

REVISTA DE OBRAS PÚBLICAS

PUBLICACION TECNICA DEL CUERPO DE INGENIEROS DE CAMINOS, CANALES Y PUERTOS

DIRECTOR

D. MANUEL MALUQUER Y SALVADOR

COLABORADORES

LOS INGENIEROS DE CAMINOS, CANALES Y PUERTOS

SE PUBLICA LOS JUEVES

Dirección y Administración: Plaza de Oriente, 6, primero derecha.

LOS MÉTODOS DE CÁLCULO DE ESTRUCTURAS DERIVADOS DEL TRABAJO ELÁSTICO

POR D. JUAN MANUEL DE ZAFRA,

Profesor de Hormigón armado y de Puertos en la Escuela especial de Caminos
Canales y Puertos.

(Continuación.)

Ejemplo déclmotercero.

En un tubo de sección rectangular (fig. 26 a), las temperaturas aumentan gradualmente desde 0° en el punto 1. á $+t^\circ$ en el 3, decreciendo desde allí hasta 0° en el 5. Análogamente, bajan hasta $-t^\circ$ en 7 para subir á 0° en el punto 9-1.

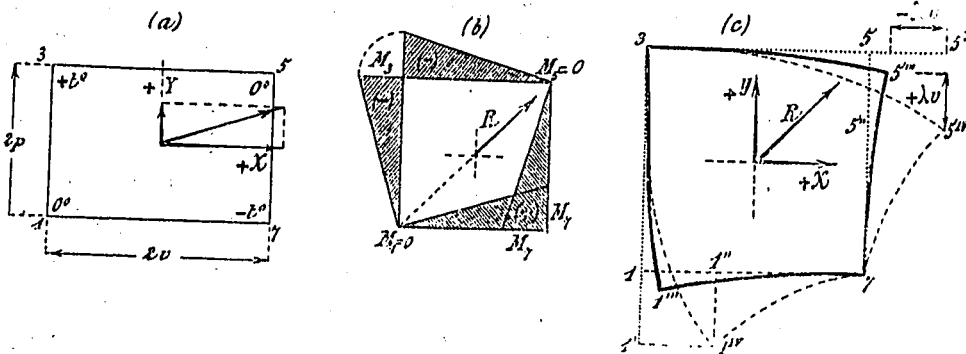


Fig. 26.

Apliquemos las expresiones (59). Sea el momento arbitrario I_n el de los elementos verticales $2p$, I_p y hagamos como siempre $\frac{I_p}{I_v} = r$. Los momentos de inercia totales son:

$$\Sigma \mathcal{J}_x = 2 \left\{ 2 \cdot rv \times p^3 + 2 \cdot 1 \times \frac{1}{3} p^3 \right\}$$

$$\Sigma \mathcal{J}_y = 2 \left\{ 2 \cdot 1 \cdot pv^3 + 2 \cdot r \times \frac{1}{3} v^3 \right\}$$

La dilatación del lado 1-3 corresponde, lo mismo que la del 3-5, á una temperatura media $\frac{1}{2} t^\circ$; las contracciones de 5-7 y 7-1 á esa misma cambiada de signo.

$\int \lambda \cos \alpha \, dl$ (59) que valúa la suma de proyecciones sobre la dirección $+X$, es, teniendo presente que en el contorno 1 3 5 7 1, el lado inferior se recorre en dirección negativa:

$$2v \frac{\delta t^\circ}{2} - \left(-2v \frac{\delta t^\circ}{2} \right) = +2v \delta t^\circ.$$

Del mismo modo la suma $\int \lambda \sin \alpha \, dl$ vale $+2p \delta t^\circ$; y por tanto

$$X = +EI_p \frac{3v \delta t^\circ}{6rvp^2 + 2p^3}$$

$$Y = +EI_p \frac{3p \delta t^\circ}{6pv^2 + 2rv^3}$$

que están en la relación

$$\frac{Y}{X} = \frac{p^2}{v^2} \times \frac{3rv + p}{3p + rv}$$

en general distinta de $\frac{p}{v}$. La resultante de las dos indetermina-

das (recuérdese que Z es nula en este caso) no coincide con la diagonal (fig. 26 a). Sea la que quiera, su momento respecto á cualquier punto del tubo es el momento flector y su proyección sobre cualquier trozo es la fuerza normal. R es, en una palabra, la causa única cuyo efecto sobre el sólido equivale punto por punto á las reacciones provocadas por las variaciones de longitud. Si éstas pudieran efectuarse en libertad, por estar articulados los ángulos ó por cortar al sólido por un punto rompiendo su continuidad, no habría reacción ni trabajo elástico alguno. Los enlaces rígidos de los cuatro trozos coartan aquella libertad, y al hacerlo desarrollan una serie de reacciones elementales cuya resultante total es precisamente R en magnitud, posición y sentido.

