Δx , Δy , de las coordenadas y $\Delta \theta$ del ángulo de orientación de la sección extrema. Pero de expresar esas variaciones ó recorridos en función del trabajo elástico, derivando la expresión de éste, á valorarlas por los métodos usuales, la diferencia en facilidad y en tiempo es enorme.

Résal consigna en sus *Puentes metálicos* que para calcular el célebre de San Luis, resolvieron sus autores para cada combinación de sobrecargas *veintiseis* ecuaciones diferenciales simultáneas!!

El mismo Résal estudia en su *Estabilidad de las construcciones* el arco especial, *pórtico*, de nuestro ejemplo quinto. Aunque desde luego lo simplifica, tomando pilares de igual altura y limitándose á considerar una sobrecarga uniforme en la viga, no necesita menos de *trece* ecuaciones para plantear un problema que hemos resuelto, para cualquier combinación de sobrecargas verticales, horizontales y para variaciones de volumen solamente con *tres* de aquéllas!!

En cuanto á los métodos gráficos, excelentes, á nuestro modo de ver, como medios de representación ó auxiliares, nada digamos: aun con los más sencillos, la construcción de cinco funiculares, los tanteos respecto á las bases de reducción, escalas, distancias polares, posiciones más convenientes, etc., y el no dar con regular exactitud más que lo relativo á fuerzas aisladas, hacen dichos métodos muy inferiores, por todos conceptos, al desarrollado. El cálculo, ó la construcción, del recorrido de un extremo del arco, como rotación alrededor del antipolo de la fuerza que lo produce, es, como el método de la elipse central, sumamente penoso.

Las tres ecuaciones (v), (h), (m), relativas á una fuerza aislada, sobre darnos las tres líneas de influencia y con ellas deducir por simples sumas los valores de V , H , m , producidos por cualquier tren de fuerzas móviles, resuelven el problema para cualquier clase de sobrecarga.

Haciendo $P = cdi = cl \cdot d\xi$ é integrando, resultan las siguientes expresiones generales, en función de la abscisa unitaria ξ , para $c = \text{constante}$.

$$\left. \begin{aligned} V &= cl \times \left\{ \xi - \xi^2 + \frac{1}{2} \xi^4 \right\} \\ H &= \frac{cf}{45\rho^2 + 4\varphi^2} \left\{ 5\xi^3 - \frac{15}{2}\xi^4 + 3\xi^5 \right\} \\ m &= \frac{cl}{45\rho^2 + 4\varphi^2} \times \left[\varphi^2 \left\{ -2\xi^2 + 6\xi^3 - 6\xi^4 + 2\xi^5 \right\} - \right. \\ &\quad \left. - 45\rho^2 \left\{ \frac{1}{2}\xi^2 - \frac{2}{3}\xi^3 + \frac{1}{4}\xi^4 \right\} \right] \end{aligned} \right\} \quad (92)$$

(*) Hecho por nosotros (en esta forma, no lo trata ninguno de los autores alemanes ni yanquis que conocemos) en tres horas, *repitiendo* por separado *todas* las integraciones, para comprobar si había algún error numérico ó de signo. Castigliano opera de un modo bastante más pesado y no tan general como el nuestro.

La carga uniforme en toda la luz da, de $\xi = 0$ á $\xi = 1$ y haciendo para simplificar la constante

$$\left. \begin{aligned} 45 \varphi^2 + 4 \varphi^3 &= \Delta \\ V &= \frac{1}{2} \times cl \\ H &= \frac{c}{\Delta} \times \frac{1}{2} f \\ m &= \frac{c}{\Delta} \times \left\{ \varphi^2 \times (0) - 45 \varphi^2 \times \frac{1}{12} \right\} l \end{aligned} \right\} \quad (93)$$

Esta expresión de m hace palpable el error que se cometería al prescindir del trabajo de N , es decir, del término en φ^2 : el primero, debido á la flexión, es, como en un arco parabólico precisa, nulo.

