

LOS MÉTODOS DE CÁLCULO DE ESTRUCTURAS

DERIVADOS DEL TRABAJO ELÁSTICO

POR D. JUAN MANUEL DE ZAFRA,

Profesor de Hormigón armado y de Puertos en la Escuela especial de Caminos Canales y Puertos.

(Continuación.)

Ejemplo noveno.

Veamos ahora los efectos de una diferencia de presiones ó cargas uniformes, c kg. : m. l. en la rebanada de altura a , ó $\frac{c}{a}$ kg. : m², que contaremos positivamente de fuera á dentro.

Por la simetría (fig. 19 a), en la sección 0 4 no hay reacciones tangenciales, y las normales son $V = +cv$. El momento m es la única indeterminada.

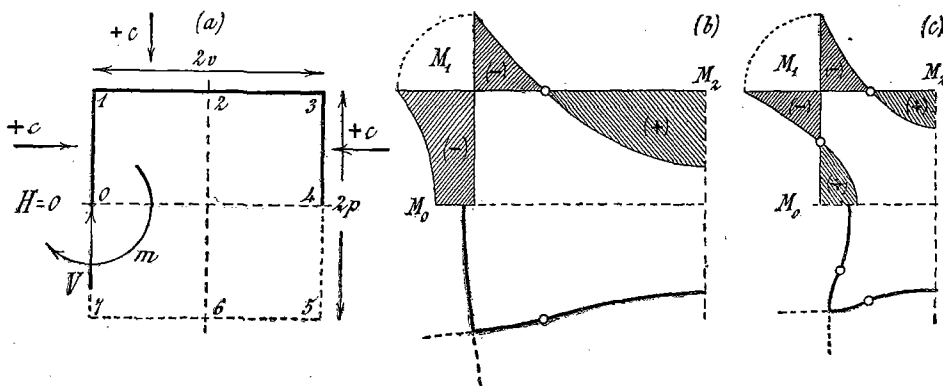


Fig. 19.

$$M_0 = m - c \frac{v^2}{2} \quad \text{de } 0 \text{ á } p$$

$$M_1 = m - c \frac{p^2}{2} + cvx - c \frac{x^2}{2} \quad \text{de } 0 \text{ á } 2v$$

$$M_2 = m - c \frac{p^2}{2} + cpz - c \frac{z^2}{2} \quad \text{de } 0 \text{ á } p$$

La nulidad del giro en 4, ó del momento m , da

$$m(2p + 2rv) = \frac{1}{3} cp^3 + rcp^2v - \frac{2}{3} rcv^3$$

$$M_0 = m = c \frac{p^3 + 3rp^2v - 2rv^3}{6(p + rv)}$$

y se deducen los momentos en 1 y 2.

$$M_1 = c \frac{-2p^3 - 2rv^3}{6(p + rv)} ; \quad M_2 = c \frac{-2p^3 + 3pv^2 + rv^3}{6(p + rv)}$$

Sean los que quieran p , v y r , M_1 es negativo, y todos los vértices tienden á cerrarse; si $v > p$ M_2 es positivo, y así las caras mayores tienen siempre inflexiones que en las menores pueden desaparecer.

Para los valores $v = 2p$, $r = 1$ (fig. 19 b):

$$M_0 = -\frac{1}{2} cp^3 = -\frac{1}{8} cv^3$$

$$M_1 = -\frac{1}{4} cp^3 = -\frac{1}{4} cv^3$$

$$M_2 = +\frac{1}{4} cp^3 = +\frac{1}{4} cv^3$$

por donde se ve el error enorme que cometen quienes consideran cada lado empotrado en los adyacentes, cualesquiera que sean las longitudes respectivas.

Hay en el lado $2v$ inflexiones determinadas por

$$-\frac{1}{2} p^3 - \frac{1}{2} p^2 + vi - \frac{1}{2} i^3 = 0; \quad i = v \left(1 \pm \sqrt{\frac{1}{2}} \right)$$

que están á $\pm 0,707v$ del centro.

En los lados menores la flexión es toda en el mismo sentido.

En el tubo cuadrado (fig. 19 c), $p = v$, $r = 1$:

$$m_0 = m_2 = +\frac{1}{6} cp^3 ; \quad m_1 = -\frac{1}{3} cp^3$$

ó referidos á las longitudes totales, $2p$, $+\frac{1}{24}$ y $-\frac{1}{12} c(2p)^2$,

es decir, lo mismo que perfectamente empotrados unos lados en otros. Las inflexiones están á

$$\pm \sqrt{\frac{2m_0}{c}} = \pm \left(\sqrt{\frac{1}{3}} = 0,577 \right) p$$

del centro.

En un silo ó depósito, la carga interior ($-c$), que desde luego invierte todos los signos, aumenta con la altura. Las paredes trabajan por tensión ($V = -cp$), compuesta con flexión. Las deformaciones crecen rápidamente hasta llegar á una cierta profundidad en la que de un modo perceptible empieza á influir la resistencia propia del fondo si este es plano (*). Esta influencia perturba el régimen, introduciendo flexiones en planos verticales perpendiculares á las paredes, que se traducen, si no se estudia bien la disposición de las armaduras verticales, en grietas horizontales, junto al fondo en el interior y á cierta altura en el exterior.

