

Y, en fin, en todo puso el mismo cuidado, el mismo interés que en él era, algo más que cumplimiento de un encargo, verdadero cariño para cuanto hacía por el bien de la ciudad ó de la provincia.

* * *

Hasta aquí, la breve noticia que puedo dar de su vida de estudio y de trabajo que mucho mejor que yo hubiese podido, sin duda, elogiar, cual se merece, uno de sus dignos compañeros del Cuerpo. Mas hay una razón para que yo lo hiciera, y por eso he escrito estas líneas.

No es sólo toda la vida del hombre, aquella parte de su vida pública que por ser la más conocida es la que más llama nuestra atención; hay otra vida, la del compañerismo, la de la amistad, y aún más íntimamente la del hogar. La muerte de un individuo, que se va sintiendo con mayor intensidad en cada una de estas esferas, despierta en ellas ese conjunto de recuerdos gratos cuando el que muere es un hombre bueno, ese cúmulo de acciones que llevan lágrimas á nuestros ojos y consuelo á nuestro corazón. ¿Por qué? ¿Es que nos alegramos de que hayan muerto los buenos? ¡No!... pero nos alegramos de su bondad; los vimos pasar por estos que para algunos son caminos tortuosos con tal firmeza, con tal rectitud, que admirados contemplamos, cuando ya no caminan, cómo iban esos espíritus fuertes derechos hacia el bien, y eso nos complace. Yo tengo para con Felip esa deuda, la deuda de sus recuerdos, todos buenos, recuerdos, en primer término, de mi padre y en seguida míos. Los primeros, tanto más hondos cuanto que á mí me llevan hacia otra tumba, en donde el agradecimiento de un muerto los guarda, son, sin duda, los que engendraron los otros, los que al hacerme ver en Felip al amigo de mi padre, á su compañero de carrera, á su visitador asiduo de enfermo, hacían que yo le creyese también amigo mío, amigo de más edad y superior criterio de quien sólo esperaba rectos y doc-tos consejos. Y no fué vana esta presunción: él me animó al término de mi carrera y luego al comienzo de mi ejercicio—que es más difícil que el término—, él tuvo para mí palabras de aliento é ideas de esperanza, él fué sí, un amigo, un amigo de corazón, de esos para los que, aunque la muerte tronche su vida, no am- nora en las almas agradecidas el recuerdo.

Natural es que yo viese con gratitud reflejarse en su trato para conmigo toda la bondad de su vida, y natural es que yo, al considerar que si á todos los compañeros les causa pena su pérdida, y á mí con ellos, piense en su familia, en ese hogar bendito en que todos hallamos nuestro mejor sosiego, y al pensar en ellos aspire á que mis palabras sean para los suyos de resignación y consuelo... que sí serán, porque yo recuerdo que cuando murió mi padre uno de los pésames que más agradecí fué el de Felip, en el que éste, como yo ahora, evocaba recuerdos.

JOSÉ M.^a JORDÁN.

Barcelona, Noviembre 1912.

* * *

La REVISTA DE OBRAS PÚBLICAS, interpretando el sentimiento de los Ingenieros de Caminos, se asocia sinceramente á dicha manifestación de pésame por la muerte del que fué nuestro respetado amigo y distinguido compañero.

LOS MÉTODOS DE CÁLCULO DE ESTRUCTURAS DERIVADOS DEL TRABAJO ELÁSTICO

POR D. JUAN MANUEL DE ZAFRA,

Profesor de Hormigón armado y de Puertos en la Escuela especial de Caminos Canales y Puertos.

(Continuación.)

Ejemplo primero.

