

REVISTA DE OBRAS PÚBLICAS

PUBLICACION TECNICA DEL CUERPO DE INGENIEROS DE CAMINOS, CANALES Y PUERTOS

DIRECTOR

D. MANUEL MALUQUER Y SALVADOR

COLABORADORES

LOS INGENIEROS DE CAMINOS, CANALES Y PUERTOS

SE PUBLICA LOS JUEVES

Dirección y Administración: Plaza de Oriente, 6, primero derecha.

LOS MÉTODOS DE CÁLCULO DE ESTRUCTURAS

DERIVADOS DEL TRABAJO ELASTICO

POR D. JUAN MANUEL DE ZAFRA,

Profesor de Hormigón armado y de Puertos en la Escuela especial de Caminos Canales y Puertos.

(Continuación.)

VII

Aplicación á los entramados.

Los teoremas y métodos relativos á los trabajos virtual y real se encuentran, casi siempre, expuestos y razonados relativamente á los sistemas reticulares ó entramados con articulaciones; y, por extensión, se generalizan después aplicándolos á las piezas prismáticas formadas por infinidad de fibras elementales.

Enemigos de lo que, si no en el fondo, en la forma parece dar cierto carácter de particularidad á principios tan hermosos como fecundos, y, sobre todo, tan absolutamente generales, dentro siempre del período de elasticidad perfecta, hemos invertido el orden de exposición.

Descender ahora de lo general, el sólido elástico, integral de las fibras infinitesimales, á lo particular, el entramado, suma de unas cuantas barras finitas, es facilísimo.

Recordemos previamente que un sistema compuesto por barras unidas mediante articulaciones que se suponen *sin rozamiento alguno*, puede ser, por su constitución *geométrica*: deformable, rígido ó estrictamente indeformable y superabundante.

Si ν es el número de nudos ó articulaciones y β el de barras, un sistema plano, á los que limitaremos el estudio, es:

$$\left. \begin{array}{ll} \text{deformable si} & \beta < 2\nu - 3 \\ \text{rígido si} & \beta = 2\nu - 3 \\ \text{superabundante si} & \beta > 2\nu - 3 \end{array} \right\} \quad (64)$$

Por sus condiciones *mecánicas*, un sistema está sometido á un cierto número de acciones, fuerzas en algunos nudos, y en otros, á otro cierto número de reacciones totales, *a priori* desconocidas. Estas reacciones totales sólo pueden ser, tratándose de nudos ó puntos y no de secciones, de dos géneros: procedentes de un apoyo móvil, que, como sabemos, implica una sola reacción elemental (H ó V) ú originadas por una articulación, que equivale á dos reacciones (H y V).

Si las sustentaciones son δ apoyos dilatables y α articulaciones, hay un número total de reacciones elementales

$$\rho = \delta + 2\alpha$$

Un sistema que no sea superabundante forma un conjunto isostático, cuando

$$2\nu = \beta + \rho \quad (65)$$

Si se cumple (65), conocidas las acciones se pueden calcular simplemente por la Estática las ρ reacciones elementales H y V y las β fuerzas B que comprimen ó estiran las barras.

Cuando

$$2\nu < \beta + \rho \quad (66)$$

el sistema es hiperestático, ó indeterminado del orden ó número de veces:

$$i = \beta + \rho - 2\nu \quad (67)$$

Así, por ejemplo, la estructura más sencilla, un arco de tres articulaciones, es geoméricamente deformable porque

$$\begin{aligned} \beta &< 2\nu - 3 \\ 2 &< (2 \cdot 3 - 3 = 3) \end{aligned}$$

pero si cada nudo inferior está sustentado por una articulación, el número ρ es 2×2 y $\rho + \beta = 6 = 2\nu$; y, en efecto, el conjunto es isostático.

Si se le agrega una tercera barra, un tirante entre las dos sustentaciones articuladas, el sistema se hace hiperestático, $3 + 2 \cdot 2 - 2 \cdot 3 = 1$ vez indeterminado. Para que vuelva á ser isostático precisa rebajar ρ á 3, convirtiendo una de las sustentaciones en apoyo de dilatación.

La indeterminación hiperestática puede afectar, según los casos, á las reacciones elementales, á las barras ó á unas y á otras.

Desde luego, siempre que en un sistema plano resulta $\rho > 3$, hay, respecto á las reacciones por sí solas, indeterminación del orden $(\rho - 3)$.

La indeterminación total del conjunto de reacciones y barras puede aminorar y hasta hacerse nula si $\beta < 2\nu - 3$. Cuando el número $2\nu - 3 - \beta$, que, supuesto lo anterior, es positivo, iguale á $\rho - 3$:

$$2\nu - 3 - \beta = \rho - 3 \quad ; \quad 2\nu - \beta - \rho = i = 0;$$

y el conjunto es isostático.