Ejemplo décimo.

En una chimenea ó silo poligonal regular (fig. 20), de n caras de longitud $2l$ cada una, basta por la simetría estudiar el trozo constituido por dos semilados, entre las secciones que forman un ángulo $2\alpha = \frac{2\pi}{n}$.

Una carga uniforme interior produce:

(*) Teóricamente, la influencia del fondo alcanza á toda la altura, por grande que sea.

$$\begin{aligned} M_0^1 &= m + c \frac{\alpha^2}{2} & N_0^1 &= V \\ M_1^2 &= m + c \frac{l^2}{2} + V \sin 2\alpha \times z + c \frac{z^2}{2} & N_1^2 &= V \cos 2\alpha - cl \sin 2\alpha \end{aligned}$$

$$\frac{dM}{dm} = 1; \frac{dV}{dm} = 0 \text{ y, por tanto, la nulidad del recorrido}$$

de $m_2 = m_0$, da

$$m \times 2l + V \times \frac{l^2}{2} \sin 2\alpha = -\frac{5}{6} cl^3$$

relativamente á 2 considerado fijo.

El recorrido de V es fácilmente calculable: es la variación

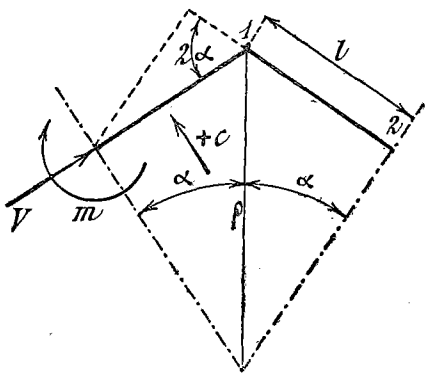


Fig. 20.

del lado 0 1, proyectada sobre la dirección de 1 2, más la variación de este mismo:

$$\frac{Vl}{ES} \times \cos 2\alpha + \frac{Vl}{ES} = \frac{Vl}{ES} (1 + \cos 2\alpha)$$

y como $\frac{dN}{dV}$ vale 1 en (0 1) y $\cos 2\alpha$ en (1 2)

$$\frac{1}{ES} (Vl + Vl \times \cos^2 2\alpha - c \sin 2\alpha \cos 2\alpha l^2) = \frac{1}{ES} Vl (1 + \cos 2\alpha)$$

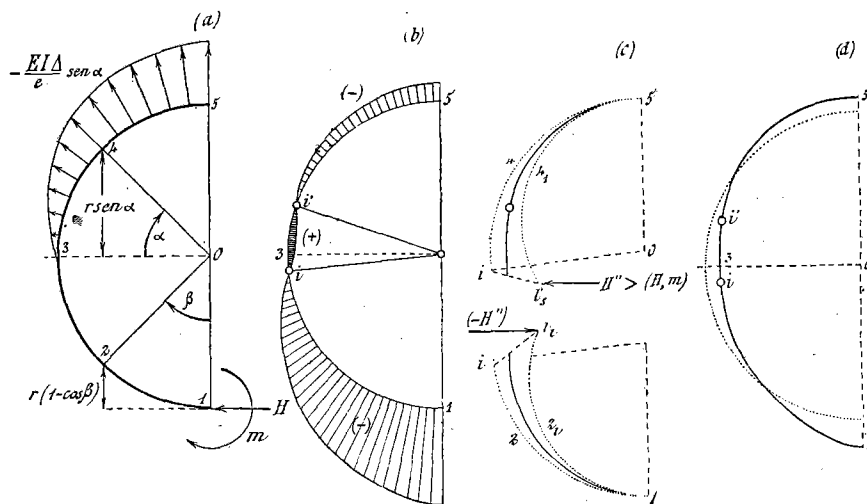


Fig. 21.

que se reduce sucesivamente á:

$$V (1 - \cos 2\alpha) = -c \sin 2\alpha l$$

$$V \times 2 \sin^2 \alpha = -cl \times 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$V = -cl \cotang \alpha = -c\rho \cos \alpha$$

en función del radio $\rho = \frac{l}{\sin \alpha}$

$$m = -\frac{5}{12} cl^2 + \frac{1}{4} cl^2 \sin 2\alpha \times \cotang \alpha = cl^2 \left(-\frac{5}{12} + \frac{1}{2} \cos^2 \alpha \right)$$

$$\text{Si } \alpha = 45^\circ, \cos^2 \alpha = \frac{1}{2}; m = -\frac{1}{6} cl^2, V = -cl, \text{ como}$$

ya sabíamos en la sección cuadrada. Si α disminuye, m decrece hasta anularse, y V aumenta hasta $-c\rho$ cuando el número de lados crece indefinidamente ó la sección se hace circular.

