

REVISTA DE OBRAS PÚBLICAS

PUBLICACION TECNICA DEL CUERPO DE INGENIEROS DE CAMINOS, CANALES Y PUERTOS

DIRECTOR

D. MANUEL MALUQUER Y SALVADOR

COLABORADORES

LOS INGENIEROS DE CAMINOS, CANALES Y PUERTOS

SE PUBLICA LOS JUEVES

Dirección y Administración: Plaza de Oriente, 6, primero derecha.

LOS MÉTODOS DE CÁLCULO DE ESTRUCTURAS

DERIVADOS DEL TRABAJO ELASTICO

POR D. JUAN MANUEL DE ZAFRA,

Profesor de Hormigón armado y de Puertos en la Escuela especial de Caminos Canales y Puertos.

(Continuación.)

Ejemplo sexto.

Trabajo del pórtico por efecto de variaciones de longitud de sus elementos:

El pilar de la derecha (fig. 15), sufre un alargamiento unita-

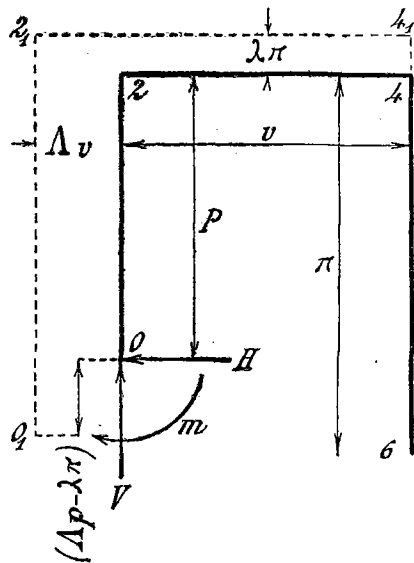


Fig. 15.

rio, λ ; la viga y el pilar izquierdo experimentan otro, Λ . En el ejemplo concreto, equivaldrá esto á suponer que el sol hierve á 45° los elementos p , v , provocando $\Lambda = 0,000.300$ y que π queda en sombra y sufre $\lambda = 0,000.150$. Corresponden esas variaciones á 30° y á 15° .

El pórtico, empotrado en 6 y libre para dilatarse, tomaría la forma 0, 2, 4, 6. Las reacciones incógnitas son las que llevarían el punto 0, á 0 y mantendrían el paralelismo inicial del arranque del pilar p . Los recorridos μ , h , v de m , H , v , son tales, que sumados con los debidos á las variaciones lineales, que respectivamente son: 0, $+\Lambda v$ (porque *concuerta* con el sentido atribuído á H) y $-(\Lambda p - \lambda \pi)$, (porque *discuerda* con el de V) dan cero.

$$\mu = 0 ; h + \Lambda v = 0 ; v - \{ \Lambda p - \lambda \pi \} = 0$$

Las expresiones de M_0^2 , M_2^4 , M_4^6 son:

$$M_0^2 = m + Hu \quad (\text{de } 0 \text{ á } p)$$

$$M_2^4 = m + Hp + Vx \quad (\text{de } 0 \text{ á } v)$$

$$M_4^6 = m + Hp - Hx + Vv \quad (\text{de } 0 \text{ á } \pi)$$

que sólo difieren de las ya conocidas en no contener más que términos en m , H , V . Las ecuaciones que se obtengan tienen, por tanto, los *mismos* primeros miembros de siempre. Recordemos que están todos multiplicados por el factor EI_p , que tiene que aparecer ahora en los segundos miembros, multiplicando á 0, á $-\Lambda v$ y á $+(\Lambda p - \lambda \pi)$.

$$(I, m) = 0$$

$$(II, H) = -EI_p \times \Lambda v$$

$$(III, V) = +EI_p \{ \Lambda p - \lambda \pi \}$$

La homogeneidad es patente, pues (II) y (III) son de la dimensión fuerza $\times$ (línea)³, lo mismo que los segundos miembros, fuerza $\times \frac{(\text{línea})^{(4+1)}}{(\text{línea})^2}$; (I) es del orden fuerza $\times$ (línea)², es decir del de EI_p , anulado por ser nulo el giro μ .