Si $\beta > 2\nu - 3$, hay una indeterminación, relativa á las barras, del orden $2\nu - 3 - \beta$, que *no puede ser disminuida* por la forma de las sustentaciones, y la total del conjunto es:

$$i = (\rho - 3) + (2\nu - 3 - \beta) = \rho + 2\nu - \beta - 6 \quad (68)$$

Por último, una estructura *compuesta*, formada por ϵ entramados, cada uno de los cuales posee por sí solo, por lo menos, una sustentación, es isostática cuando el total de reacciones elementales de todo el conjunto, $\Sigma \rho$ satisface á

$$\Sigma \rho = 3 + \epsilon - 1 = \epsilon + 2 \quad (69)$$

é hiperestática del orden total $(\Sigma \rho - \epsilon - 2)$ si éste es > 0 .

Si alguno de los entramados es deformable, se rebajará la indeterminación total. Si, por lo contrario, alguno es superabundante, el conjunto tendrá la indeterminación $(\Sigma \rho - \epsilon - 2)$, más la $(2\nu - 3 - \beta)$ relativa á las barras de aquel entramado.

Hemos recordado todo lo anterior (sin creer necesario consignar la demostración que puede verse en cualquier tratado general), sencillamente como medio de conocer *a priori* el número de indeterminadas que en cualquier problema puede existir, número que es el de variables independientes con que hemos de contar.

Consideremos un entramado i veces indeterminado: lo forman β barras, cuyas compresiones ó tensiones, que ahora son las únicas fuerzas elásticas, llamadas Φ en la primera parte de este estudio, designaremos en lo sucesivo por B . Las longitudes serán b , y los recorridos elásticos ρ estarán expresados por

$$\Delta b = b \times \frac{B}{ES} \quad (70)$$

B , b , Δb se referirán á cada barra, de número de orden k , por el subíndice k .

Entre todas esas fuerzas elásticas B hay N , número menor, ó, á lo sumo, igual á i , que son indeterminadas, á las que llamaremos Y .

De las ρ reacciones elementales R , desarrolladas en las sustentaciones, 3 son conocidas por la Estática y $\rho - 3 = n$, número á lo sumo igual, ó menor que i , indeterminadas, que, como las otras, designaremos también por Y . Siempre tendremos

$$n + N = i.$$

Como ya hemos visto, un sistema hiperestático equivale exactamente á uno isostático, en el que ciertas fuerzas exteriores sustituyen á las reacciones indeterminadas ó fuerzas de enlace. Si por el momento, dejando obrar las causas exteriores ΣA , suprimimos las $n = \rho - 3$ reacciones indeterminadas, las restantes serán calculables por la Estática y las llamaremos R^0 . De un modo análogo, un entramado superabundante es idéntico á uno rígido, en el que á cada barra en exceso se sustituyen dos fuerzas exteriores iguales á la B que á aquella barra corresponde y aplicadas en sentidos inversos, una á cada uno de sus extremos. Se modifica, claro es, la distribución y valores de todas las B , pero sin alterar su resultante, puesto que las resultantes de esas fuerzas exteriores, sustitutivas de las barras suprimidas, son idénticamente nulas. Es lo mismo que ya hemos visto en el método de Müller Breslau respecto al sistema de fuerzas

$$\pm X \pm Y = 0 + 0.$$

Así pues, si en el entramado suprimimos las N fuerzas de las barras superabundantes, el sistema rígido calculado por los

métodos de Ritter, Culmann ó, mejor, Maxwell (*), nos dará las fuerzas B^0 , producidas solamente por las causas ΣA .

Dentro del período de elasticidad perfecta, por la exacta superposición de los efectos, cada indeterminada de valor Y , que aisladamente consideremos, nos dará análogamente en el sistema rígido, sustentado isostáticamente, reacciones elementales $R' \times Y'$, $R'' \times Y''$ y fuerzas elásticas $B' \times Y'$, $B'' \times Y''$... En el conjunto hiperestático y superabundante, una reacción cualquiera, suma de todas las parciales, será de la forma

$$R = R^0 + R' Y' + R'' Y'' + \dots + R^{(i)} Y^{(i)} \quad (71)$$

y análogamente una fuerza elástica

$$B = B^0 + B' Y' + B'' Y'' + \dots + B^{(i)} Y^{(i)} \quad (72)$$

R' , R'' son las reacciones elementales producidas por las indeterminadas respectivas de valor unidad; B' , B'' las fuerzas elásticas análogamente originadas. Y más en general, unas y otras son *las derivadas parciales* de R ó de B , respecto al valor de la indeterminada del mismo índice:

$$R^{(k)} = \frac{dR}{dY^{(k)}} ; \quad B^{(k)} = \frac{dB}{dY^{(k)}} \quad (73)$$

Recordemos que á cada una de las β barras ó de las ρ reacciones corresponde un subíndice igual á su número de orden y que debe ser también el mismo para las derivadas parciales B^0 , B' $B^{(i)}$, R^0 , R' $R^{(i)}$ correlativas con la barra ó reacción.