Consideremos por sencillez el tubo cuadrado: $p = v$; $r = 1$. Entonces resultan:

$$X = Y = +EI \times \frac{3\delta t^\circ}{8v^2}$$

R coincide con la diagonal; los momentos (fig. 26 b), nulos

en 1 y 5, crecen linealmente hasta $-Xv$ en 3 y hasta $+Xv$ en 7.

Claro es que en el sentido de la diagonal 3 7, normal a R , no hay deformación alguna. Si cortamos el tubo por la diagonal que contiene R (fig. 26 c) y mantenemos fijo el punto 3, de obrar libremente las dilataciones, 5 iría a 5' y 1 a 1'. Del mismo modo, a partir de 7, cuya posición respecto a 3 no puede variar, de obrar libremente las contracciones, 5 vendría a 5'' y 1 a 1''.

Al restablecer los enlaces, 5, que tiene que obedecer a ellos y a las causas exteriores, viene a 5''' y, análogamente, 1 a 1'''. La posición definitiva de los vértices está determinada por la condición de igualdad de la contracción absoluta $-\lambda v$, que los enlaces imponen al lado que se dilata y del alargamiento absoluto $+\lambda v$ que los mismos imprimen al lado que se contrae. El lugar del punto 5''' es, por tanto, la normal a R ; su abscisa y ordenada respecto a 5 son:

$$\frac{1}{2} \delta t^0 \times 2v - X \times \frac{2v}{ES} = v \times \delta t^0 \left(1 - \frac{3I}{4Sv^2} \right)$$

Expresando el momento de inercia en función de la sección vertical S y del espesor de la pared e :

$$I = S \frac{e^2}{12} \quad ; \quad x = y = v \delta t^0 \left[1 - \frac{1}{4} \left(\frac{e}{2v} \right)^2 \right]$$

Si la relación $(e : 2v)$ decrece indefinidamente, los vértices 1 y 5 tienden a las posiciones límites 1^{IV} y 5^{IV}, que corresponderían a sección y momento de inercia nulos.

Si la variación es la de un solo lado, todo él a $+t^0$, quedando el resto a 0° (fig. 27),

$$X = +EI_p \frac{3v \delta t^0}{6rvp^2 + 2p^3}; \quad Y = 0$$

y se obtiene la distribución de momentos representada, con los máximos $\pm Xp$. La deformación se figura fácilmente: el lado

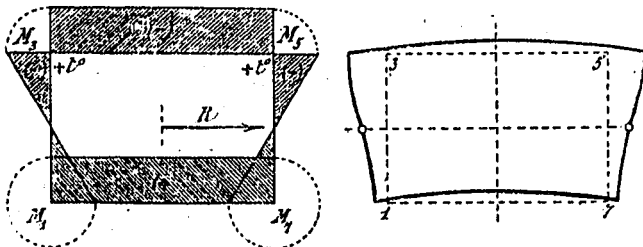


Fig. 27.

superior sufre un acortamiento relativo igual al alargamiento absoluto del inferior; sus valores son:

$$\mp \lambda \times 2v = \mp \frac{X}{ES} \times 2v$$

Si el lado inferior tiene distinto momento de inercia, I'_v , el centro de la elipse está a una altura

$$p \frac{2rv + 2p}{rv + r'v + 2p}$$

mayor cuanto menor es $r' = \frac{I_p}{I_v}$ es decir, cuanto más grande es I'_v . Si éste es infinito, al degenerar el tubo en un pórtico la altura llega a su límite superior,

$$p \frac{2rv + 2p}{rv + 2p}$$

El momento de inercia $\Sigma \mathcal{J}_x$ va creciendo y X aminorando. El acortamiento del lado superior deja de ser igual al alargamiento del inferior, pero sus valores son, como siempre

$$-\frac{X}{ES} \times 2v \quad y \quad +\frac{X}{ES'} \times 2v$$

nulo este último en el pórtico.

Ejemplo decimocuarto.

Aunque el teorema de Maxwell es mucho más conocido que el de Castigliano, por su aplicación más usual, la de cálculo de las líneas de influencia, queremos dar un ejemplo demostrativo de su utilidad en el cálculo de construcciones hiperestáticas. Corolario dicho teorema del de Castigliano, su uso es, como el método de Müller Breslau, un derivado del fecundísimo método general del trabajo elástico.

Expondremos, como preliminar, la aplicación al caso más sencillo; en los más complicados todo se reduce a la repetición de lo hecho en aquél.