Una pieza de sección constante está empotrada en un extremo y sometida en el otro á una acción P , normal al eje (fig. 7.^a)

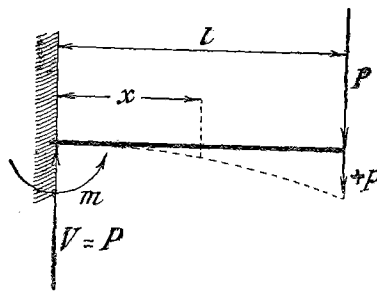


Fig. 7.^a

Son conocidas desde luego: la reacción-fuerza $V=P$ y la reacción-momento $m=-Pl$, con el signo de manifiesto, porque el momento de la acción es positivo (sentido de las agujas de un reloj). Sustituiremos por x la variable fundamental l .

En un punto cualquiera, x , como $V=P$,

$$M = -Pl + Px \quad ; \quad \frac{dM}{dP} = (x - l).$$

N es nulo: prescindiendo por ahora del esfuerzo cortante ($T=V$):

$$\begin{aligned} \frac{d(\delta)}{dP} &= \int_0^l \frac{P(x-l)}{EI} \times (x-l) dx = \\ &= \frac{P}{EI} \left\{ \frac{l^3}{3} - 2 \frac{l^3}{2} + l^3 \right\} = \frac{Pl^3}{EI} \times \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

El recorrido de la acción P es la flecha, de expresión bien conocida, $\frac{Pl^3}{3EI}$, en el mismo sentido de P , puesto que su signo es positivo.

La deformación en un punto cualquiera de abscisa ξ , donde no hay acción ninguna, requiere, como hemos visto, considerar el equilibrio bajo la acción unidad allí supuesta. Los valores:

$$\begin{aligned} M_\xi &= -1 \times \xi + 1 \times x \text{ (desde } x=0 \text{ hasta } x=\xi) \\ M_\xi &= 0 \text{ (desde } x=\xi \text{ hasta } x=l) \end{aligned}$$

sustituyen á las derivadas parciales corrientes.

$$\begin{aligned} y_\xi &= \int_0^\xi \frac{P}{EI} (x-l)(x-\xi) dx = \\ &= \frac{P}{EI} \int_0^\xi (x^2 - lx - \xi x + l\xi) dx = \\ &= \frac{P}{EI} \left(\frac{\xi^3}{3} - \frac{l\xi^2}{2} - \frac{\xi^3}{2} + l\xi^2 \right) = \frac{P}{EI} \left(\frac{l\xi^2}{2} - \frac{\xi^3}{6} \right) = y_\xi \end{aligned}$$

expresión idéntica á la ecuación de la elástica, obtenida, como de costumbre, por doble integración de $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M}{EI}$.

El teorema de Castigliano da la ecuación de la elástica por simple integración y las constantes resultan desde luego determinadas.

Si introducimos el término debido al esfuerzo constante, T , para hacer *exacto* el resultado *aproximado*:

$$T = V = P; \quad \frac{dT}{dP} = 1$$

$$\frac{d(\mathfrak{F})_0^1}{dP} = \frac{Pl^3}{3EI} + \alpha \int_0^1 \frac{P}{E_t S} \times 1 \times dx.$$

Para el valor ordinario de la elasticidad transversal $E_t = 0,4 E$, el recorrido exacto p es, llamando $f = \frac{Pl^3}{EI}$ la flecha aproximada,

$$p = f + \alpha \frac{Pl}{0,4 ES}.$$

Si la sección S es rectangular, de anchura a y altura una fracción de la longitud, nl , ($n < 1$), el coeficiente de forma, α , vale 1,2:

$$p = \frac{Pl^3}{3E \times \frac{an^3 l^3}{12}} + \frac{1,2}{0,4} \frac{Pl}{Eanl} = \frac{Pl}{ES} \left\{ \frac{4}{n^3} + 0,3 \right\}$$

Cuanto más pequeña es n , es decir, cuanto menor es el peralte de la pieza, menor es la influencia de T .

Para $n = 0,5, 0,2, 0,1$, la flecha parcial debida á T es 0,019, 0,003, 0,000.75 de la correspondiente á M . El error relativo cometido es en cada caso algo menor que esos números.