Formemos la expresión del trabajo elástico gradualmente desarrollado, sin prejuzgar nada respecto á los recorridos r de las reacciones R .

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} \Sigma Aa - \frac{1}{2} \Sigma Rr = \frac{1}{2} \Sigma B \times \Delta b \quad (74)$$

Recordemos nuestra demostración del teorema de Castiglione: cualquiera que sea el trabajo de las reacciones, $\frac{1}{2} \Sigma Rr$, la derivada parcial de $\mathcal{E}$ respecto á una causa mide el recorrido de ésta.

$$\frac{d\mathcal{E}}{dY^{(k)}} = y^{(k)}$$

Sustituyendo en (74) el valor de Δb , el trabajo elástico desarrollado por el sistema de acciones graduales ΣA es:

$$\mathcal{E}_{(A)} = \frac{1}{2} \Sigma B \times \frac{Bb}{ES} = \frac{1}{2} \Sigma \frac{B^2 b}{ES}$$

y el recorrido $y^{(k)}$ de la causa $Y^{(k)}$:

$$\frac{d\mathcal{E}_{(A)}}{dY^{(k)}} = y^{(k)} = \Sigma \frac{dB}{dY^{(k)}} \times \frac{Bb}{ES} = \Sigma B^{(k)} \times \frac{Bb}{ES} \quad (75)$$

suma que debe extenderse á todas las barras del entramado, variando los subíndices de $B^{(k)}$, B , b , S , desde 1 hasta β .

Una variación lineal, λ , constante para todas las barras, ó distinta para cada una, origina un trabajo elástico

$$\mathcal{E}_{(\lambda)} = \frac{1}{2} \Sigma B_{(\lambda)} \times \Delta b + \Sigma B_{(\lambda)} \times \lambda b$$

(*) Fué Maxwell, ocho años antes que Cremona, quien primero utilizó las figuras recíprocas en el cálculo de los sistemas indeformables.

El factor $\frac{1}{2}$ afecta al recorrido Δb que gradualmente se desarrolla bajo la acción de $B_{(\lambda)}$ y al mismo tiempo que ella, pero no al recorrido λb independiente de la misma.

El recorrido debido a las variaciones λ , es:

$$\frac{dS(\lambda)}{dY^{(k)}} = y_{(\lambda)}^{(k)} = \sum \frac{dB_{(\lambda)}}{dY^{(k)}} \times \frac{Bb}{ES} + \sum \frac{dB_{(\lambda)}}{dY^{(k)}} \times \lambda b \quad (76)$$

suma extendida a todas las barras variando los subíndices de $B^{(k)} b$ y λ , si es variable, desde 1 hasta β .

Si, como siempre, el recorrido $y^{(k)}$ es ó nulo, ó expresable en función de la indeterminada a que corresponde las expresiones (75) ó (76) nos darán tantas ecuaciones como incógnitas.

Llamando b_k y S_k la longitud y sección de la barra superabundante a que corresponde la fuerza Y^k ó del soporte sobre el cual gravita esa reacción, son dichas ecuaciones de las formas:

$$y^{(k)} = 0 \quad (77)$$

$$y^{(k)} = Y_k \times \frac{b_k}{ES_k} \quad (77')$$

Las derivadas parciales $B^{(k)}$ son, como siempre, los valores que toma la tensión ó compresión en cada barra cuando en los extremos de la superabundante de índice (k) se hacen actuar en opuestos sentidos dos fuerzas iguales a la unidad y se hacen nulas todas las demás acciones é indeterminadas, es decir:

$$(B)_k^1 = 0 + 0 + \dots + (B^{(k)} \times 1) + 0 + \dots + 0$$

En realidad la derivada no es $B^{(k)}$ sino $(B^{(k)} \times 1)$ como ya hicimos notar: si prescindimos de la unidad es por abreviar. Pero la existencia de ese factor *uno* demuestra que es indiferente que

Otro polígono análogo relativo al sistema hecho rígido é isostático, por supresión de todas las Y , nos dará los valores B'' , originados en el equilibrio bajo las causas $\sum A$.