Apliquemos esto al pórtico equilátero $p = \pi = v$, $r = 1$. Supongamos (unidades kilo y metro) I_p igual á lo necesario para resistir en buenas condiciones el máximo momento de la carga uniforme c (kg. : m. l.) que es $0,0694 c v^2$, que para $v = 10$ m. vale $6,94 c$ ó mejor $7 c$. La sección de la viga puede ser de $0,80$ m. de altura y para que la carga máxima sea de 40 kg. : cm² ó 40×10^4 kg. : m², en el hormigón armado (*) de que suponemos hecho el pórtico:

$$7 c = 40 \times 10^4 \times \frac{I_p}{0,40} ; I_p = 0,000.007 \times c (m^4)$$

Tomemos $E = 200.000$ kg. : cm² ó 2×10^9 kg. : m²; $EI_p = 14.000 c$; $EI_p \times \Lambda = 4,2 c$ y $EI_p (\Lambda - \lambda) = 2,1 c$. Resulta, dividiendo por v la primera ecuación y por v^2 la segunda y tercera, para que todas queden de las mismas dimensiones (fuerza $\times$ línea):

(*) El momento de inercia y la sección son los del sólido virtual homogéneo, equivalente al real heterogéneo.

$$\left. \begin{aligned} 3m + 2vH + \frac{3}{2}vV &= 0 \\ 2m + \frac{5}{3}vH + vV &= -EI_p \times \frac{\Lambda v}{v^2} = -4,2 \frac{c}{v} \\ \frac{3}{2}m + vH + \frac{4}{3}vV &= +EI_p \times \frac{(\Lambda - \lambda)v}{v^2} = +2,1 \frac{c}{v} \end{aligned} \right\}$$

$$m = -0,8 \frac{c}{v} ; H = -4,2 \frac{c}{v^2} ; V = +7,2 \frac{c}{v^2}$$

Nótese que los coeficientes numéricos involucran las dimensiones de EI_p (fuerza $\times$ (línea)²): los resultados son, como deben, homogéneos; m es un momento; H , V son fuerzas.

Hay una inflexión virtual (fig. 16) por bajo del punto 0:

$$m + Hi = 0 ; i = \frac{+0,8}{-4,2} v = -0,19 v$$

y otra inflexión en la viga, por ser:

$$\begin{aligned} M_v &= m + Hv = -5,0 \frac{c}{v} \\ M'_v &= m + Hv = Vv = +2,2 \frac{c}{v} \\ m'_f &= -m' = m + Vv = +6,4 \frac{c}{v} \end{aligned}$$

Para que los resultados sean comparables con los debidosá las cargas ordinarias, suponemos $c = 2.000 \text{ kg.} \cdot \text{m. l. y } v = 10 \text{ m.}$

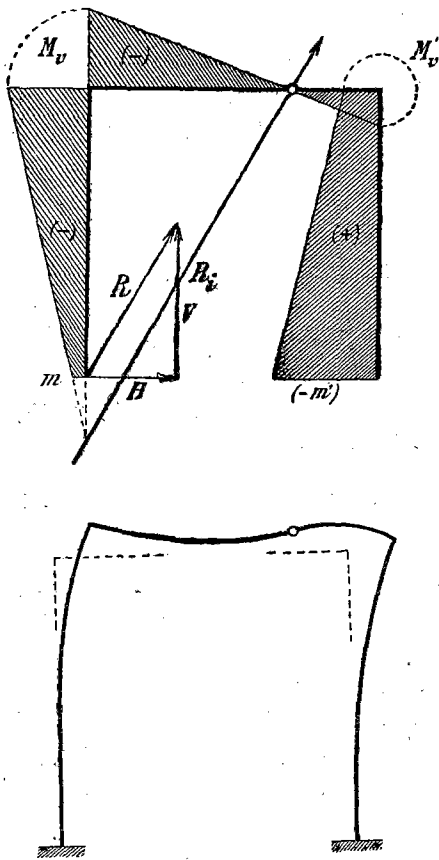


Fig. 16.

El máximo producido por c (fig. 12) es $M_c = +0,0694 cv^2 = 14.000 \text{ m.-kg.}$ en números redondos. El máximo debido á las dilataciones supuestas (las más usuales) sube á $6,4 \frac{c}{v} = 1280 \text{ m.-kg.} = (-m')$, que está representado en la fig. 16 en una escala diez veces mayor que la de las figuras 12 y 14 (*).

(*) Por equivocación al trazar la figura aparecen cambiadas las curvaturas en la viga; el buen criterio del lector corregirá nuestro error, demasiado tarde advertido.

El efecto de la sustentación izquierda, al mantener invariables, á pesar de las dilataciones, dirección y lugar del extremo del pórtico, es el mismo que produciría juntamente con aquéllas una fuerza exterior, la reacción R_i (fig. 16) si dicho extremo estuviera libre. Los elementos p y v quedan comprimidos, aquél por V , éste por H y π queda estirado por V . Los tres trabajan por flexión compuesta.