Ejemplo undécimo.

Estudiemos el efecto del sol en una torre de un faro, suponiendo que el desnivel térmico, máximo en el diámetro cuyo plano contiene al sol, decrece hasta anularse en las direcciones á escuadra, puntos de separación entre sol y sombra. La ley de variación es, racionalmente (fig. 21 a), $\delta = \delta_m \sin \alpha$. En la parte en sombra suponemos que δ es constantemente nula.

La torre se deforma simétricamente respecto al plano que contiene al sol, y, por lo tanto, no hay reacciones V contenidas en el mismo, pero sí reacciones normales H y de flexión m , de recorrido evidentemente nulo en ambas.

Del extremo supuesto libre, 1, al punto 3 no hay más causas que m y H . En la rebanada de 1 m de altura:

$$\begin{aligned} M_1^3 &= m + Hr (1 - \cos \beta') \\ N_1^3 &= H \cos \beta \end{aligned} \quad \left. \begin{aligned} &\beta \text{ de } 0 \text{ á } \frac{\pi}{2} \end{aligned} \right\}$$

A partir de 3 comienza á obrar en cada elemento angular $d\alpha$ una causa, equivalente por su efecto á un momento $-\frac{E\Delta I}{e} \times \sin \alpha$. Si $\Delta = \lambda_s - \lambda_i$ es, como hemos sentado, positivo, ese momento tiende á aumentar la curvatura de la torre y debemos efectivamente contarle como negativo. En el punto 4, definido por α (la subdivisión de la variable en β de 1 á 3 y α de 3 á 5 facilita el cálculo), el momento flector y fuerza normal son:

$$\begin{aligned} M_5^3 &= (m + Hr) + Hr \sin \alpha - \frac{E\Delta I}{e} \sin \alpha \\ N_5^3 &= -H \sin \alpha \end{aligned} \quad \left. \begin{aligned} &\alpha \text{ de } 0 \text{ á } \frac{\pi}{2} \end{aligned} \right\}$$

La nulidad del recorrido de m da, prescindiendo del factor EI , y puesto que las derivadas parciales son 1:

$$\int_0^{\pi/2} M_1^3 \times 1 \times r d\beta + \int_0^{\pi/2} M_5^3 \times 1 \times r d\alpha = 0$$

$$m \times \pi + H (1 + \pi) r - \frac{E\Delta I}{e} = 0 \quad (a)$$

Haremos el cálculo con todo rigor, contando con el trabajo de

las fuerzas normales, que en (a) no intervienen, por ser nulas $\frac{dN}{dm}$.

$$\frac{dM}{dH} = r(1 - \cos \beta), \text{ entre 1 y 3 ; } = r(1 + \sin \alpha), \text{ entre 3 y 5}$$

$$\frac{dN}{dH} = \cos \beta \quad \text{»} \quad 1 \text{ y } 3 ; = -\cos \alpha \quad \text{»} \quad 3 \text{ y } 5$$

Multiplicando todo por EI (señalamos con tildes los valores de las derivadas parciales respecto á H):

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} M_1^3 \times \overline{r(1 - \cos \beta)} d\beta + \frac{I}{S} \int_0^{\frac{\pi}{2}} N_1^3 \times \overline{\cos \beta} \times r d\beta + \\ + \int_0^{\frac{\pi}{2}} M_3^3 \times \overline{r(1 + \sin \alpha)} \times r d\alpha + \\ + \frac{I}{S} \int_0^{\frac{\pi}{2}} N_3^3 \times \overline{(-\sin \alpha)} \times r d\alpha = 0 \end{aligned}$$

Hechas las integraciones se reduce á:

$$m\pi + H \left\{ \pi r + \frac{I}{Sr} \frac{\pi}{4} \right\} - \frac{E\Delta I}{e} \left(1 - \frac{\pi}{4} \right) = 0 \quad (b)$$

Supongamos para concretar:

$$\delta = T - t = 15^\circ ; \Delta = 0,000.150 ; e = 0,24 \text{ (m.)} ;$$

$$r = 3,00 \text{ (m.)}$$

$$I = \frac{1}{12} 1,00 \times 0,24^3 = 1152 \times 10^{-6} \text{ (m}^4\text{)} E = 2 \times 10^9 \text{ (kg. : m}^2\text{)}$$

$$\frac{E\Delta I}{e} = \frac{2 \times 10^9 \times 15 \times 10^{-6} \times 1152 \times 10^{-6}}{24 \times 10^{-2}} = 1440 \text{ (m.-kg.)}$$

$$S = 0,24 \text{ (m}^2\text{)} ; \frac{I}{Sr} = 0,000.533 \text{ (m.)}$$

El término correctivo $\frac{\pi}{4} \frac{I}{Sr}$ vale 0,000.417 metros y mide la influencia de las acciones normales, mientras que $\pi r = 9,424$ metros es la de las flexiones:

Resulta así:

$$3,141 m + 12,423 H = + 1440 \text{ (m.-kg.)}$$

$$3,141 m + 9,425 H = + 309 \text{ (m.-kg.)}$$

$$H = + 376 \text{ (kg.)} ; m = - 1029 \text{ m.-kg.}$$

Hay en la arista opuesta al sol una compresión horizontal poco importante para una sección de 2400 cm², pero en cambio la flexión es fuerte y tiende á mayorar la curvatura de la torre.