Sea 1-2 (fig. 28 a) una pieza, recta, quebrada, ó curva, isostáticamente sustentada mediante una articulación en 1 y un apoyo

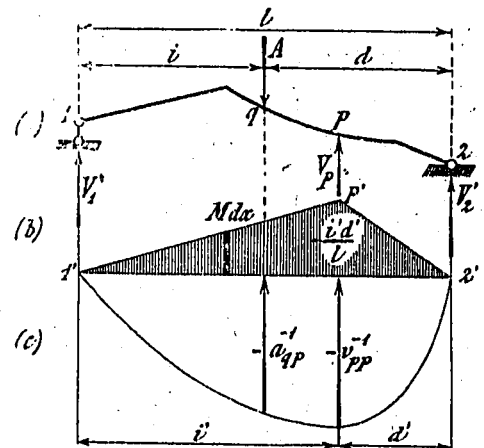


Fig. 28.

móvil en 1. Una acción cualquiera que obre a una distancia l de la sustentación izquierda y $l - i = d$ de la derecha, da en 1 una reacción desde luego determinada

$$V_1 = A \times \frac{d}{l}; \quad y \quad en \quad 2, \quad V_2 = A - V_1.$$

El momento, también determinado, alcanza su máximo $+A \times \frac{id}{l}$ en el punto de aplicación de A .

Si en punto p introducimos un nuevo apoyo móvil, el sistema se hace hiperestático: la reacción V_p es indeterminada, así como las nuevas V'_1 y V'_2 . La Estática sólo da la condición

$$A - V'_1 - V'_2 - V_p = 0$$

y la de igualdad de momentos alrededor de un punto; la tercera condición, $H = 0$, es inútil en este caso.

En el sistema primitivo, una fuerza igual a la unidad aplicada en p y dirigida como V , en sentido contrario a A , da una reacción $-1 \times \frac{d'}{l}$ en 1. El momento flector, representado por las ordenadas del triángulo 1' p' 2', es

$$M = -1 \times \frac{d'}{l} w = -1 \times \frac{l-i'}{l} w \text{ de } 0 \text{ a } i'$$

$$M = -1 \times \frac{d'}{l} w + 1 \times (w - i') = -1 \times \frac{l-w}{l} i' \text{ de } i' \text{ a } l$$

Sabido es que la elástica es la curva funicular obtenida considerando como distancia polar la magnitud EI y como fuerzas las áreas elementales Mdx de la superficie comprendida entre la línea de momentos M y la de cierre. Sus ordenadas son, en una palabra, los momentos flectores producidos por fuerzas virtuales $\frac{Mdx}{EI}$, ó bien son $\frac{1}{EI}$ veces los momentos originados por las fuerzas Mdx . Basta considerar como área representativa de fuerzas la de M y calcular, ó construir, con una distancia polar, Δ , el funicular correspondiente para tener en la escala de 1 por $\frac{\Delta}{EI}$ las deformaciones (*).

Construida ó calculada (fig. 28 c) la elástica correspondiente á (-1) aplicado en p , cuya ordenada máxima es según nuestra notación $-v_{pp}^{-1}$ (recorrido en p debido á (-1) actuante en p) la deformación en el punto q es a_{qp}^{-1} . Según el teorema de Maxwell, si en q aplicáramos la acción (-1) el recorrido ó deformación causado en p sería

$$a_{pq}^{-1} = a_{qp}^{-1}$$

es decir, el mismo medido en q en la elástica en magnitud y sentido, que es ascendente.

Cada acción igual á $A + (\times 1)$ producirá en p una deformación descendente:

$$+A \times a_{pq}^{-1} = +A \times a_{qp}^{-1} = +v^{(A)}$$

La reacción total incógnita, igual á $V_p \times (-1)$ originará, también en p , una deformación ascendente

$$-V_p \times v_{pp}^{-1} = -v^{(v)}$$

Todas las deformaciones debidas á (-1) actuante en p son conocidas por la elástica (fig. 28 c); en función de ellas podemos

(*) Esta escala es siempre inversa porque EI es una magnitud muy grande de que resultaría inmanejable: las deformaciones construidas son $\frac{EI}{\Delta}$ veces mayores.

Si las escalas arbitrarias son:

$$\text{unidad lineal} < > \begin{cases} l & \text{unidades lineales} \\ f & \text{de fuerza} \\ m & \text{de momento} \end{cases}$$

las áreas (Mdx) de las dimensiones fuerza $\times$ (línea)² que son las mismas de EI , se representan, divididas por una base de reducción arbitraria, b unidades lineales, en la escala:

$$\text{unidad lineal} < > bm \text{ unidades de (momento} \times \text{línea)}.$$

Si en lugar de EI en esa misma escala, se toma la distancia polar n veces menor, Δ , las deformaciones construidas son n veces mayores que las reales, figuradas desde luego en la escala del dibujo. Su escala es:

$$\text{unidad lineal} < > \frac{l}{n} \text{ unidades lineales.}$$

El número abstracto n es generalmente mayor que el del mismo género l : el dibujo da deformaciones $\frac{n}{l}$ veces mayores que las reales.