En el cálculo no han intervenido las fuerzas normales. Veamos su influencia. A los primeros miembros de siempre, que son los valores de

$$EI_p \times \int \frac{M}{EI} \frac{dM}{dR} dl = \frac{I_p}{I} \times \int M \frac{dM}{dR} dl$$

(excluidos los términos relativos á acciones directas, que ahora no existen), les faltan los relativos á las N , afectados también por el multiplicador EI_p :

$$EI_p \times \int \frac{N}{ES} \frac{dN}{dR} dl = \frac{I_p}{S} \times \int N \frac{dN}{dR} dl$$

En general (fig. 16) se tiene:

$$\begin{aligned} N_0^2 &= V ; \frac{dN}{dH} = 0 ; \frac{dN}{dV} = 1 \\ N_2^4 &= -H ; \frac{dN}{dH} = -1 ; \frac{dN}{dV} = 0 \\ N_4^6 &= -V ; \frac{dN}{dH} = 0 ; \frac{dN}{dV} = -1 \end{aligned}$$

Los términos complementarios son:

$$\begin{aligned} \text{de } (I, m) & 0 + 0 + 0 \\ \text{de } (II, H) & 0 + \frac{I_p}{S_v} \times Hv + 0 \\ \text{de } (III, V) & \frac{I_p}{S_p} \times Vp + 0 + \frac{I_p}{S_p} \times V\pi \end{aligned}$$

Apliquémoslos al caso $p = v = \pi$, $r = 1$ y naturalmente $S_v = S_p$. Para que esta sección, con la altura supuesta de 0,80 m. dé el momento de inercia 0,000 007 c , debe valer $0,80 \times 0,000 165 c = 0,000 133 c$ y el factor $\frac{I_p}{S_p}$ es $\frac{1}{19} = 0,052$, que no es un número, sino una magnitud fuerza $\times$ (línea)². Las ecuaciones corregidas, recordando que (II) y (III) están divididas por v^2 al simplificar, son:

$$\left. \begin{aligned} 3m + 2vH + \frac{3}{2}vV &= 0 \\ 2m + \left(\frac{5}{3}v + \frac{v}{19v^2} \right) H + vV &= -4,2 \frac{c}{v} \\ \frac{3}{2}m + vH + \left(\frac{4}{3}v + \frac{2v}{19v^2} \right) V &= +2,1 \frac{c}{v} \end{aligned} \right\}$$

Los términos correctivos son, como se ve, de escasísima importancia en el caso estudiado. Para concretar, con los valores numéricos ya citados; $c = 2.000 \text{ kg.} \cdot \text{m. l. y } v = 10 \text{ m.}$, las diferencias son: de 0,0052 que aumenta el coeficiente de H , que en la primitiva ecuación (II) valía 16,666; de 0,0104, incremento del de V , que en la primitiva (III) era 13,333. Las discrepancias en los valores de m , H , v , son despreciables.

Pero si los pilares son cada vez más cortos, con la misma rigidez, ó más rígidos, con la misma longitud, la resistencia opuesta á las variaciones de longitud de la viga va tomando ma-

por importancia: la reacción H será cada vez mayor y m irá también creciendo. Si la viga, con la misma rigidez se va acortando, ó, con la misma longitud, haciendo más rígida, su oposición á las variaciones de los pilares, *nula* si las contracciones ó dilataciones *absolutas*, no unitarias, son iguales en los dos, se irá aumentando y con ella la reacción V .

En general, en las construcciones bastante ó muy peraltadas la influencia de las fuerzas normales es, como se ha visto, despreciable. Por lo contrario en las obras bastante ó muy rebajadas, ó en las que tengan elementos verticales muy rígidos, la influencia de dichas fuerzas es predominante en alto grado, *exclusiva*, á veces, con ciertas formas.

Ejemplo séptimo.

Estudiemos la acción de un choque sobre el mismo pórtico equilátero. Con los valores concretos ya conocidos, la obra está en buenas condiciones de resistencia bajo un peso de 20.000 kg., repartido por igual sobre la viga. El peso de ésta es, en números redondos, 600 kg.: m. l., ó seis toneladas cada uno de los elementos del pórtico.

Veamos de qué altura debe caer sobre el centro de v un cuerpo de una tonelada para que la obra soporte en su fibra más cargada lo mismo que bajo las 20 toneladas de peso repartido, que suponemos equivalente á 10 en el centro.

$Q = 1000$ kg., aplicado estáticamente da las tres ecuaciones de siempre, con los segundos miembros (1 v), (2 v), (3 v) que para $p = \pi = v$, $r = 1$, $d = \frac{v}{2}$, son:

$$3m + 2vH + \frac{3}{2}vV = \frac{5}{8}v \times (F = 1000)$$

$$2m + \frac{5}{3}vH + vV = \frac{3}{8}v \times (F = 1000)$$

$$\frac{3}{2}m + vH + \frac{4}{3}vV = \frac{29}{48}v \times (F = 1000)$$

$$m = + \frac{1}{8}vF = + 1.250 \text{ m.-kg.}; H = + \frac{1}{8}F = + 125 \text{ kg.};$$

$$V = + \frac{1}{2}F = + 500 \text{ kg.}$$

Para calcular la flecha estática, q_e , formulemos la derivada parcial del trabajo respecto á la acción $F = 1000$ y para ello:

$$M_o^2 = m + Hu = \left(\frac{1}{8}v - \frac{1}{8}u \right) F; \quad \frac{dM}{dF} = \frac{1}{8}(v - u)$$

$$M_2^c = m + Hv + Vx = \left(\frac{1}{8}v - \frac{1}{8}v + \frac{1}{2}x \right) F;$$

$$\frac{dM}{dF} = \frac{1}{2}x$$

$$q_e = \frac{1}{EI_p} \times \left\{ \int_0^{10} \frac{(v-u)^2}{8^2} F' du + \int_0^5 \frac{x^2}{2^2} F' dx \right\} =$$

$$= \frac{6,25 \times (F = 1000 \text{ kg.})}{(15 \times 10^8) \times (7 \times 10^{-6} \times 2000)} = 0,000,3 \text{ m.}$$

El coeficiente k puede considerarse racionalmente el mismo del simple apoyo, porque hay una inflexión justamente en el extremo del pilar ($i = -\frac{m}{H} = v$) y así $k = \frac{17}{35}$.

En cuanto al valor de P , no puede ser el de todo el pórtico: 18 toneladas. Por consecuencia de la deformación, los pilares os-

cilan en sentido horizontal, absorbiendo, por tanto, energía; pero llega á ellos *transmitida* por la viga. Además, cuanto menor supongamos P , más exageramos el coeficiente $\frac{1}{1+k\frac{P}{Q}}$, de *apro-*

vechamiento de la energía total $Q\alpha$. Tomando $P = 6$ toneladas, colocamos al pórtico en condiciones algo desfavorables para su resistencia. El coeficiente es entonces

$$\frac{1}{1 + \frac{17}{35} \times \frac{6}{1}} = \frac{1}{3,914} = 0,2556$$

y la solución del problema está dada por

$$(Q_e = 10.000 \text{ kg.}) = 1000 \text{ kg.} \times \sqrt{\frac{2\alpha}{q_e}} \times \sqrt{0,2556}$$

$$\alpha = 10^2 \times 0,000,3 \times \frac{1}{2 \times 0,2556} = 0,059 \text{ m.}$$

Parecerá, á primera vista, sumamente pequeña esa altura; la energía *total* es 59 kilográmetros, de los que solamente 15 son los que se transforman en trabajo elástico. Entre 10.000 kilos estáticos y 1.000 caídos desde 0,059 m. parece que no hay paridad alguna de efectos.

Una sencilla operación aritmética da la explicación: los 10.000 kilos estáticos producen una flecha, 10 q_e , ó sea 0,003 m. y un trabajo gradual:

$$\frac{1}{2} \times 10.000 \times 0,003 = 15 \text{ kgm.}$$

exactamente igual al calculado bajo la acción del choque. Las construcciones muy rígidas, sobre todas ellas las de hormigón armado, sufren deformaciones tan escasas que el trabajo elástico es forzosamente *pequeñísimo*.

La flecha dinámica, producida por el choque de 1.000 kilos desde 0,059 metros, es, finalmente,

$$q_e = \sqrt{\frac{2 \times 0,059 \times 0,0003}{0,2556}} = \sqrt{0,000,123} = 0,011 \text{ m.,}$$

casi cuatro veces mayor que la flecha estática, producida por el peso de 10.000 kilos.

Recordemos á este propósito los resultados experimentales obtenidos por la Comisión francesa del hormigón armado en uno de los palacios de la Exposición de París de 1900. Pesos hasta de 252 kilogramos (trozos de hormigón) fueron dejados caer de alturas variables hasta 13 metros, directamente sobre el centro de una viga-suelo de 9 metros de luz, unida por el forjado con otras homólogas, á derecha é izquierda, de 3 en 3 metros, originando, en el caso peor, un régimen vibratorio de 2 segundos de duración, con 15 oscilaciones y una amplitud máxima de 0,0146 m.

Como resultante práctica de dicho experimento se pretendió deducir que á igualdad de efecto (máxima deformación) entre un choque ($Q\alpha$) kilográmetros y una carga estática, Q_e , la relación valía, como promedio, *en aquellas circunstancias*:

$$p = \frac{Q_e}{Q\alpha} \text{ alrededor de } 10 \text{ (metros)}^{-1}$$

En nuestro ejemplo hemos encontrado

$$f_{1000} = \frac{Q_e = 10.000 \text{ kg.}}{(Q = 1000 \text{ kg.}) \times (0,059 \text{ m.})} = 169 \text{ (metros)}^{-1}$$

La discrepancia es enorme, como lógicamente debía esperarse. Ya hicimos notar la colosal influencia del valor de α ó de la velocidad $\sqrt{2g\alpha}$ sobre la distribución de la energía cinética total, $Q\alpha$, en las partes utilizada y perdida.