Conocidos sus valores numéricos formaremos las β expresiones (72) de los polinomios $B_1, B_2, \dots, B_\beta$

Como E es, generalmente, uno mismo, y muchas barras suelen tener igual sección, facilita mucho las operaciones escribir en lugar de (75)

$$ES_a \times y^{(k)} = \sum B^{(k)} \times Bb \times \frac{S_a}{S} \quad (75')$$

tomando para la sección arbitraria, S_a , la que sea común a mayor número de barras. Haciendo $\frac{S_a}{S} = r$, formaremos todos los productos de la forma:

$$(brB^{(k)}) \times B = (brB^{(k)}) \times \{B^0 + B^1 Y^1 + B^2 Y^2 + \dots + B^{(k)} Y^{(k)} + \dots + B^{(i)} Y^{(i)}\} \quad (78)$$

en los que $b, r, B^{(k)}, B$, recibirán sucesivamente los subíndices 1, 2, ..., β . La suma de esos β polinomios será una de las ecuaciones (77). Otras análogas obtenidas variando el índice k de la derivada parcial desde 1 hasta i , completarán el sistema de i ecuaciones que definan las i indeterminadas Y .

Hay en resumen que hacer: $(i+1)$ polígonos de Maxwell, que dan $(i+1) \times \beta$ valores de $B^{(k)}$; $(i \times i)$ productos parciales $B^{(k)} B^{(l)}, Y^{(l)}$ para cada subíndice ó un total de $i^2 \times \beta$; $\beta \times i$ sumas de esos productos, multiplicada cada una por el producto parcial br que entre los β del mismo género le corresponda; en total $i^2 \beta + i \beta^2$ operaciones preparatorias, aparte de las auxiliares para obtener r, br y $ES_a y_k$. Para resolver las i ecuaciones hay que calcular $i+1$ determinantes del grado i , lo que requiere otra buena cantidad de operaciones.

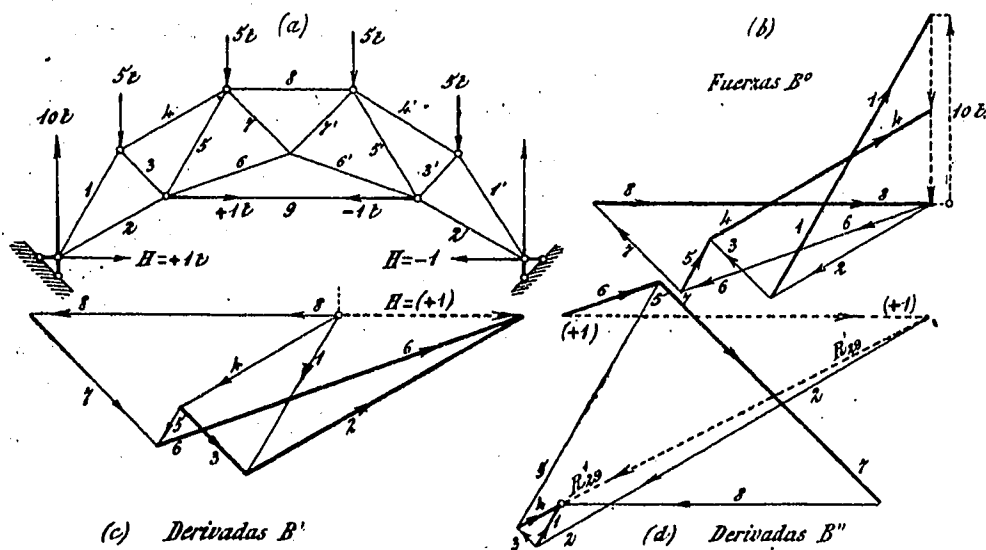


Fig. 30.

los sentidos de las dos fuerzas unidad converjan ó diverjan: el signo de $(B)_k^1$, fuerza en B producida por 1 actuante en k , será siempre el mismo, por efecto del signo propio del multiplicador unidad. Conviene, sin embargo, adoptar siempre un signo fijo para la fuerza unidad; y como contamos positivamente las dilataciones, aplicar las fuerzas $+1$ en los sentidos en que la barra superabundante actúa sobre los nudos que la limitan cuando está atirantada y conservar a la derivada $B^{(k)}$, el signo de $(B)_k^1$, positivo si es una tensión y viceversa.

Generalmente será, más fácil que calcular, construir los valores de todas las $B^{(k)}$ por medio de tantas figuras recíprocas ó polígonos de Maxwell, como indeterminadas Y existan.

El procedimiento, como se ve, resulta laborioso, no por el método, sino por la índole de los sistemas reticulares, en los que se debe huir de la superabundancia, sea en barras, sea en reacciones, para llegar a entramados estrictamente indeformables y sustentaciones isostáticas.

Ejemplo décimosexto.

El entramado simétrico 1 2 3 7 8 9 3' 2' 1' (fig. 30 a) consta de $\beta = 16$ barras unidas por $v = 9$ nudos: hay una superabundante ($2 \times 9 - 3 = 15$) que es el tirante 9. Sustentado