Cuando la línea de momentos M tiene definición geométrica el cálculo de la elástica como curva de momentos flectores producidos por las cargas Mdx es bastante sencilla.

expresar la deformación final en p resultante de todas las A y de la V_p incógnita

$$+ \sum A \times a_{qp}^{-1} - V_p \times v_{pp}^{-1} = + \sum v^{(A)} - v^{(v)}$$

Si el apoyo p es inmovible V_p queda determinada por

$$+ \sum v^{(A)} - v^{(v)} = 0 \quad (60)$$

Si es una pieza de longitud L , sección S y coeficiente de elasticidad E , para desarrollar la reacción V_p sufre un acortamiento ó deformación positiva y el problema queda resuelto por

$$+ \sum v^{(A)} - v^{(v)} + V_p \frac{L}{ES} = 0 \quad (60')$$

La cosa no puede ser más sencilla: construida la elástica basta medir su ordenada máxima para tener el valor de v_{pp}^{-1} ; cada segmento de la línea de acción de una A comprendido entre la elástica y su base $1' 2'$ da a_{pq} y el producto, $A \times a_{pq}$ es $+v^{(A)}$. Si además de acciones finitas concentradas en un punto hay cargas repartidas á razón de p kilogramos por metro lineal, basta observar que subdividida el área representativa de la carga total que afecte á la extensión e ($c \times e$), en n partes iguales, á cada una, $\frac{1}{n} \times ce$, supuesta concentrada en su centro de gravedad corresponderían ordenadas $a', a'', \dots, a^{(n)}$, cuyas sumas de productos dan

$$v^{(ce)} = \frac{1}{n} \times ce \left\{ a' + a'' + \dots + a^{(n)} \right\} = ce \times \frac{a' + a'' + \dots + a^{(n)}}{n}$$

El quebrado representa la ordenada media de las n consideradas. Llevando n al límite, la ordenada media exacta es

$$\frac{\sum a}{n = \frac{e}{\Delta c}} = \frac{1}{e} \int_0^e ade$$

es decir, la relación del área segregada entre la elástica, su base y las verticales extremas de la zona cargada á la longitud e de esta zona. Resulta:

$$v^{(ce)} = c \times \int ade$$

Si la carga unitaria, c , no es constante, sino variable, $c = \varphi(x)$, el razonamiento subsiste pero aplicado á la media

$$\frac{c'a' + c''a'' + \dots + c^{(n)}a^{(n)}}{n}$$

de las ordenadas de una curva auxiliar formada por los productos ($c \times a$) correspondientes á una misma vertical y resulta entonces:

$$v^{(ce)} = \int_0^e (ca) \times de$$

Estas ordenadas $v^{(ce)}$ corresponden al centro de gravedad del área (ce).

Recordemos que la variabilidad del momento de inercia es fácil de tener en cuenta; cuando existe sigue generalmente una

ley $I = I_0 \times \psi(x)$, y siempre se puede integrar la ecuación diferencial, que define las curvas funiculares,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{E} \times \left(\frac{M}{I} \right)$$

Gráficamente es fácil también construir el funicular con distancias polares variables Δ que guarden siempre una misma relación con el producto EI correspondiente como promedio a cada trozo: la escala de las deformaciones resultantes será una sola igual siempre a 1 por $\left(\frac{\Delta}{EI} = \frac{1}{n} \right)$ por la escala del dibujo, L .

Aunque estrictamente basta lo dicho respecto al cálculo de una reacción indeterminada para poder resolver problemas de indeterminación múltiple, desarrollaremos un caso bastante complejo que familiarice al lector con el empleo del método.

Ejemplo decimoquinto.

Sea (fig. 29 a), un pórtico de pilares múltiples, de alturas p_1, p_2, p_3 , etc., que sostienen una cubierta recta, quebrada, ó curva, 1 2 3 4, de ecuación, ó ecuaciones por trozos, conocidas:

$$(y)_1^2 = f(x) ; (y)_2^3 = \varphi(x) ; (y)_3^4 = \psi(x), \text{ etc.}$$

Por las condiciones prácticas que en obras de esta clase concurren, al mismo tiempo que para simplificar el problema, de