No hay comparación posible entre los efectos de caídas, unas de pocos centímetros y otras de muchos metros.

Rehagamos nuestro cálculo para $Q' = 250$ kilogramos, á los que corresponde $q'_e = 0,000,075$ m. El coeficiente de aprovechamiento vale ahora.

$$\frac{1}{1 + \frac{17}{35} \times \frac{6}{0,25}} = \frac{1}{12,65} = 0,079$$

y la altura de caída necesaria es:

$$\alpha' = \frac{(10.000)^2}{(250)^2} \times \frac{0,000,075}{2 \times 0,079} = 0,759 \text{ m.}$$

y la relación vale:

$$\rho_{250} = \frac{Q_e = 10.000}{(Q' = 250) \times (0,759)} = 52,68.$$

Y, análogamente, para $Q'' = 100$ kilogramos

$$\frac{1}{1 + \frac{17}{35} \times \frac{6}{0,1}} = 0,0332 ; \alpha'' = 4,518 \text{ m.}$$

$$\rho_{100} = \frac{Q_e = 10.000}{(Q'' = 100) \times 4,518} = 22,13.$$

experimentación lo manifestó bien claro. Y con el aumento considerable de $\frac{P}{Q}$, ρ tiene que decrecer mucho.

La relación $\frac{Q_e}{Q\alpha}$ no puede, racional, ni experimentalmente, tener un valor *determinado* sino para *determinadas condiciones* $(\alpha, \frac{P}{Q})$ de las que es función.

Ejemplo octavo.

Sea (fig. 17 a) la sección de un tubo vertical, rectangular, de lados $2p$ y $2v$.

En el sentido normal al plano de la figura los espesores van generalmente variando por retallos ó de un modo gradual y con ellos los momentos de inercia verticales, cuyos valores, constantes en la zona de un retallo (ó los *medios* en una rebanada de poca altura) llamaremos I_p é $I_v = r I_p$

Tratamos de estudiar en una chimenea, ó un depósito de agua, ó un silo, el efecto de la diferencia de temperaturas, ó de presiones, exterior é interior.

Sean, en general, λ_s y λ_i las variaciones unitarias de longitud que una causa exterior, si las reacciones y el mutuo enlace no lo coartaran, produciría en los paramentos exterior é interior. Las contaremos positivamente si son dilataciones y viceversa.

Prescindiendo por ahora de los efectos que se originan en sentido vertical, que después estudiaremos, una rebanada cualquiera, supuesta por el momento sin continuidad alguna con las adyacentes inferior y superior, sufre una variación de longitud uniforme, λ_0 , en su fibra neutra, y que se opera en completa li-

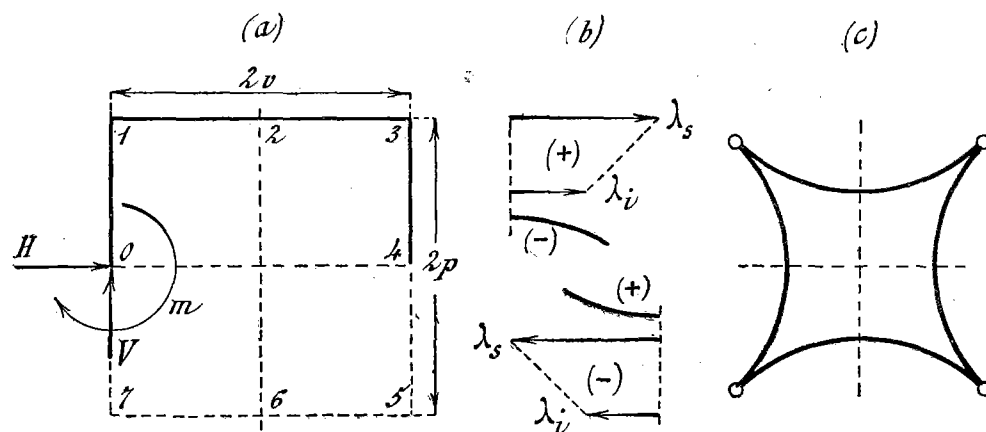


Fig. 17.

Como se ve, á medida que el peso chocante es menor, la relación de equivalencia, ρ , entre el peso estático y el trabajo $Q\alpha$, va siendo cada vez menor. Se comprende bien que la Comisión francesa, operando con alturas hasta de 13 metros (*), haya obtenido el valor 10, tanto más, cuanto que la masa de la construcción era mucho mayor relativamente á la del peso chocante que en nuestro caso. La viga era allí una entre otras muchas iguales, espaciadas 3 metros entre ejes, ligadas todas por un forjado: aun suponiendo este cortado en los ejes de entrepaños, á la viga correspondían 1.100 kilogramos de peso por metro de longitud.