En el punto 3, $M_3 = m + Hr = + 99 \text{ m.-kg.}$ Hay una inflexión un poco antes para

$$m + Hr(1 - \cos \beta_0) = 0 ; r(1 - \cos \beta_0) = -\frac{m}{r} = + 2,73 \text{ m.}$$

contados verticalmente á partir de 1. De 3 á 5 el momento flector disminuye hasta una nueva inflexión

$$m + Hr(1 + \sin \alpha) - \frac{E\Delta I}{e} \sin \alpha = 0$$

que corresponde próximamente á $\sin \alpha = 9,32$. Y á partir de ese punto domina el término negativo y el momento flector crece con este signo hasta $M_5 = - 213 \text{ m.-kg.}$

Figurando los momentos por ordenadas radiales, con la convención usual de proceder de izquierda á derecha en la fibra neutra ó eje de la pieza, y de representar las flexiones positivas hacia abajo y las negativas hacia arriba, es decir, siempre en el sentido en que se produce la *convexidad* (ó aumento de ella), se obtiene la línea representativa de la figura 21 b. Aunque esta línea da una idea de los *sentidos* de la deformación, figuramos, en escala muy exagerada, la forma de la fibra neutra, teniendo en cuenta que la curvatura en cada punto no procede de la flexión local sola, sino de la *acumulación* de la debida á las flexiones precedentes y de la curvatura propia de la pieza. Así, entre los puntos de inflexión i, i' , lo que se produce es *disminución* de la curvatura inicial y en el resto *aumento* de la misma.

Dividamos la semitorre en dos trozos por el radio del punto de inflexión inferior, i , que está determinado por

$$r(1 - \cos \beta) \times H + m = 0,$$

es decir, que por él pasa la *reacción completa* en 1, de intensidad H y de momento m respecto á 1.

El trozo superior, supuesta fija la sección 5 (fig. 21 c) se de-

formaría bajo la acción de los momentos $-\frac{E\Delta I}{e}$, aumentando

siempre de curvatura, hasta 5 i_s , bastante más allá de lo que el trozo inferior permite y desarrollaría sobre él, si á tanto llegaran las flexiones una *reacción completa* (*), H'' , mayor que la verdadera (H, m). A su vez el trozo inferior, supuesta fija la sección 1, sufriría bajo la acción impuesta por el superior ($-H''$) una deformación i_1 , bastante mayor que la que al verdadero valor ($-H$) corresponde. No puede haber equilibrio con esas deformaciones: tienen que ser *menores* en uno y otro trozo, hasta que las mutuas acciones (H'') y ($-H''$) alcancen, por minoración de aquéllas su justos valores (H) y ($-H$). La posición final de i es intermedia entre la primitiva i_s ; pero corresponde necesariamente á una *minoración* del diámetro 3 de la torre, así como á una *mayoración* del 1-5, imprescindible por el aumento de curvatura en la casi totalidad y por dicha disminución del diámetro transversal.

Supuesto fijo el centro, como los aumentos de curvatura son mayores en la zona en sombra, á ésta corresponde el mayor crecimiento de radio.

El trabajo de la pared es de compresión compuesta con flexión; ambas alcanzan sus máximos en los extremos del diámetro que contiene al sol. Es mucho más importante la flexión en 1 que en 5; las tensiones horizontales (y verticales como ya en otro ejemplo hemos visto) alcanzan valores bastante grandes en el paramento exterior y, á veces, como en cierto faro ruso, producen en uno y otro sentido grietas muy visibles, que cubren dos zonas muy marcadas, con más intensidad en la región Norte (sombra) que en la Sur. Por la ley del retraso esas zonas no son simétricas respecto al meridiano, sino á uno más al SE.-NE. Las máximas dilataciones, como las temperaturas, se producen después del medio día.

Es fácil, y completará el ejemplo, calcular el incremento del diámetro 1-5. Para conocer el recorrido del punto 1, respecto al 5 supuesto fijo, debemos suponer en 1 una acción ficticia A igual á la unidad, dirigida de arriba abajo, y calcular el momento m' y la expresión del momento flector M' que en el equilibrio bajo

(*) Es decir, una reacción del valor de H y que ejerce sobre 1 un momento igual á m .