La misma carga en media luz, de $\xi = 0$ á $\xi = \frac{1}{2}$ da:

$$\left. \begin{aligned} V &= \frac{13}{32} \times cl \\ H &= \frac{c}{\Delta} \times \frac{1}{4} f \\ m &= \frac{c}{\Delta} \times \left\{ \varphi^2 \times \left(-\frac{1}{16} \right) - 45 \varphi^2 \times \left(\frac{11}{192} \right) \right\} l \end{aligned} \right\} \quad (94)$$

Una carga uniforme en la región central, desde ξ hasta $(1 - \xi)$, produce

$$\left. \begin{aligned} V &= cl \times \left\{ \frac{1}{2} - \xi \right\} \\ H &= \frac{c}{\Delta} \times \left\{ \frac{1}{2} - 10 \xi^3 + \frac{15}{16} \xi^4 - \frac{3}{16} \xi^5 \right\} f \\ m &= \frac{c}{\Delta} \left[\varphi^2 \left\{ 2 \xi^2 - 8 \xi^3 + 10 \xi^4 - 4 \xi^5 \right\} - \right. \\ &\quad \left. - 45 \varphi^2 \left\{ \frac{1}{12} - \frac{1}{2} \xi^2 + \frac{1}{3} \xi^3 \right\} \right] l \end{aligned} \right\} \quad (95)$$

Puede convenir, para el caso poco usual de tímpanos corridos, conocer el efecto de su peso, que corresponde á una carga t variable según dos triángulos parabólicos:

$$tdi = c' \left[1 - \frac{4f}{l^2} \cdot i(l-i) \right] di = c' \left[1 - 4f(\xi - \xi^2) \right] \times l d\xi \quad (96)$$

desde $t = c' = hf$ kg.:m. l. en el arranque, ha la cero en la clave. para crecer nuevamente hasta t en el otro arranque. La obtendremos, por simple resta.

Para la carga sustrayendo $4f(\xi - \xi^2)$, la integración de (h) y (m) da (de $\xi = 0$ á $\xi = 1$),

$$\left. \begin{aligned} H &= \frac{c'}{\Delta} \times \frac{3}{7} f \\ m &= \frac{c'}{\Delta} \times \left\{ \varphi^2 \left(\frac{2}{105} \right) - 45 \varphi^2 \left(\frac{1}{15} \right) \right\} l \end{aligned} \right\} \quad (97)$$

Las reacciones debidas á los tímpanos son las diferencias entre (93) y (97) y para V la mitad del peso total $\frac{1}{3} c'l$.

$$\left. \begin{aligned} V &= \frac{1}{6} \times c'l \\ H &= \frac{c'}{\Delta} \times \frac{1}{14} f \\ m &= \frac{c'}{\Delta} \times \left\{ \varphi^2 \left(-\frac{2}{105} \right) - 45 \varphi^2 \left(-\frac{3}{320} \right) \right\} l \end{aligned} \right\} \quad (98)$$

El empuje y momento son en este caso relativamente pequeños, por acumularse la mayor parte de la carga en las zonas extremas.

El arco articulado, degeneración del empotrado cuando por las condiciones de sustentación es m de suyo nulo, se obtiene sencillísimamente. La única indeterminada es la reacción horizontal H : la vertical es, como en la pieza recta apoyada,

$$V = P \frac{l-i}{l} = P(1 - \xi)$$

Sustituido este valor en la derivada del trabajo elástico respecto á H , es decir, en la segunda ecuación de las (82) y anulado μ resulta:

$$H = 5 P \frac{\xi - 2\xi^2 + \xi^3}{8 \varphi^2 + 15 \varphi^3} \quad (99)$$

Para el empuje debido á la variación λ subsiste la misma expresión segunda de las ecuaciones (90), anulado el término en m , que da:

$$H = \frac{15 EI_c \lambda}{8 \varphi^2 + 15 \varphi^3} \times \frac{1}{l^2} = \frac{15 EI_c \lambda}{15 \varphi^2 + 8 f^2} \quad (100)$$

De (99), línea de influencia del empuje cuando $P = 1$, se deducen como antes, haciendo $P = cl d\xi$ é integrando los valores de H relativos á sobrecarga constante en toda ó parte de la luz, cuya expresión general es:

$$H = \frac{5 cf}{8 \varphi^2 + 15 \varphi^3} \left\{ \frac{1}{2} \xi^2 - \frac{2}{4} \xi^3 + \frac{1}{5} \xi^5 \right\} \quad (101)$$

La carga total da, haciendo para abreviar $D = 8 \varphi^2 + 15 \varphi^3$:

$$H = \frac{cf}{D} \quad (102)$$

que, cuando φ^2 es despreciable, ó lo que es igual, r muy pequeño comparado con l , degenera en la conocida expresión aproximada $\frac{cl^2}{8f}$