Por efecto de la solidaridad, la zona interesada abarcaba mucho más de los 3 metros, estrictamente atribuidos á una viga; la

bertad y no ocasiona deformación relativa alguna. *Tiende á sufrir* además, una serie de variaciones, diferentes para cada fibra, desde $(\lambda_s - \lambda_0)$ en las exteriores hasta $(\lambda_i - \lambda_0)$ en las interiores, aquélla del mismo signo de λ_s y la otra $(\lambda_i - \lambda_0) = -(\lambda_0 - \lambda_i)$ de signo contrario. Cada pared *tiende á encorvarse*, presentando la concavidad del lado del λ de menor valor relativo (fig. 17 b), es decir, del de *menores* dilataciones ó del de *mayores* contracciones.

La deformación del conjunto, caso de existir articulaciones en los vértices (fig. 17 c), se operaría sin traba alguna, tomando cada lado la curvatura correspondiente á un ángulo de continuidad elemental

$$\frac{(\lambda_s - \lambda_i) dl}{e}$$

constante ó variable de un punto á otro, según fuera constante ó variable $(\lambda_s - \lambda_i) = \Delta$.

La curvatura (fig. 17 b) se considera de costumbre como ne-

(*) Corresponde á esa altura una velocidad de 16 metros por segundo, que produce lesiones locales muy importantes, con absorción de una considerable parte de la energía cinética.

gativa cuando la concavidad está del lado de las fibras inferiores y viceversa, es decir, se le atribuye un signo contrario al de la diferencia $(\lambda_s - \lambda_i)$, sean estas positivas ó negativas.

Si los ángulos son rígidos, es decir, si las paredes están mutuamente empotradas por continuidad y $(\lambda_s - \lambda_i)$ es constante y uno mismo el momento de inercia en todo el contorno, no hay más deformación posible que la correspondiente á la variación unitaria, λ_o , de la fibra neutra. En cualquier sección, la fibra superior está *forzada* á sufrir una variación $(\lambda_o - \lambda_s)$, igual y de signo contrario á la diferencia $(\lambda_s - \lambda_o)$; análogamente, la fibra inferior está obligada á soportar $(\lambda_o - \lambda_i)$ igual y de opuesto signo á $(\lambda_i - \lambda_o)$. Cualesquiera que sean λ_s y λ_i las variaciones de la fibra superior, y, más en general, de todas las por encima de la neutra, son de signo contrario al correspondiente en las fibras inferiores á la misma. En la sección se desarrollan los mismos efectos que *produciría un momento antagonista*, un par flector tal que impusiera á cada fibra una variación $-(\lambda - \lambda_o)$.

Un momento positivo produce una curvatura *positiva*, medida por el ángulo

$$+ \frac{M}{EI} dl$$

Una diferencia positiva de variaciones, $(\lambda_s - \lambda_i)$ *tiende* á originar una curvatura negativa, medida por

$$- \frac{\lambda_s - \lambda_i}{e} dl$$

El momento antagonista, el que impide la deformación de la pieza, está dado por

$$+ \frac{M^a}{EI} dl - \frac{\lambda_s - \lambda_i}{e} dl = 0; M^a = \frac{EI(\lambda_s - \lambda_i)}{e} = \frac{EI\Delta}{e}$$

con el mismo signo de Δ . Si ésta es positiva tiende á producirse (fig. 17 b) una curvatura negativa; para que no se produzca, el par antagonista debe ser positivo, como Δ . Y viceversa.

Así pues, en las condiciones supuestas, si Δ es constante, *constante es el momento* $\frac{EI\Delta}{e}$ que virtualmente soportan todas las secciones, y á él se reducen todas las reacciones provocadas por el desequilibrio de temperaturas ó de estados higrométricos.

Fácil es, por otra parte, asegurarse de esto, que á primera vista parece paradójico: se tiende á creer que las paredes se deforman, bombeándose del lado de las mayores dilataciones ó viceversa.

Supongamos que en la sección 0 (fig. 17 a) se originan las tres reacciones m , H , V , cuando la causa externa *tiende* á produ-

cir en cada punto una curvatura $-\frac{(\lambda_s - \lambda_i)}{e} dl$, lo mismo

que si actuara un momento $-\frac{EI(\lambda_s - \lambda_i)}{e} = -M^a$.