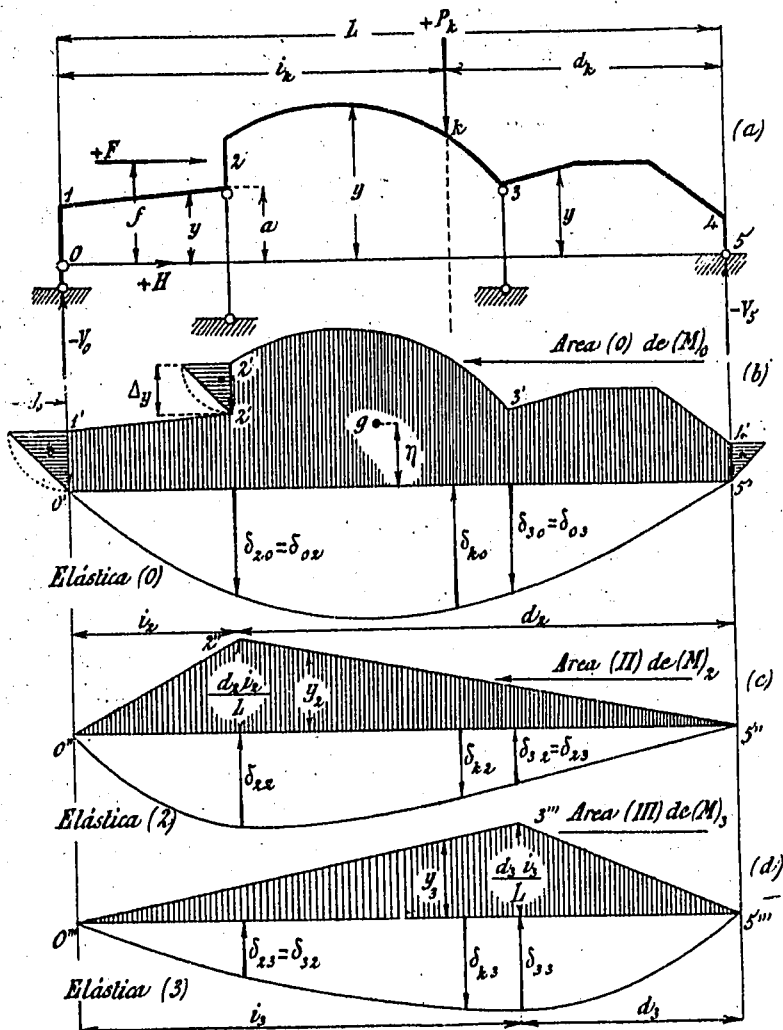


Fig. 29.

otro modo formidablemente complicado, admitamos que las sustentaciones de los pilares sobre el suelo, así como las de la cubierta sobre los pilares intermedios son articulaciones. El error

que esto implica es, en general, desfavorable, es decir, conduce a exagerar las dimensiones de la obra, cuyo trabajo se alivia por efecto de la rigidez de las uniones.

Consideremos el sistema como un pórtico sencillo 0 1 2 3 4 5 articulado en el extremo 5 y con un apoyo móvil en 0 y sometido, aparte de las causas exteriores, á las tres fuerzas de enlace incógnitas que le hacen trabajar como á sus verdaderas sustentaciones corresponde. Esas tres causas indeterminadas son: la reacción horizontal H de la articulación izquierda y las verticales V_1, V_2, V_3 de los pilares intermedios: las contaremos positivamente en los sentidos indicados en la figura

En el sistema, hecho isostático al suponer un apoyo móvil en 0 (*), una serie de pesos P_k á distancias i_k del origen dan una reacción ascendente en 0:

$$-V_0 = \frac{\sum P(L - i_k)}{\sum P}$$

y un momento flector

$$+V_0x - \sum_0^x P(x - i_k)$$

Si además obran acciones horizontales F á alturas f sobre la articulación 5 se produce en 1 otra reacción vertical descendente

$$+V'_0 = \frac{\sum Ff}{\sum F}$$

y otro momento

$$-V'_0x - \sum_0^y F(y - f)$$

Designaremos siempre por $\mathcal{M}$ el momento isostático completo:

$$\mathcal{M} = +V_0x - V'_0x - \sum_0^x P(x - i) - \sum_0^y F(y - f)$$

El momento flector real, en el sistema completo, es, llamando i y d las distancias izquierda y derecha de los apoyos intermedios á los puntos 0 y 5, cada una con el subíndice correspondiente:

$$M_0^2 = \mathcal{M} - Hy$$

$$M_2^3 = \mathcal{M} - Hy + V_2(x - i_2) - V_3 \frac{d_2}{L} x =$$

$$= \mathcal{M} - Hy - V_2 \frac{L - x}{L} i_2$$

$$M_3^4 = \mathcal{M} - Hy - V_2 \frac{L - x}{L} i_2 - V_3 \frac{L - x}{L} i_3$$

Es decir, que al momento isostático $\mathcal{M}$ hay que sumarle los del mismo género y signo contrario producidos por las indeterminadas H, V_2, V_3 .