La carga en media luz produce:

$$H = \frac{1}{2} \frac{cf}{D} \quad (103)$$

y, si afecta á la región central, desde ξ hasta $(1 - \xi)$:

$$H = \frac{cf}{D} \left\{ 1 - 5 \xi^2 + 5 \xi^4 - 2 \xi^5 \right\} \quad (104)$$

Por último, la carga triangular parabólica correspondiente á los tímpanos corridos, origina, procediendo como en el caso general:

$$H = \frac{cf}{D} \left\{ 1 - \frac{17}{21} \right\} = \frac{4}{21} \frac{cf}{D} \quad (105)$$

Como se ve, no cabe mayor sencillez en la resolución de problemas harto difíciles para los métodos ordinarios.

El caso del arco de flecha bastante ó muy grande, $\varphi > \frac{1}{6}$ con sección y momento de inercia proporcionales á $\frac{dl}{dw}$ sólo difiere del ya tratado en que se puede prescindir, cometiendo ligerísimo error, del trabajo de las fuerzas normales N .

Las tres ecuaciones fundamentales resultan:

$$\left. \begin{aligned} \int_0^l M \frac{dM}{dm} dx + 0 &= 0 \\ \int_0^l M \frac{dM}{dH} dx + 0 &= EI_c \lambda l \\ \int_0^l M \frac{dM}{dV} dx + 0 &= EI_c \lambda \times \frac{4f}{l^2} \left(l^2 - 2 \frac{l^2}{2} \right) = 0 \end{aligned} \right\} (106)$$

Señalamos con ceros los términos en N despreciados. Resultan las mismas ecuaciones (88), salvo desaparecer en la segunda el término en ρ^2 , que es precisamente el que valúa el efecto de N . Las líneas de influencia son, así, las siguientes:

$$\left. \begin{aligned} V &= P \{ 1 - 3\xi^2 + 2\xi^3 \} & (v') \\ H &= P \frac{\xi^3 - 2\xi^2 + \xi}{4\varphi^2} \times 15\varphi & (h') \\ \mu = \frac{m}{l} &= P \frac{-4\xi + 18\xi^2 - 24\xi^3 + 10\xi^4}{4\varphi^2} & (m') \end{aligned} \right\} (107)$$

y las reacciones debidas á la variación λ :

$$\left. \begin{aligned} V &= 0 & (v't') \\ H &= \frac{45 EI_c \lambda}{4\varphi^2} \times \frac{1}{l^2} = \frac{45 EI_c \lambda}{4f^2} & (h't') \\ l\mu = m &= \frac{30 EI_c \lambda}{4\varphi^2} \varphi \times \frac{1}{l} = \frac{30 EI_c \lambda}{4f} & (m't') \end{aligned} \right\} (108)$$

Todo se reduce, por tanto, á prescindir en los denominadores de $45\rho^2$, dejándolos reducidos á $4\varphi^2$. En el arco estudiado, con rebajamiento de $\frac{1}{12,5}$ el error sería enorme, pues $45\rho^2 = 0,1000$ es mucho mayor que $4\rho^2 = 0,0256$. Pero en un arco al $\frac{1}{4}$ $4\varphi^2$ vale 0,2500 y el ρ^2 , entonces necesario, no tiene ya el valor supuesto, $\frac{1}{450}$, sino otro muchísimo menor, porque el momento de inercia y la sección en la clave I_c , S_c , requeridos respectivamente por las máximas flexiones y compresiones en la región central, decrecen muchísimo para una misma luz al aumentar φ .

El caso más general del arco bastante peraltado y por *tranquil*, ó disimétrico, en que la luz es mayor que la cuerda horizontal, l , que con la flecha f define la parábola, se estudia con la misma facilidad: basta sustituir en los límites de las integrales l por la distancia horizontal entre arranques L .