Y obsérvese que la influencia de T , constante en toda la longitud de la pieza, está favorecida al máximo.

Ejemplo segundo.

La misma pieza está ayudada por un tirante articulado á ella y al muro (fig. 8.^a).

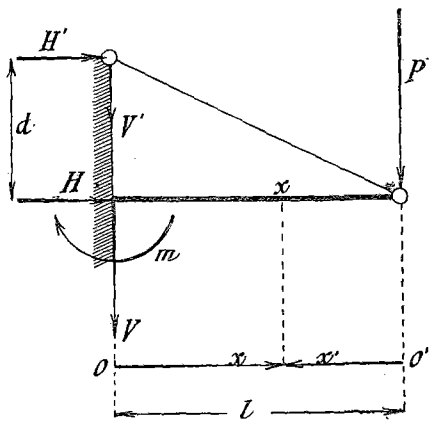


Fig. 8.^a

El sistema es hiperestático, dos veces indeterminado: sólo se sabe por la Estática:

$$H + H' = 0; \quad V + V' + P = 0; \quad Pl - Hd + m = 0.$$

Preferimos, siempre que un momento es desconocido, atribuirle un valor positivo: el cálculo se encarga de confirmarlo ó de negarlo.

Análogamente, las reacciones fuerzas, que en el ejemplo anterior dibujamos, desde luego, en su dirección, escribiendo $V = P$, pueden, y en general es preferible, suponerse, como hacemos en este ejemplo, positivas en la misma dirección que P , escribiendo $V + V' + P = 0$.

En una primera aproximación prescindiremos del trabajo elástico del tirante, suponiendo éste infinitamente rígido; su papel es introducir *geométricamente* una reacción oblicua en el extremo de la pieza.

$$M = m - Vx; \quad N = H = \frac{m + Pl}{d}; \quad \frac{dM}{dm} = 1; \quad \frac{dN}{dm} = \frac{1}{d}.$$

El recorrido μ de m debe ser nulo si el empotramiento está bien hecho. Según la regla expuesta, deberíamos tomar como origen el extremo de la pieza O' é integrar hasta el empotramiento. Como los momentos en una misma sección (fig. 8.^a) son iguales y contrarios, según se considere el trozo á la derecha ó á la izquierda de la misma $M = -M'$; $dM = -dM'$ y el producto $M' dM'$ relativo á cualquier sección es idéntico al $M dM$. El total, de extremo á extremo, es:

$$\int_{O'}^{x'} M' dM' = \int_0^x M dM.$$

Recuérdese además que el trabajo elástico (37) es función de los cuadrados de M, N, T , cuyos signos en nada influyen. El trabajo elástico *total*, cantidad esencialmente positiva, es el mismo en cualquier sentido que se cuente la variable fundamental l .

$$\mu = \frac{d(\mathfrak{F})_0^1}{dm} = \int_0^l \frac{m - Vx}{EI} dx + \int_0^l \frac{m + Pl}{d^2 \times ES} dx = 0$$

$$\frac{1}{EI} \left\{ ml - V \frac{l^2}{2} \right\} + \frac{1}{d^2 ES} \left\{ ml + Pl^2 \right\} = 0$$

$$m = \frac{V \times d^2 S - 2P \times I}{d^2 S + I} \times \frac{l}{2}.$$

Análogamente, el recorrido de V es nulo:

$$M = m - Vx; \quad N = H; \quad \frac{dM}{dV} = -x; \quad \frac{dN}{dV} = 0$$

$$v = \frac{d(\mathfrak{F})_0^1}{dV} = \int_0^l \frac{m - Vx}{EI} x dx = \frac{1}{EI} \left\{ m \frac{l^2}{2} - V \frac{l^3}{3} \right\} = 0$$

$$m = \frac{2}{3} V l$$

que juntamente con la anterior, determina V y m .

$$V = - \frac{6I}{4I + Sd^2} P; \quad m = - \frac{4I}{4I + Sd^2} Pl$$

y con la de momentos estáticos:

$$H = \frac{m + Pl}{d} = \frac{Sd}{4I + Sd^2} P = -H'$$

Los signos negativos de V, m y H' demuestran, como dijimos, los verdaderos sentidos que les corresponden, opuestos á los representados: el de H , positivo, es el mismo de la figura.