Procedamos, como en el ejemplo anterior, dando á H un valor (-1) que producirá el momento expresado en general por

$$-(-1) \times y = +1 \cdot y = (M)_0$$

y representado precisamente por las ordenadas y de la cubierta. El área (0), envuelta por el contorno de la misma 0' 1' 2' 3' 4' 5' (fig. 29 b), es la de cargas $(M)_0 \times dx$, cuyo funicular nos da las deformaciones descendentes $+\delta_{k0}^{-1}$, producidas en el punto cual-

(*) Está representado, como ya expusimos, por una biela, y sólo puede desarrollar reacciones verticales. La fuerza de enlace $+H$ es, respecto al sistema hecho isostático, una causa exterior cuyo efecto lo identifica con el sistema real hiperestático.

quiera k por (-1) actuante en 0. Como esta deformación y todas las sucesivas homólogas han de corresponder siempre a un valor (-1) , prescindiremos del índice, escribiendo sencillamente δ_{k0} .

En la representación gráfica consignaremos solamente los valores absolutos de las δ : los signos que en cada caso correspondan los pondremos entonces de manifiesto.

Observemos que donde hay un elemento vertical de cubierta, como 01, el momento $(+1 \cdot y)$ tiene, para la misma abscisa cero, los valores sucesivos representados por el área triangular, horizontalmente rayada.

En el elemento 01 obra, por tanto, como una fuerza concentrada, el total $\frac{1}{2} y \times y$, suma de los productos Mdy . En el cálculo ó construcción de la elástica intervienen, además de las cargas Mdx , repartidas según la ley M esas cargas aisladas en 0, en 2 y en 5.

Del mismo modo á un valor (-1) atribuido á V_2 corresponde

$$(M)_2 = -(-1) \frac{L-x}{L} i_2 = +1 \cdot y_2$$

llamando y_2 (fig. 29 c) á la ordenada del área triangular 0'' 2'' 5'', determinada por la magnitud

$$+1 \times \frac{L-i_2}{L} i_2 = +1 \times \frac{d_2}{L} i_2$$

en la vertical de V_2 , donde $x = i_2$. A este área de cargas (II) corresponde el funicular relativo á las deformaciones ascendentes $-\delta_{k2}$ producidas en el punto k por (-1) actuante en 2.

Y de un modo idéntico á un valor (-1) de V_3 corresponde:

$$(M)_3 = -(-1) \times \frac{L-x}{L} i_3 = +1 \cdot y_3$$

representado por el área triangular 0''' 3''' 5''' (fig. 29 d) determinada por el segmento

$$+1 \times \frac{L-x}{L} i_3 = +1 \times \frac{d_3}{L} i_3$$

en la vertical de V_3 , para $x = i_3$. El área (III) produce el funicular de las deformaciones ascendentes $-\delta_{k3}$ originadas en k por (-1) actuante en 3.

Si todos esos funiculares están trazados con una distancia polar ó serie de distancias polares variables, iguales á $\frac{1}{n}$ de los valores de EI que á cada trozo correspondan, todas las δ son n veces mayores que lo que en la escala lineal del dibujo debieran ser para representar los valores reales.

Supongamos, por claridad, reducidas las causas exteriores á un peso $(+1)$ en el punto k . A uno P_k veces mayor le corresponderá lo que resulte multiplicado por P_k . Y á una serie de pesos $P_k P_l P_m \dots$ la suma de productos obtenida permutando el subíndice k por los demás que haya.

Bajo esa acción $(+1)$ en k , se producen los siguientes recorridos:

En 0 uno dirigido en el sentido de $H = (-1)$, negativo, por tanto, é igual á $-\delta_{0k}$ ó, según el teorema de Maxwell, á $(-\delta_{k0})$.

En 2, otro dirigido en sentido contrario al de V_2 (-1) , positivo, por tanto, $+\delta_{2k}$, igual en valor absoluto, aunque de signo contrario á $-\delta_{k2}$; su valor es $(+\delta_{k2})$.

En 3 otro completamente homólogo del anterior, $+\delta_{3k}$, valorado por $(+\delta_{k3})$.

Todos estos δ los podemos medir directamente: son los segmentos de la vertical k , recortados por las elásticas (0) (2) y (3).

La reacción incógnita H , que como siempre supondremos positiva, da los productos de H por los siguientes recorridos:

En su mismo punto de acción $+\delta_{00}$; en 2 uno ascendente $-\delta_{20}$; en 3 el homólogo $-\delta_{30}$.

La indeterminada V_2 , desde luego ascendente ó negativa, da los productos de V_2 por: en 0, $+\delta_{02} = +\delta_{20}$; en 2, $-\delta_{22}$; en 3, $-\delta_{32} = -\delta_{23}$.

Y la homóloga V_3 , los de su valor por: en 0, $+\delta_{03} = +\delta_{30}$; en 2, $-\delta_{23} = -\delta_{32}$; en 3, $-\delta_{33}$.