Las tres ecuaciones fundamentales son:

$$\left. \begin{aligned} \int_0^L M \frac{dM}{dm} dx + 0 &= 0 \\ \int_0^L M \frac{dM}{dH} dx + 0 &= EI_c \lambda L \\ \int_0^L M \frac{dM}{dV} dx + 0 &= EI_c \lambda \times \frac{4f}{l^2} (lL - L^2) = \\ &= EI_c \lambda \times 4f \left(\frac{L}{l} - \frac{L^2}{l^2} \right) \end{aligned} \right\} (109)$$

Conservemos como medida del rebajamiento $\varphi = \frac{f}{l}$ y refiramos á la luz según la horizontal L , las abscisas i , el momento m y la cuerda l , haciendo:

$$\frac{m}{L} = \mathfrak{M} \quad ; \quad \frac{i}{L} = X \quad ; \quad \frac{l}{L} = \frac{1}{v}$$

Las ecuaciones fundamentales (109) dan, simplificadas y prescindiendo de lo relativo á λ , el sistema:

$$\left. \begin{aligned} 6 \times \mathfrak{M} - (12 - 8v) \varphi \times H + 3 \times V &= 3P \{ 1 - 2X + X^2 \} \\ (30 - 20v) \varphi \times \mathfrak{M} - (80 - 120v \times 48v^2) \varphi^2 \times H + (20 - 15v) \varphi \times V &= \\ &= 5\varphi P \{ 4 - 3v - (6 - 4v)X + 2X^2 - vX^4 \} \\ 3 \times \mathfrak{M} - (8 - 6v) \varphi \times H + 2 \times V &= P \{ 2 - 3X + X^2 \} \end{aligned} \right\} (110)$$

Se comprueba inmediatamente que para $L = l$, ó sea $v = 1$, el sistema (110) degenera en el (88) ya conocido, relativo al arco simétrico, caso particular del general que ahora tratamos. Sólo falta en (110) el término en ρ^2 relativo á las acciones normales despreciadas.

La resolución algebraica del sistema no es ahora tan fácil; la reacción vertical no es ya independiente de los elementos característicos del arco, sino función de $v = \frac{l}{L}$.

$$V = P \{ 1 - 3X^2 + 2X^3 \} - 4(v - 1)H$$

Las expresiones de $\mathfrak{M}$, H , serían muy complicadas y no ofrecen interés. Aritméticamente, sustituidos los valores de v y de φ , la resolución es facilísima y se obtienen las tres líneas de influencia y, si se quieren, los valores de $\mathfrak{M}$, H , V para cualquier sobrecarga constante ó variable, c , en todo ó en parte del arco, del modo tan sencillo ya expuesto.

La influencia de la variación de volumen λ se traduce por el sistema siguiente con los mismos primeros miembros (*) (I , $\mathfrak{M}$) (II , H) (III , V) de (110).

$$\left. \begin{aligned} (I, \mathfrak{M}) &= 0 \\ (II, H) &= -15 EI_c \lambda \times \frac{1}{L^2} \\ (III, V) &= 24 EI_c \lambda (1 - v) \times \frac{1}{L^2} \end{aligned} \right\} (111)$$

que para $v = 1$ degenera en el (106), que resuelto, da los valores (108).

Por último, el cálculo de la deformación del arco en un punto cualquiera, se lleva á cabo con la rapidez y facilidad que ya conoce el lector por los ejemplos. Evaluados m , H , V por las sumas de los correspondientes á un tren de fuerzas móviles y á las cargas repartidas (típanos, peso muerto, firme ó vía, etc.), el momento flector M y la fuerza normal N son conocidos. Introduciendo en el punto de que se trate una acción unidad, las líneas de influencia dan inmediatamente m' , H' , V' , y por tanto, M_p^1 y N_p^1 que valúan directamente las derivadas parciales $\frac{dM}{dI}$, $\frac{dN}{dI}$ y la expresión de la derivada del trabajo elástico total,

$$\frac{1}{EI_c} \int_0^L M \times M_p^1 \times dx + \frac{1}{ES_c} \int_0^L N \times N_p^1 \times dx = \delta \quad (112)$$

es la deformación en el punto p buscada. En el ejemplo undécimo lo hemos hecho detalladamente, calculando la dilatación del faro según uno de sus diámetros.

Finalmente, si con toda la *generalidad* y *exactitud* posibles queremos calcular un arco por tranquilo de fibra neutra *cualquiera*, $y = \psi(x)$, cuyas secciones y momentos de inercia varíen, se-

(*) Primera ecuación, derivada respecto á $\mathfrak{M}$, etc., abreviaturas ya usadas en el ejemplo quinto.

gún *cualquier* ley, todo se reduce á evaluar las integrales comprendidas en el desarrollo de la ecuación fundamental (85) que son:

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{I} dl & \quad \int \frac{x}{I} dl & \quad \int \frac{y}{I} dl \\ \int \frac{xy}{I} dl & \quad \int \frac{x^2}{I} dl & \quad \int \frac{y^2}{I} dl \\ \int \frac{\cos \tau}{S} dl & \quad \int \frac{\sin \tau}{S} dl & \quad \int \frac{\sin \tau \cos \tau}{S} dl \\ \int \frac{\cos^2 \tau}{S} dl & \quad \int \frac{\sin^2 \tau}{S} dl \end{aligned}$$

Dividido el arco en trozos Δl , dentro de los cuales las variaciones de I, S, x, y, τ , no sean bruscas y adoptando para cada uno de aquellos los valores medios I', S', x', y', τ' (x' é y' corresponden á la sección media dentro del elemento de fibra neutra Δl ; I, S, τ , serán las medias aritméticas de los valores en los extremos de Δl), formaremos tablas numéricas de las magnitudes.

$$\frac{\Delta l}{I'}, \quad \frac{x' \Delta l}{I'} \dots \dots \frac{y'^2 \Delta l}{I'}; \quad \frac{\cos \tau' \Delta l}{S'} \dots \dots \frac{\sin^2 \tau' \Delta l}{S'}$$

cuyas sumas respectivas de cero á L y de i á L darán los coeficientes numéricos de las tres ecuaciones (A) (B) (C) que determinarán m, H, V .

Y si quisiéramos apurar la exactitud podríamos tener en cuenta hasta el trabajo de las fuerzas tangenciales, restableciendo en (85) el término

$$\times \int_0^L \frac{T}{E_t S} \frac{dT}{dR} dl$$

para lo cual habrá que calcular los coeficientes de forma κ é introducir el valor de E_t en función de E . Los de T y sus derivadas son:

$$T_0^i = -H \sin \tau + V \cos \tau; \quad T_1^i = -H \sin \tau + V \cos \tau - P \cos \tau$$

$$\frac{dT}{dm} = 0 \quad \frac{dT}{dH} = -\sin \tau \quad \frac{dT}{dV} = +\cos \tau$$

Como los coeficientes de forma κ serán en general variables con las secciones S , habrá que valorar las magnitudes

$$\frac{\kappa' \cos \tau' \Delta l}{S'} \quad \frac{\kappa' \sin^2 \tau' \Delta l}{I}$$

y hacer las sumas correspondientes.

El conjunto de operaciones numéricas, aunque pesado, no ofrece dificultad alguna. Claro es que dentro de la formidable complicación supuesta, arco disimétrico de cualquier forma y cualquier ley de variación de secciones y momentos de inercia, sobrecarga disimétrica, efecto de las variaciones de volumen (*), todo ello teniendo en cuenta las acciones normales y aun las tangenciales....., no cabe obtener expresiones algebraicas, que den los valores generales de m, H, V , en función de la variable que define la posición de una fuerza móvil. Sólo se pueden calcular

(*) Podríamos suponerlas variables, introduciendo el término

$$\int \frac{dM}{dR} \times \frac{\lambda_s - \lambda_i}{e} dl,$$

que no requiere sino dos tablas más, de las magnitudes $\frac{x' \Delta l}{e'} - \frac{y' \Delta l}{e'}$

los valores particulares de m, H, V , correspondientes á cada fuerza ó grupo de fuerzas, variaciones de volumen, etc., es decir, á cada sistema de causas externas que se considere.

Hay que resolver otros tantos sistemas de tres ecuaciones. Pero simplifica muchísimo el problema ser *invariables* los coeficientes de m, H, V , funciones exclusivas de los elementos geométricos y mecánicos del arco é independientes en absoluto de las causas exteriores. Los primeros miembros de las ecuaciones son constantemente los mismos.

Ya lo hemos visto en los ejemplos quinto y sexto relativos á un pórtico, que no es sino un verdadero arco por tranquilo, de fibra neutra quebrada, un caso particular, simplificado, del que ahora exponemos.

Volvemos á invitar al lector á que pase la vista por los tratados de Mecánica aplicada y á que compare los métodos clásicos con los derivados del trabajo elástico.

IX

Rectificaciones.

Por error de copia aparecen equivocados en la pág. 562 dos términos del trabajo elástico producido por variaciones de volumen.