dicha acción $\bar{1}$ resultan: M^1 sustituye, como ya demostramos, á $\frac{dM}{dA}$ en la expresión del recorrido:

$$\frac{1}{EI} \int M \times \frac{dM}{dA} \times dl = \rho A$$

En dicho equilibrio bajo $\bar{1}$ en el punto 1:

$$(M^1)_1^5 = m^1 + H^1 r (1 - \cos \beta) + \bar{1} \times r \sin \beta$$

$$(M^1)_5^5 = m^1 + H^1 r (1 + \sin \alpha) + \bar{1} \times r \cos \alpha$$

La nulidad de los recorridos de m^1 y de H^1 da:

$$\pi m^1 + r (1 + \pi) H^1 = -2 r \times \bar{1}$$

$$\pi m^1 + r \pi \times H^1 = -2 r \times \bar{1}$$

$$m^1 = -\frac{2}{\pi} r \times \bar{1} ; H^1 = 0.$$

Resulta, por tanto,

$$\left(\frac{dM}{d\bar{1}} \right)_1^5 = -\frac{2}{\pi} r \times \bar{1} + r \sin \beta \times \bar{1}$$

$$\left(\frac{dM}{d\bar{1}} \right)_5^5 = \left(-\frac{2}{\pi} r \times \bar{1} + r \cos \alpha \times \bar{1} \right)$$

$$\rho_{\bar{1}} = \frac{1}{EI} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(m + Hr (1 - \cos \beta) \right)$$

$$\left(-\frac{2}{\pi} r \times \bar{1} + r \sin \beta \times \bar{1} \right) r d\beta +$$

$$+ \frac{1}{EI} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(m + Hr (1 + \sin \alpha) - \frac{E\Delta I}{e} \sin \alpha \right)$$

$$\left(-\frac{2}{\pi} r \times \bar{1} + r \cos \alpha \times \bar{1} \right) r d\alpha$$

expresión que se reduce, hechas las integraciones, á

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{1}{EI} \left\{ Hr^3 \left(1 + \frac{2}{\pi} \right) + r^2 \frac{E\Delta I}{e} \left(\frac{2}{\pi} - \frac{\pi}{4} \right) \right\} = \\ &= \frac{1}{2 \cdot 10^9 \times 1152 \cdot 10^{-6}} \left\{ 3^3 \cdot 376 \cdot 1,637 - 3^2 \cdot 1440 \cdot 0,149 \right\} = \\ &= +0,006.4 \text{ metros.} \end{aligned}$$

De un modo análogo, para calcular la contracción del radio 03, supondríamos una acción $\bar{1}$ en 3 y deduciríamos los valores de m , H y V correspondientes á ese equilibrio, escribiendo, en función de ellos y de $\bar{1}$ los valores generales del momento flector, que sustituirían á las derivadas parciales respecto á la acción ficticia $\bar{1}$ en 3.

Creemos que este ejemplo convencerá al más incrédulo.

Las dificultades, de intento acumuladas, por la naturaleza y modo de obrar de la causa exterior, que se salen por completo de lo usual en los problemas de Mecánica aplicada; la sencillez con que se deducen reacciones incógnitas, leyes de distribución de acciones, modo y cuantía de las deformaciones..., todo ello sin más que aplicar un solo principio, no dejan lugar á duda respecto á la universalidad y excelencia de éste.

VI

Aplicaciones especiales.

El método expuesto es, bien se ha visto, absolutamente universal: reacciones, deformaciones, todo cuanto se necesita conocer en una construcción, se deduce del único y fecundísimo teorema de Castigliano.

Pero á poco que se compliquen la construcción ó las causas exteriores, todo lo que el planteo del problema tiene de sencillo, lo tiene de laborioso el desarrollo de los cálculos, aunque siempre sean éstos bastante más fáciles que los hechos por los métodos ordinarios.

En ciertos casos, siempre que la influencia de las acciones normales y tangenciales sea despreciable comparada con la de las flexiones, cabe simplificar considerablemente el proceso, mediante el método tan sencillo como ingenioso del eminente profesor de Berlín, Müller Breslau.

Este método, contenido en su obra *Die neueren methoden der Festigkeitslehre* (*), *Los nuevos métodos de la Mecánica aplicada* (literalmente: «enseñanza de la resistencia»), es el que exponemos