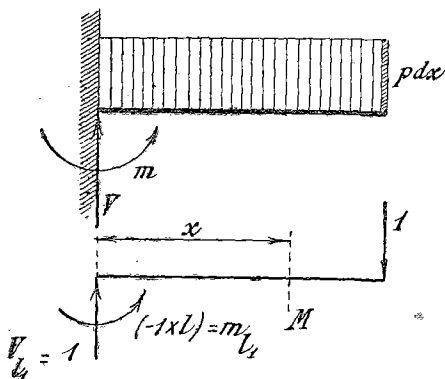
Para $d = 0$, $m = -Pl$, $H = 0$. Es de notar que V resulta entonces $= -\frac{3}{2} P$, pero V' existe siempre, y en ese caso la reacción es la suma de las dos que allí se reúnen

$$V + V' = -P.$$

Como se ve, es siempre la misma serie de operaciones la que resuelve todos los problemas, con la máxima sencillez compatible con la índole de los sistemas hiperestáticos. El ejemplo presente se complica más, si, como en otro análogo haremos, se tiene en cuenta la elasticidad propia del tirante (ó tornapunta).

Ejemplo tercero.

Sea (fig. 9.^a) una pieza empotrada y sometida á una carga uniforme.

Fig. 9.^a

El sistema ΣA es ahora $\int_0^l (p dx)$, suma de infinitas acciones ($p dx$). Según la regla general, para hallar el recorrido de un punto debiéramos derivar M , N , respecto á la acción ($p dx$) que allí se ejerce, derivación que resulta imposible en general.

En este caso:

$$m = -p \frac{l^2}{2}; V = -pl; M = -p \frac{l^2}{2} + plx - p \frac{x^2}{2} = -\frac{p}{2} (l-x)^2$$

y no se puede calcular directamente $\frac{dM}{d(p dx)}$.

Recordemos que, cualquiera que sea el número y distribución de acciones, las derivadas parciales de M , N , T , respecto á una de aquéllas, son los valores particulares que M , N , T , toman en el equilibrio bajo la única acción unidad en aquel punto aplicada. Las derivadas se pueden, por tanto, escribir directamente, lo mismo que cuando en el punto no hay acción alguna.

Así, para la unidad en el extremo de la pieza (fig. 9.^a) indicando con los subíndices (1) «bajo la unidad actuante en 1».

$$m_{11} = -1 \times l; V_{11} = 1; M_{x(1)} = -1 \times l + 1 \times x = x - l = \frac{dM}{d(p dx)_l}$$

$$\begin{aligned} \frac{d(\mathcal{F})_0^1}{d(p dx)_l} &= \int_0^l -\frac{p}{2} \times \frac{(l-x)^2 \times (x-l) dx}{EI} = \\ &= -\frac{p}{2EI} \left(\frac{l^4}{4} - 3 \frac{l^3}{3} + 3 \frac{l^2}{2} - l^4 \right) = + \frac{pl^4}{8EI} \end{aligned}$$

Ejemplo cuarto.