A la fuerza normal N_t corresponden

$$\int N_t \times \frac{1}{2} \frac{N_t}{ES} dl + \int N_t \times \lambda_0 dl$$

y al momento flector M_t

$$\int M_t \times \frac{1}{2} \frac{M_t}{EI} dl + \int M_t \times \frac{\lambda_s - \lambda_i}{e} dl$$

Los recorridos elementales originados por la compresión y flexión directas se desarrollan gradualmente á compás de N y M é implican el factor $\frac{1}{2}$. Los recorridos correspondientes á las variaciones λ , se producen por causa independiente y son constantes durante el crecimiento gradual de N y M .

Una momentánea obcecación nos ha hecho incurrir en un error, difícilmente explicable, que rectificamos en lo que sigue.

Es el trabajo elástico TOTAL $(\mathfrak{S})_0^i$, desarrollado en la longitud, l , del sólido entero y no el trabajo parcial correspondiente al trozo l_p $(\mathfrak{S})_0^{lp}$, la función de las causas exteriores, $\Sigma A + \Sigma R$, cuyas derivadas parciales respecto á cualquiera de ellas, C_p , miden los recorridos correspondientes $(\rho)_p$.

Así, pues, todos los límites parciales l_p, l_m, l_n, l_y , de las expresiones contenidas en las páginas 566 y 567, deben ser sustituidos por la longitud ó desarrollo total, l , de la fibra neutra.

La derivada del trabajo parcial, $(\mathfrak{S})_0^{lp}$, sólo mide un recorrido cuando se toma (pág. 545) respecto á la fuerza de enlace ó reacción total R_2 , que sobre el trozo terminado en p ejerce el trozo restante. Pero, en realidad, no es en ese caso $(\mathfrak{S})_0^{lp}$ un trabajo parcial, sino el *total en ese trozo*, el cual subsiste en equilibrio cuando se le aísla realmente del sólido, siempre que al mismo tiempo se le someta á la entonces causa exterior ó reacción total R_2 , igual á la resultante de todas las reacciones moleculares que el resto del sólido desarrolla cuando está entero.

La derivada del trabajo total $(\mathfrak{S})_0^i$, respecto á R_2 , ó R_1 , que en el sólido entero son, en lugar de causas externas, *efectos internos*, es idénticamente nula. Y esa nulidad *per se* es la que demuestra el hermoso teorema de Castigliano.

En la segunda ecuación del pórtico (pág. 590), el coeficiente de V en (II', II) es

$$\left\{ \frac{p^2 v + r p v^2}{2} \right\}$$

En el ejemplo séptimo falta, por olvido, un factor 2. La flecha estática q_e , producida por 1.000 kilogramos (pág. 599), es 0,000.6, doble de la estampada, porque, por la simetría, el trabajo elástico total es el doble del allí tenido en cuenta. La altura de caída α , es 0,118, también doble, así como la energía transformada en trabajo elástico 30 kgm., y como la flecha dinámica 0,022, que guarda la misma relación, casi igual á 4, con la flecha 0,006 debida á los 10.000 kilogramos estáticos. Las magnitudes de equivalencia ϵ son, en cambio, dos veces menores que las estampadas, y así, la última, para $Q'' = 100$ kilogramos, es 11,06, casi igual á la resultante de los experimentos de la Comisión francesa.

X

Conclusión.

La moda, que hasta la ingeniería llega, consiste hoy en abominar de la teoría. Un estudio donde á cada paso saltan integrales y derivadas, donde se tropieza con ecuaciones de tercero y cuarto grado, amen de alguna transcendente..... no sirve, según los elegantes de nuestra profesión, más que para anquilosar el cerebro de quien lastimosamente pierda el tiempo en leer tales engendros de un teorizante!

Mucha práctica y poca teoría es el grito de moda. Mucha práctica y mucha teoría armónicamente concordadas, debiera ser y lo es para nosotros. La teoría es para el Ingeniero tan necesaria como el oxígeno para la vida. Hay, sin embargo, dentro de la escala biológica, seres anaerobios que viven sin ese elemento, como hay quien flado exclusivamente en la rutina, armado de punta en blanco con fusil y manual, construye á diestro y siniestro, copiando obras preexistentes, ó haciendo otras por fórmulas-recetas *secundum artem*.

El extremo opuesto, el oxígeno puro, como la teoría sola, produce momentáneamente una vitalidad exagerada que pronto concluye en la muerte. Quien se entrega exclusivamente á la teoría, sin concordarla armoniosamente con la práctica, no debe tampoco llamarse Ingeniero, dista de serlo casi tanto como el rutinario.