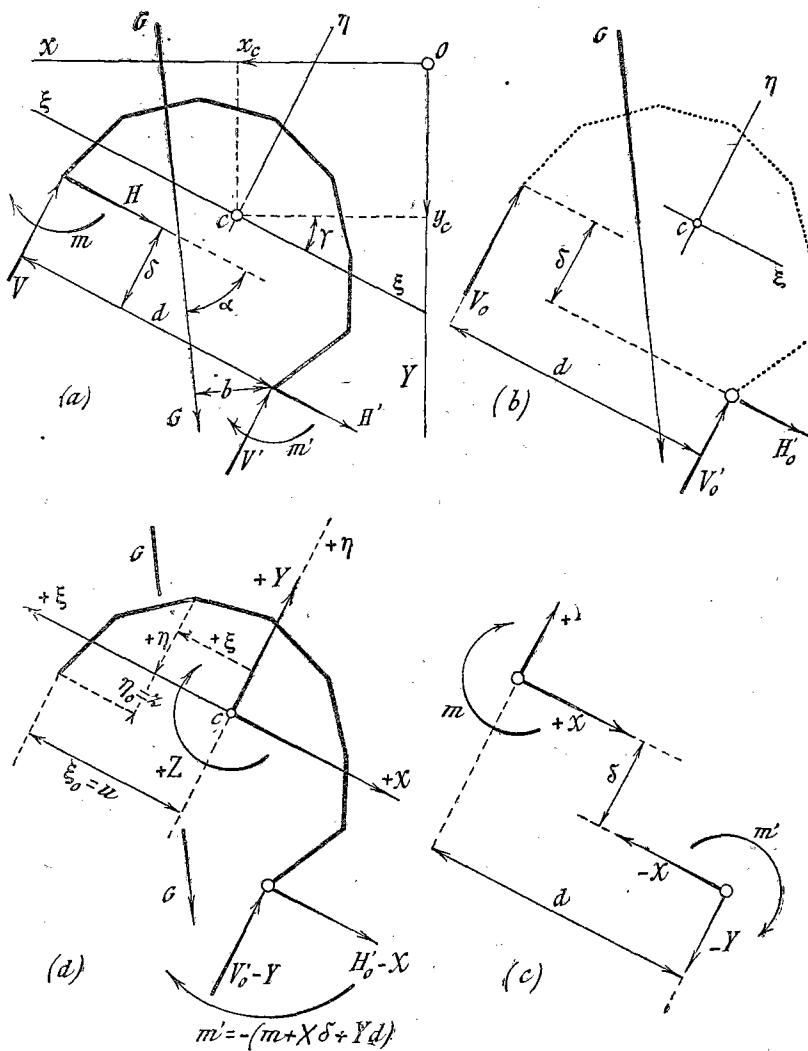


Fig. 22.

á continuación. Pero, enemigos de lo particular, lo desarrollamos con toda generalidad y en lugar de una construcción simétrica suponemos una cuyos planos principales son cualesquiera.

Sea (fig. 22 a) una construcción formada por elementos rectos, ó curvos, sucesivos, sin solución de continuidad elástica,

(*) Librería de Baumgaertner. Leipzig, 1934.

sustentada en dos empotramientos y sometida á un sistema de acciones, de resultante general G .

Cada elemento tiene un momento de inercia I , constante, ó variable en función de l , longitud de la fibra neutra contada á partir del extremo izquierdo.

Atribuyamos á cada elemento infinitesimal dl , un peso virtual $\frac{I_a}{I} = r$, igual á la relación de un momento arbitrario, I_a al suyo propio, I . Determinemos el centro de gravedad, c , de todo el sólido:

$$x_c = \frac{\int rdl \times y}{\int rdl} ; y_c = \frac{\int rdl \times x}{\int rdl}$$

y los momentos

$$(I)_x = \int rdl \times y^2 ; (I)_y = \int rdl \times x^2 ; (I)_{xy} = \int rdl \times xy$$

El ángulo γ , definido por

$$\tan 2\gamma = 2 \frac{(I)_{xy}}{(I)_y - (I)_x}$$

es el de los ejes de la elipse central de inercia ó ejes principales del sólido elástico, con los de coordenadas x, y .

Tomemos estas direcciones ξ, η como las horizontal y vertical, que hasta ahora hemos usado para descomponer las reacciones totales, y continuemos llamando H, V las componentes respectivas.

Supongamos el problema resuelto y sean m, H, V, m', H', V' , contadas positivamente en los sentidos de la figura 22 a (el cálculo dará los signos que á cada una correspondan) las reacciones parciales buscadas. Entre ellas existen las ecuaciones:

$$\left. \begin{aligned} H + H' + G \cos \alpha &= 0 \\ V + V' - G \sin \alpha &= 0 \\ m + m' + Vd + H\delta - Gb &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (43)$$

Si el sistema de sustentación, hiperestático, lo convertimos en isostático, sustituyendo por un apoyo móvil y por una articulación los empotramientos izquierdo y derecho (fig. 22 b) á las ecuaciones (43) sustituyen las siguientes:

$$\left. \begin{aligned} 0 + H'_0 + G \cos \alpha &= 0 \\ V_0 + V'_0 - G \sin \alpha &= 0 \\ 0 + 0 + V_0 d + 0 - Gb &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (44)$$

El sistema hiperestático equivale exactamente al isostático si á la resultante general, G , le agregamos un sistema de causas exteriores definido por:

$$\left. \begin{aligned} (H + H') - H'_0 \\ (V + V') - V_0 - V'_0 \\ (m + m' + Vd + H\delta) - V_0 d \end{aligned} \right\} \quad (45)$$

que introducido en (44) á continuación de los términos en G , da exactamente (43).

El sistema de causas (45) es idénticamente nulo, puesto que es la diferencia entre dos sistemas de reacciones hiperestáticas (h) é isostáticas (i):

$$\left. \begin{aligned} \{m, H, V, m', H', V'\} &\text{ (h)} \\ \{0, 0, V_0, 0, H'_0, V'_0\} &\text{ (i)} \end{aligned} \right\}$$

tales que cada uno equilibra totalmente á G .