Sea (fig. 10) la misma pieza anterior, apeada en su extremo sobre un puntal de madera floja, coeficiente de elasticidad E' , longitud λ y sección s . El sistema se ha hecho hiperestático: la reacción del puntal y las dos del empotramiento son desconocidas, pero están ligadas por

$$m + p \frac{l^2}{2} - Rl = 0; V + R = pl.$$

El recorrido del extremo será el acortamiento del puntal,

$$\frac{R}{s} \times \frac{\lambda}{E'},$$

con signo — por ser su sentido opuesto al de R .

$$M = m + Vx - p \frac{x^2}{2} =$$

$$= R(l-x) - \frac{p}{2} (l-x)^2; \frac{dM}{dR} = (l-x)$$

$$\begin{aligned} \frac{d(\mathcal{F})_0^1}{dR} &= \int_0^l \frac{1}{EI} \left\{ R(l-x) - \frac{p}{2} (l-x)^2 \right\} dx = \\ &= \frac{1}{EI} \left\{ \frac{Rl^2}{2} - \frac{pl^3}{6} \right\} = -\frac{Rl}{E's} \end{aligned}$$

$$\frac{pl^4}{8EI} = R \left\{ \frac{\lambda}{E's} + \frac{l^3}{3EI} \right\}; R = \frac{pl^4}{8EI \left(\frac{\lambda}{E's} + \frac{l^3}{3EI} \right)}$$

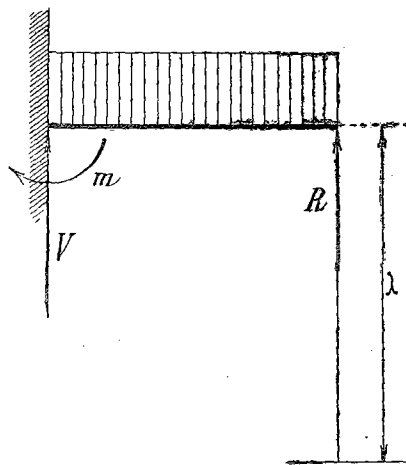


Fig. 10.

Si el apeo es completamente rígido, $\frac{\lambda}{E's} = 0$, y se recae en el valor conocido $R = \frac{3}{8} pl$.

La flecha del extremo resulta finalmente el recorrido cambiado de signo ó: $\frac{pl^4}{8EI} - \frac{Rl^3}{3EI}$, suma algebraica de las correspondientes á las acciones exteriores $\int_0^l p dx$ y R , cuyos sentidos son contrarios, ó bien:

$$\begin{aligned} \frac{pl^4}{8EI} \left\{ 1 - \frac{l^3}{3EI \left(\frac{\lambda}{E's} + \frac{l^3}{3EI} \right)} \right\} = \\ = \frac{pl^4}{8EI} \times \frac{1}{1 + \frac{E's l^3}{3EI \lambda}} \end{aligned}$$

Conocido R , lo son también V y m .

Ejemplo quinto.

Sea (fig. 11) un pórtico, formado por dos pilares, de alturas, p , π , desiguales, rígidamente unidos por una viga, que salva el vano v . Los pilares están cimentados por medio de basas, que por su gran superficie resultan prácticamente equivalentes á empotramientos.

Directamente, ó por el intermedio de forjados que ligen dos pórticos, pueden sufrir éstos acciones aisladas, ó repartidas, verticales, horizontales, ó ambas á un tiempo, y además variaciones de volumen.

La construcción es tres veces indeterminada. Sean variables independientes las tres reacciones V , H , m del pilar izquierdo. La Estática determina en función de éstas, las otras tres.

El momento de inercia, igual para los dos pilares, es I_p y el de la viga I_v . La relación $I_p : I_v = r$. El trabajo de flexión es

predominante, y en un primer cálculo prescindimos de los efectos de fuerzas normales y tangenciales.

La variable fundamental, l , longitud del eje de la pieza poligonal, la sustituiremos por claridad: en el pilar p por u ; en el π por z y en la viga por x .