Las expresiones del momento flector con un punto cualquiera son:

$$M_0^1 = m - Hv - M^a$$

$$M_1^5 = m - Hp + Vx - M^a$$

$$M_5^5 = m - Hp + Hz + V \times 2v - M^a$$

Por la simetría, los momentos en 1 y en 3 deben ser iguales:

$$m - Hp - M^a = m - Hp + V \times 2v - M^a ;$$

V tiene que ser nulo. Del mismo modo deben ser iguales en 3 y en 5:

$$m - Hp + 0 - M^a = m - Hp + H \times 2p + 0 - M^a ;$$

H es nulo también. El momento flector en cualquier parte es $(m - M^a)$. La sección 0, extremo inferior del elemento (01) debe tener un recorrido nulo respecto á sí misma, considerada como extremo superior de (012 ... 670):

$$0 = \int_0^L (m - M^a) \times 1 \times dl = (m - M^a) \times L$$

llamando L la longitud total (012 ... 670). Luego $m = M^a$: el par m existe necesariamente y tiene el valor exacto del momento antagonista; su efecto en cualquier sección es anular la curvatura $-\frac{\Delta}{e} dl$ que *sin él* se produciría. Finalmente, la flexión ó la deformación son nulas en todos los puntos.

Lo mismo resulta en cualquier figura sin simetría alguna, siempre que el momento de inercia ó, mejor dicho, su relación al espesor, $\frac{I}{e}$, sea constante. Mientras la causa perturbadora

sea igual para todos los puntos, iguales son sus efectos: en cada punto *tiende* á producirse una curvatura $-\frac{\lambda_s - \lambda_i}{e} dl$, pero la

continuidad del contorno engendra la reacción-par antagonista-

M^a , que á su vez *tiende* á producir la curvatura $\frac{EI(\lambda_s - \lambda_i)}{e} \times$

$\frac{1}{EI} dl$, igual y opuesta á aquélla. Y no hay deformación parcial ninguna: sólo queda la general, que se opera conservándose la pieza semejante á sí misma en la relación $\frac{1 + \lambda_o}{1}$.

Si $(\lambda_s - \lambda_i)$ ó $\frac{I}{e}$, ó los dos, varían, el problema es perfecta-

mente factible, como en otro ejemplo veremos, y se reduce al estudio de una pieza que en cada punto donde el momento de inercia y el espesor son I , e , soporta una causa externa virtual igual y contraria al par antagonista, es decir $-M^a = -\frac{EI\Delta}{e}$.

En el sentido vertical sucede lo mismo antes expuesto mientras consideremos un trozo de pared entre otros dos: no hay deformación porque lo impide la continuidad con los adyacentes. Con estos sucede lo mismo hasta llegar á los finales, en los que las circunstancias varían radicalmente. Si están sustentados por un elemento bastante rígido para soportar el par $-\frac{EI\Delta}{e}$ ó, lo que es igual, para desarrollar sobre el primer elemento de pared la reacción-par antagonista M^a , no hay más deformación en sentido vertical que la uniforme debida á λ_o . Tal sucede en el arranque de la pared del cimientó de una chimenea.

Si el elemento termina sin que *otro* lo sustente, le falta allí la reacción M^a y se deforma, á menos que los adyacentes en sentido horizontal le ayuden, siendo á su vez ayudados hasta llegar á unos que por sí solos puedan desarrollar las reacciones necesarias. Esto sucede en la boca de una chimenea poligonal.

Sea (fig. 18), en planta y alzado una chimenea de altura a y supongamos cortada la pared, de longitud horizontal ó ancho $2p$ y espesor e , por la unión con las dos paredes de ancho $2v$. Al estar aquélla libre se deforma tomando la curvatura constante $-\frac{\Delta}{e} da$, lo mismo que si obrara sobre ella el momento cons-

tante $-\frac{EI\Delta}{e}$ que en el arranque se encargaría de equilibrar la reacción del cimientó ó fondo.

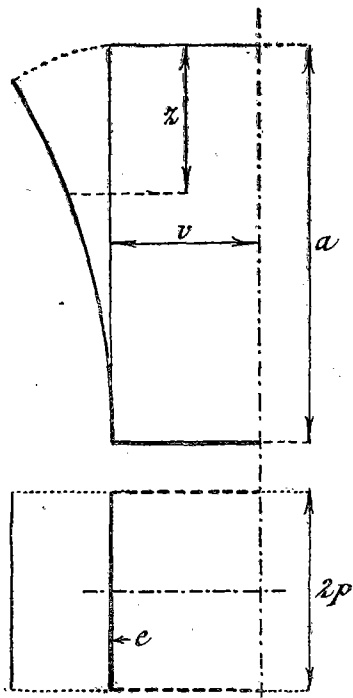


Fig. 18.