El Ingeniero, como el sér aerobio normalmente organizado, tanto necesita del oxígeno como del nitrógeno y demás gases en apariencia inertes, de uno y otros, de teoría y experiencia, íntimamente mezclados y siempre *en justa y constante ponderación*. El progreso de la experiencia debe llevar consigo el adelanto de la teoría; el perfeccionamiento de ésta debe producir forzosamente la mejora de la práctica. Y ambas aunadas y siempre armónicamente reunidas, sin predominio de una ni de otra, constituyen la verdadera *Ingeniería*.

Fieles á nuestro criterio de la necesidad de esa justa ponderación y en nuestro deseo de cooperar á ella y al progreso de nuestro Cuerpo, hemos hecho el presente estudio para vulgarizar una teoría utilísima, contrastada de sobra por la práctica, y cuya asombrosa fecundidad bien patente han hecho los ejemplos. Muchos de nuestros compañeros, nada rutinarios, In-

genieros de verdad, no han tenido ocasión de conocer los teoremas del trabajo elástico, casual ó intencionadamente ignorados en los libros más en uso en España. Hemos querido compilar, de un modo racional y sucinto, *lo necesario y suficiente* para que los compañeros que quieran dedicar unas cuantas horas al estudio de la poderosísima arma que es el trabajo elástico, puedan manejarla con seguridad y utilizarla inmediatamente en la práctica.

Lo necesario y suficiente....., el eterno *desideratum* del Ingeniero, ha sido nuestro ideal. Hemos huido tanto de la aridez y sequedad de exposición de los autores alemanes, en los que hay que adivinar buena parte entre líneas, como de la excesiva prolijidad, á veces un tanto confusa, con que Castigliano desarrolló sus principios. Hemos tratado de mantener la ilación más rigurosa posible y, sobre todo, de proceder siempre de lo general á lo particular. Y hemos multiplicado los ejemplos, buscando algunos raros y difíciles, después de otros sencillísimos, para familiarizar al lector con la *esgrima* del trabajo elástico.

Quienes hayan tenido paciencia y afición para *estudiar* esa esgrima, sencilla por demás, pronto habrán recogido el fruto y experimentado el hermoso y universal principio del mínimo trabajo.

Huelga decir que demostrados con toda generalidad los teoremas, los métodos son aplicables lo mismo á los sistemas constructivos de tres dimensiones que á los planos. Por sencillez y porque la inmensa mayoría de los casos prácticos corresponden á dos dimensiones nos hemos circunscrito á éstos en los ejemplos.

Curioso es observar que mientras algunos alemanes, y sobre todo el más significado, Müller Breslau, reconocen y admiran el colosal mérito de Castigliano (*), otros muchos, y con ellos los yanquis, apenas paran mientes en él y lo posponen á Mohr, reproduciendo en cierto modo el caso de Colón y Américo Vesputio.

En el fondo, como hemos visto, son una misma cosa la derivada parcial del trabajo elástico y el trabajo virtual unitario: ambas expresiones miden lo mismo, el recorrido. Si Castigliano se hubiera limitado á su primer teorema, sólo le quedaría la ventaja de la anterioridad (1873), sobre Mohr (1874).

Pero Castigliano hizo mucho más: edificó, puede decirse, una nueva Mecánica (***) con su segundo teorema, el del mínimo trabajo elástico, presentado por muchos, pero por nadie hasta entonces demostrado.

¡Hubiera sido francés y su nombre gozaría de fama universal! ¡Fué italiano y casi nadie lo conoce, sobre todo en España!

¡Que este humilde trabajo de un Ingeniero español, enamorado de su profesión y ferviente admirador de todos los grandes Ingenieros, sirva para que los españoles aprovechen el fruto de la obra del gran italiano y eñaltezcan su glorioso nombre!

Enorme es el desnivel que de Müller-Breslau nos separa, salvo en una cosa, en la admiración que, como él, manifestamos dedicando, cada uno en la medida de sus fuerzas, él su magistral obra, nosotros nuestra modesta compilación, á la memoria de ALBERTO CASTIGLIANO!

(*) A cuya memoria está dedicada la obra citada *Die neueren Methoden der Festigkeitslehre*.

(**) Publicada en francés (Turín, 1879) por él mismo: *Théorie de l'équilibre des systèmes élastiques et ses applications*. Demostró sus teoremas en 1873, en su reválida para obtener el título de Ingeniero.