Todas estas δ están determinadas también por las verticales 2 y 3 recortadas por las elásticas (0) (2) y (3), salvo una: $+\delta_{00}$ que es preciso calcular

$+\delta_{00}$ es igual á n veces el recorrido del punto 0 bajo la acción $(+1)$ allí aplicada. Para calcularla no hay más remedio que recurrir á la única pero inagotable fuente, á las derivadas del trabajo elástico, al teorema de Castigliano.

$(+1)$ en 0 da un momento expresado en cualquier punto por $M = -(+1) \cdot y$. Si un elemento de la cubierta forma el ángulo α con la horizontal 05, la acción normal es

$$N = -(+1) \times \cos \alpha$$

El recorrido del punto 0, resulta de:

$$\frac{dM}{d(+1)} = -y (*) \quad ; \quad \frac{dN}{d(+1)} = -\cos \alpha = -\frac{dx}{dl}$$

$$h_0' = \int_0^5 + \frac{y^2}{EI} dl + \int_0^5 + \frac{\cos \alpha}{ES} dx \quad (61)$$

expresión perfectamente calculable si y , y , por tanto, $\cos \alpha$ y $dl = \frac{dx}{\cos \alpha}$ tienen, como I y S , una expresión en función de α .

Si S é I son constantes ó se pueden aproximadamente sustituir por promedios S' é I' y si los ángulos α no alcanzan gran valor y se puede tomar 1 ó un número muy próximo á 1 como valor medio de su coseno y confundir dl con dx :

$$\int \frac{y^2}{EI} dl = \frac{1}{EI'} \times 2 \int \frac{1}{2} y \times y dx = \frac{2}{EI'} \times \mathcal{A}$$

llamando $\mathcal{A}$ el área 0123450 y η la altura de su centro de gravedad (fig. 29 b).

$$\int \frac{\cos \alpha}{ES} dx = \frac{1}{ES'} \times L$$

$$h_0' = \frac{2}{EI'} \mathcal{A} \eta + \frac{1}{ES'} L$$

Cuando, como en la figura supuesta, hay áreas triangulares, producidas por elementos verticales como 01, dl es, en esos trozos

(*) Recordase lo dicho á propósito de la derivación: $\frac{dM}{d(+1)}$ no es sino una abreviatura de $\frac{dM}{d(+1+\alpha)}$, suponiendo que la acción es una variable $(+1+\alpha)$ que tiende á su límite $(+1)$.

en que w permanece constante, igual á dy . Hay que agregar á los términos anteriores los homólogos, relativos á cada triángulo.

$$\int \frac{y^2}{EI} dl = \frac{1}{EI'} \times 2 \int \frac{1}{2} y \times y dy = \frac{1}{EI'} \times \mathcal{A}_t \eta_t = \frac{2}{EI'} \times \frac{(\Delta y)^3}{3}$$

$$\int \frac{\cos \alpha}{ES} dx = 6$$

Si, como corresponde á la figura, las expresiones son muy complicadas, las integrales se pueden valorar gráficamente. Se conoce por fin $\delta_{00} = n \times h$.

Calculadas ó medidas todas las δ , conocemos las expresiones de los recorridos totales de H , V_1 , V_2 , que igualados á los valores que la *calidad* de las sustentaciones permita (recorridos nulos, ó expresables en función de H , V_1 , V_2 , ó de las variaciones de temperatura), dan otras tantas ecuaciones. Tenemos en resumen, recordando que las δ están amplificadas n veces y llamando $\times h$, $-v_1$, $-v_2$, los recorridos ya dichos, nulos ó calculables:

$$\left. \begin{aligned} +n \times h &= -\Sigma P_k \times \delta_{k0} + H \times \delta_{00} + V_1 \times \delta_{10} + V_2 \times \delta_{20} \\ -n \times v_1 &= +\Sigma P_k \times \delta_{k2} - H \times \delta_{20} - V_1 \times \delta_{12} - V_2 \times \delta_{22} \\ -n \times v_2 &= +\Sigma P_k \times \delta_{k3} - H \times \delta_{30} - V_1 \times \delta_{13} - V_2 \times \delta_{23} \end{aligned} \right\} (62)$$

Una sencilla regla evitará la confusión que á primera vista ofrecen los subíndices. Recordemos que, según nuestra notación, adoptada desde un principio, el primer subíndice designa el lugar de la *deformación* y el segundo el lugar de la *causa* que la produce. A cada causa indeterminada corresponde una elástica que lleva la numeración del lugar donde aquélla obra.