Una carga virtual c kilogramos por unidad de superficie, ó $2pc$ por unidad de altura produce un momento constante μ si aplicada hasta una profundidad z

$$2pc \frac{z^2}{2} = \mu ; 2pc = \frac{\mu}{z^2}$$

El efecto en la pared libre es idéntico al producido por $\frac{\mu}{z^2}$, dando á μ el valor constante $-\frac{EI\Delta}{e}$

$$(2pc) = -\frac{EI\Delta}{e} \times \frac{1}{z^2}$$

Si las paredes paralelas al plano de la figura desarrollan cada una en cada punto á la profundidad z reacciones horizontales

$$r = pc = +\frac{EI\Delta}{e} \times \frac{1}{2z^2} \text{ (kg. : m.l.)}$$

los bordes de la pared en estudio se mantendrán verticales, sin deformación; pero los demás elementos se deformarán como los de una serie de piezas horizontales, de altura dz , anchura e , empujadas en sus extremos, salvando la luz $2p$ bajo la acción de una carga unitaria

$$q = -\frac{EI\Delta}{e} \times \frac{dz}{z^2} \times \frac{1}{2p} \text{ kg. : m.l.).}$$

Para $z = 0$, en el borde superior, q sería infinita, como era de esperar, dada la definición de esa carga, que hubiera de producir bruscamente en el primer elemento una curvatura finita. La asimilación de efectos no puede llevarse hasta el límite. Lo que sí puede colegirse es que la deformación de la boca será muy sensible y que, contra lo deducido por el estudio de una rebanada horizontal aislada, existirá en todas ellas una deformación, del mismo género de las producidas por una carga horizontal q , pero tanto menores cuanto más cerca del cimientó se consideren (*).

(*) No hay contradicción entre las deducciones, puesto que esa deformabilidad horizontal procede precisamente de la continuidad entre una rebanada y sus inmediatas, superior é inferior, continuidad de que allí prescindimos.

A su vez, esta acción beneficiosa del cimientó produce una nueva perturbación. Las rebanadas contiguas á él debieran dilatarse libremente λ_0 , y esta variación no concuerda en general con la λ , propia de aquella parte. El efecto perturbador es todavía más sensible cuando se trata de cargas interiores, que ponen en tensión las paredes; á cierta distancia del fondo se estiran libre ó casi libremente, pero á medida que esa distancia disminuye hasta llegar á la zona de unión, donde por ser mayores las cargas debieran dilatarse más, lo impide, comprimiéndolas relativamente, la acción debida á la menor extensibilidad del fondo.

El problema es, como se ve, mucho más complejo de lo que á primera vista parece, aun siendo constante la causa de desequilibrio $\Delta = (\lambda_s - \lambda_i)$.

En resumen: en una chimenea rectangular ó poligonal, en la que $\lambda_s - \lambda_i$ es negativo, resultan los efectos siguientes:

El momento antagonista, negativo, produce horizontalmente en las fibras exteriores, á v_s de la neutra, tensiones uniformes de valor absoluto

$$\frac{EI\Delta}{e} \times \frac{v_s}{I} = E\Delta \frac{v_s}{e}$$

y compresiones $E\Delta \frac{v_i}{e}$ en las fibras interiores.

En sentido vertical, si se considera el tubo indefinido, prescindiendo de los efectos perturbadores, las tensiones y compresiones alcanzan esos mismos valores en los mismos lugares, salvo las pequeñas diferencias que resultan de los valores de v_s , distancia del centro de gravedad al paramento en las secciones vertical y horizontal.

La influencia del fondo ó cimientó se traduce en una carga unitaria decreciente desde un valor $E(\lambda_i - \lambda_0)$ en la unión hasta anularse prácticamente á cierta altura.

La influencia de la boca equivale á la acción de una carga interior q , decreciente con el cuadrado de la profundidad y que produce los efectos que en otro ejemplo veremos, en general, tensiones horizontales en la zona central exterior y en las laterales interiores. Y, además, otras tensiones horizontales, r , uniformemente repartidas en el espesor e y decrecientes también con el cuadrado de z .

Las partes que más trabajan son, por tanto, las zonas centrales exteriores en la región más alta. Las armaduras, si se trata de hormigón armado, deben concentrarse en el exterior, no sólo por localizarse allí las tensiones, sino porque al llevar en ese sentido la fibra neutra, disminuye el valor absoluto, proporcional á v_s .

En la chimenea circular las cargas más importantes son las mismas tensiones $E\Delta \frac{v_s}{e}$, algo menores en sentido horizontal por serlo el v_s de la sección vertical (*). Los efectos perturbadores de la boca se atenúan mucho, reduciéndose á las tensiones provocadas por una presión interior virtual

$$-\frac{EI\Delta}{e} \times \frac{dz}{z^2} \times \frac{1}{2p} \text{ (kg. : m.l.)}$$

es decir, un promedio, si se reparte de un modo uniforme en las secciones resistentes $2 \times edz$, de

$$-EI\Delta \times \frac{1}{z^2} \times \frac{1}{2e^2} \text{ (kg. : m}^2\text{)}$$

(Continuará.)

(*) En un material homogéneo, en el que la sección vertical de un elemento es un rectángulo y la horizontal un sector de corona. En el hormigón armado, la armadura horizontal se pone ciñendo á la vertical y la diferencia entre los v_s se atenúa y hasta se invierte.