El sistema (fig. 22 c) definido por

$$\left. \begin{aligned} (X - X) &= 0 \\ (Y - Y) &= 0 \\ (m + m' + Vd + H\delta) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (46)$$

idénticamente nulo, puede sustituir al (45) siempre que las tres indeterminadas X, Y, m , satisfagan, como desde luego habían de satisfacer las H, V, m , las condiciones impuestas á la deformación elástica del sólido por las sustentaciones. Tenemos así, identificando (45) con (46).

$$\left. \begin{aligned} (H + H') - H'_0 &= X - X ; \left\{ \begin{aligned} H &= +X \\ H' &= H'_0 - X \end{aligned} \right. \\ (V + V') - V_0 - V'_0 &= Y - Y ; \left\{ \begin{aligned} V &= V_0 + Y \\ V' &= V'_0 - Y \end{aligned} \right. \\ (m + m' + Vd + H\delta) - V_0 d &= \left\{ \begin{aligned} m &= m \\ m' &= -(m + X\delta + Yd) \end{aligned} \right. \end{aligned} \right\} \quad (47)$$

En suma, sustituimos el sistema hiperestático por uno equivalente isostático, facilísimo de calcular, sometido á las acciones reales, $\Sigma A = G$, más otras acciones virtuales (46), que por ser de resultante nula, sólo desempeñan un papel distributivo y equivalen á las fuerzas de enlace impuestas por la naturaleza de las sustentaciones. En cualquier punto del sólido el momento flector real, M , es la suma del momento flector, M_0 , producido por las acciones A y del $\mathfrak{M}_0$ originado por las acciones (46) obrando unas y otras sobre el sistema isostático.

De las acciones virtuales (46) traslademos las correspondientes al extremo izquierdo, X, Y , al centro de la elipse de inercia (fig. 22 d), y llamemos Z el par total resultante determinado por la igualdad de momentos alrededor de c :

$$m = -Xz + Yu + Z, \quad (48)$$

que es la expresión del momento de empotramiento en función de las tres indeterminadas definitivas X, Y, Z .

En un punto cualquiera determinado por sus coordenadas ξ, η respecto á los ejes principales de inercia,

$$M = M_0 - (X\eta) - (Y\xi) + Z, \quad (49)$$

expresión general, pues tomando como direcciones positivas de ξ, η las marcadas, los signos de $(X\eta)$ y de $(Y\xi)$ son siempre los mismos de η y de ξ .

Apliquemos el teorema de Castigliano, expresando la nulidad de los recorridos de H, V, m .

Las derivadas parciales de (49) respecto á éstas son las mismas que respecto á X, Y, Z , puesto que H, V, m , son respectivamente sumas de X ó Y ó Z con otras cantidades constantes en la derivación parcial respecto á la variable de que se trata. Así, pues,

$$\begin{aligned} \frac{dM}{dH} &= \frac{dM}{dX} = -\eta \\ \frac{dM}{dV} &= \frac{dM}{d(-V_0 + Y)} = \frac{dM}{dY} = -\xi \\ \frac{dM}{dm} &= \frac{dM}{d(-Xz + Yu + Z)} = \frac{dM}{dZ} = +1 \end{aligned}$$

Prescindiendo del factor coeficiente de elasticidad que suponemos constante y multiplicando todos los términos, que en la expresión del trabajo elástico están afectados por $\frac{1}{EI}$, por el mo-

mento de inercia arbitrario I_a empleado para la elipse central, las ecuaciones de nulidad de recorridos

$$\int M \times \frac{I_a}{I} \times \frac{dM}{dR} dl = \int M \times \frac{dM}{dR} \times r dl = 0$$

son las siguientes:

$$\left. \begin{aligned} -\int M_0 \eta \times r dl + \int X \eta^2 \times r dl + \int Y \xi \eta \times r dl - \int Z \eta \times r dl &= 0 \\ -\int M_0 \xi \times r dl + \int X \xi \eta \times r dl + \int Y \xi^2 \times r dl - \int Z \xi \times r dl &= 0 \\ +\int M_0 \times r dl - \int X \eta \times r dl - \int Y \xi \times r dl + \int Z \times r dl &= 0 \end{aligned} \right\} (50)$$

Como los ejes coordenados son los de la elipse de inercia.

$$\left. \begin{aligned} \int X \eta \ r dl &= X \int \eta \ r dl = 0 \\ \int Y \xi \ r dl &= Y \int \xi \ r dl = 0 \\ \int X \xi \eta \ r dl &= X \int \xi \eta \ r dl = 0 \\ \int Y \xi \eta \ r dl &= Y \int \xi \eta \ r dl = 0 \end{aligned} \right\}$$

Las ecuaciones (50) se reducen cada una á un término en X , ó Y , ó Z y otro en M_0 , resultando sencillamente:

$$\left. \begin{aligned} X &= \frac{\int M_0 \eta \ r dl}{\int \eta^2 \ r dl} \\ Y &= \frac{\int M_0 \xi \ r dl}{\int \xi^2 \ r dl} \\ Z &= \frac{\int M_0 \ r dl}{\int r dl} \end{aligned} \right\} (51)$$

Recordemos que esta simplificación se debe á prescindir del trabajo elástico correspondiente á los elementos N , T .