(0) para H actuante en 0

(2) " V_1 " " 2

(3) " V_2 " " 3

Todos los términos en P , en V_1 y en V_2 en las tres ecuaciones tienen la misma ley de formación. El primer subíndice es el de la misma indeterminada ó de la misma P ; el segundo es el característico de la reacción cuyo recorrido expresa la ecuación: 0 para la primera (h); 2 para la segunda (V_1), 3 para la tercera (V_2). Los términos en H son los únicos que en la segunda y tercera ecuaciones derogan la ley invirtiéndola, δ_{00} en lugar de δ_{02} y δ_{03} en el de δ_{01} . Y esto procede sencillamente de que siendo H horizontal y las V verticales, aunque el teorema de Maxwell subsiste siempre (y de él nos aprovechamos al permutar los subíndices) no se puede, gráficamente, utilizar elásticas de ordenadas verticales para medir los recorridos horizontales de los vértices de ellas mismas.

El procedimiento no deja de ser laborioso, pero no se pierda de vista lo complicado de la estructura supuesta: Sin llegar en la práctica á la figura que para poner en evidencia la generalidad del método hemos atribuido á la cubierta, pueden resolverse con relativa facilidad problemas tan difíciles como el *arco continuo* de n tramos, con apoyos á distintas alturas.

Para no complicar la exposición hemos dejado á un lado las fuerzas horizontales. Estas producen en el sistema isostático la reacción descendente $+V'_0$, que no origina deformación, y, trasladadas al nivel de $+H$, mediante los pares Fy , dan, en el lado 0 1:

Un empuje total $(H + \Sigma F)$, que sustituirá como multiplicador de δ_{00} á H ;

Un momento ΣFy , concentrado en el elemento 0 1, que se agregará al representado por el triángulo y que entrará en la determinación de la elástica (0)

En el lado parcial 2 2, trasladadas á la articulación con el pilar, darán otro momento concentrado, que se agregará al triángulo, más un empuje secundario, H_1 , cuyo valor, perfectamente determinado, ΣF es el de una causa exterior que obra á la altura a sobre el primario H . Desde 2 en adelante habrá que tener en cuenta el momento $H_1 (y - a)$. Esto nos obligará á construir la elástica especial correspondiente á la superficie de carga de ordenadas $(y - a)$, que utilizaremos como las otras para determinar los segmentos relativos á P , V_1 y V_2 . Pero además tendremos que calcular directamente la deformación horizontal δ_{2h} homóloga de δ_{00} . En suma, las ecuaciones quedarán sustituidas, indicando con el subíndice h la nueva elástica, homóloga de la (0), por las siguientes:

$$\left. \begin{aligned} +n \times h &= -\Sigma P_k (\delta_{k0} + \delta_{kh}) + (H + \Sigma_0^1 F) \times \delta_{00} + (\Sigma_2^3 F) \times \delta_{2h} \\ &\quad + V_1 (\delta_{10} + \delta_{1h}) + V_2 (\delta_{20} + \delta_{2h}) \\ -n \times v_1 &= +\Sigma P_k \delta_{k2} - (H + \Sigma_0^1 F) \delta_{20} - \Sigma_2^3 F \times \delta_{2h} - V_1 \times \delta_{12} - V_2 \times \delta_{22} \\ -n \times v_2 &= +\Sigma P_k \delta_{k3} - (H + \Sigma_0^1 F) \delta_{30} - \Sigma_2^3 F \times \delta_{3h} - V_1 \times \delta_{13} - V_2 \times \delta_{23} \end{aligned} \right\} (63)$$

(Continuad.)

Lámparas de filamento estirado.

Existen actualmente en la industria de las lámparas de incandescencia dos campos de acción: el de los fabricantes de filamento comprimido y el de los poseedores de patentes para la fabricación del filamento estirado.

Como es lógico, los primeros defienden sus productos y hacen la guerra á los de filamento estirado, procurando presentar todos sus defectos, pero los segundos á su vez tienen entusiastas defensores, que oponen á los ataques de los otros razonables argumentos que expondremos á continuación.

Es cierto, dicen, que el nuevo método de fabricación proporciona una gran ventaja á los fabricantes, pero también es cierto, añaden, que esta ventaja es todavía mucho mayor para los consumidores.

A los primeros le suprime la necesidad del empleo de máquinas para la formación, carbonización y elección de filamentos, evitando en la fabricación de la lámpara gran número de soldaduras que suelen ser otros tantos puntos débiles. El consumidor, á su vez, posee una lámpara muy resistente y que puede tenerla en depósito con la seguridad de poder hacer uso de ella en el momento que lo necesite. Esta lámpara no se ennegrece nunca, pues no hay motivo para ello.

Se ha dicho, igualmente, en contra del filamento estirado, que el momento crítico de la ruptura del filamento sucede al poco tiempo de haber sido puesta en servicio. Los defensores de este filamento dicen, por el contrario, que siendo de buena fabricación, sólo después de 500 á 700 horas de marcha empieza á ser frágil; esto no quiere decir que sólo dure este lapso de tiempo, sino que, cuando ha transcurrido, se hace entonces la lámpara más sensible al choque. Esta fragilidad no es tampoco tan grande como la del filamento comprimido una vez puesta en servicio,