$\int M_0 \ r dl$ valúa el peso de la suma de superficies elementales, ($M_0 dl$), del área comprendida entre el contorno de momentos flectores isostáticos y el eje neutro (fig. 23 a), atribuyendo una densidad virtual $r = \frac{I_a}{I}$ á cada una de aquéllas. Si dentro de cada

trozo de l es constante r , la integral vale r veces el área de momentos, que designaremos por $\mathfrak{M}_0$:

$$\int M_0 \ r dl = r \mathfrak{M}_0 \quad (52)$$

y que es de las dimensiones fuerza $\times$ (línea)².

$\int M_0 \eta \ r dl$ é $\int M_0 \xi \ r dl$ representan la suma de los momentos estáticos de cada peso elemental ($r M_0 \ dl$) supuesto concentrado en la fibra neutra, respecto á los ejes ξ ó η . Proyectando sobre

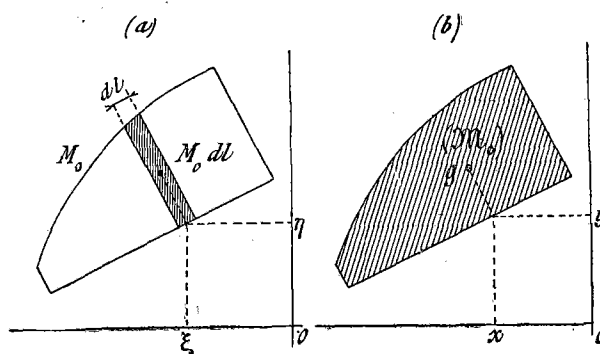


Fig. 23.

aquella el centro de gravedad (fig. 23 b) y llamando x y las coordenadas de la proyección:

$$\left. \begin{aligned} \int M_0 \eta \ r dl &= r \mathfrak{M}_0 y \\ \int M_0 \xi \ r dl &= r \mathfrak{M}_0 x \end{aligned} \right\} (53)$$

que son de las dimensiones fuerza $\times$ (línea)².

Los momentos isostáticos, M_0 , las áreas que producen, $\mathfrak{M}_0$ y los momentos de estas áreas, $\mathfrak{M}_0 x$, $\mathfrak{M}_0 y$, entran en la evaluación con sus signos. M_0 , negativo dentro de un trozo, da un área también negativa; pero los momentos estáticos serán negativos ó positivos según que los signos de las coordenadas x , y , de la proyección del centro de gravedad sean $+$ ó $-$.

$\int r dl$ es sencillamente el peso virtual del elemento, siempre positivo y de dimensión lineal; lo llamaremos $\mathfrak{L}$.

$\int \xi^2 \ r dl$ é $\int \eta^2 \ r dl$ son los momentos de inercia de esos pesos virtuales respecto á los ejes η y ξ . Son siempre positivos, de la dimensión (línea)³ y los designaremos por $\mathfrak{I}_y$, $\mathfrak{I}_x$.

(Continuará.)

Revista de las principales publicaciones técnicas.

Los nuevos carruajes sin estribo de los tranvías de Nueva York.

Estos nuevos carruajes, descritos en el *Electrical Railway*, del 20 de Abril, son del tipo de entradas centrales, con cabinas enteramente cerradas para el conductor y situadas en las dos extremidades, y están tan poco elevados sobre la vía, que no necesitan la instalación de un estribo intermedio; el público pone directamente el pie en el piso del carruaje.

Las puertas de estos carruajes están provistas de un cierre gobernado por un regulador centrífugo, que hace imposible su apertura durante la marcha del tranvía, y hace también imposible que vuelva éste á ponerse en marcha, en tanto que aquéllas no estén perfectamente cerradas. La apertura y el cierre de estas puertas se obtiene con ayuda de un pedal que mueve el conductor.

El autor describe detalladamente el equipo eléctrico de estos carruajes, que son movidos por dos motores regulados por su circuito de excitación, así como los frenos y las instalaciones neumáticas accesorias, la construcción interior y exterior de los carruajes y las instalaciones de los puestos del conductor y del cobrador.

Nuevos tipos de turbinas de gas.

En el *Engineer*, del 22 de Marzo, describe M. Davey dos tipos de turbinas de gas de abastecimiento continuo, que utilizan el gas para recalentar, ya al aire preliminarmente comprimido, ya al aire á la presión atmosférica.

La instalación comprende, en los dos casos, una turbina T , análoga á una turbina de vapor, una bomba P , compresora en el caso de la turbina á alta presión, aspirante en el de la turbi-