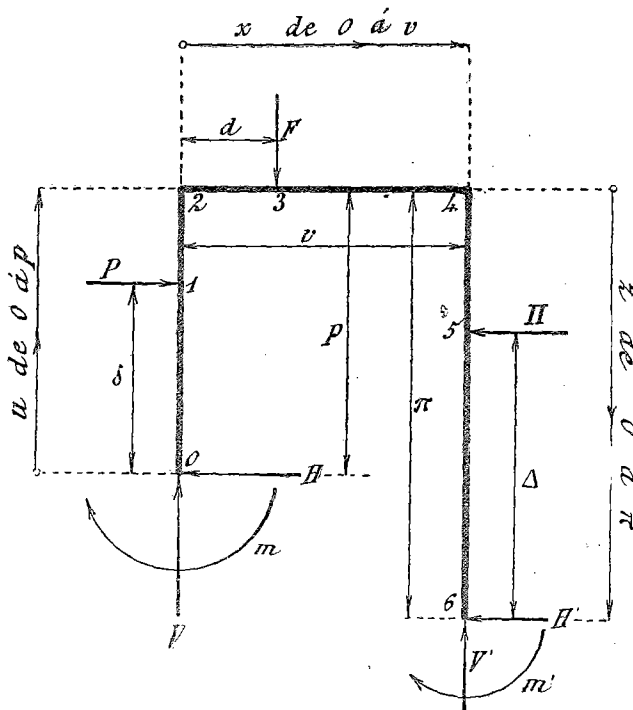


Fig. 11.

Consideremos primero una sola acción horizontal P en el punto 1, á δ por cima del origen 0.

Los valores sucesivos de M , momento flector, son:

$$\begin{aligned} M_0^1 &= m + Hu & u \text{ de } 0 \text{ á } \delta \\ M_1^2 &= m + Hu - Pu + P\delta & u \text{ de } \delta \text{ á } p \\ M_2^3 &= m + Hp - Pp + P\delta + Vx & x \text{ de } 0 \text{ á } v \\ M_3^6 &= m + Hp - Hz - Pp + P\delta + Vz + Vv & z \text{ de } 0 \text{ á } \pi \end{aligned}$$

Todas las derivadas parciales respecto á m son 1.

Multiplicando por EI_p todos los términos de la expresión (39) resultan afectados por $r = I_p : I_v$ los relativos á la viga.

Como ya hemos observado (ejemplo segundo), es indiferente contar l desde 0 á 6 ó desde 6 á 0, puesto que los recorridos de m y de m' son nulos. Escribiendo la nulidad del correspondiente á m , contando como hasta ahora en el sentido 0, δ , 1 6, resulta:

$$0 = \int_0^\delta M_{01} \times 1 \times du + \int_\delta^p M_{12} \times 1 \times du + \\ + r \int_0^v M_{23} \times 1 \times dx + \int_0^\pi M_{36} \times 1 \times dz ;$$

$$0 = \left\{ mp + H \frac{p^2}{2} - P \frac{p^2}{2} + P \frac{\delta^2}{2} + P\delta p - P\delta^2 \right\} + \\ + r \left\{ mv + Hpv - Ppv + P\delta v + V \frac{v^2}{2} \right\} + \\ + \left\{ m\pi + Hp\pi - H \frac{\pi^2}{2} + Vv\pi + P \frac{\pi^2}{2} - Pp\pi + P\delta\pi \right\} = 0$$

que se reduce á:

$$m \left\{ p + \pi + rv \right\} + H \left\{ \frac{p^2}{2} + p - \pi \frac{\pi^2}{2} + rpv \right\} + \\ + V \left\{ \pi v + r \frac{v^2}{2} \right\} = \\ = P \left\{ \frac{p^2}{2} - p\delta + \frac{\delta^2}{2} - \frac{\pi^2}{2} + p\pi - \pi\delta + rvp - rv\delta \right\} \quad (1h)$$

Si la acción aislada P se hace una infinitesimal, $e \times d(\delta)$ y la distancia δ varía desde cero hasta p , integrando (1 h) se obtendrá la ecuación correlativa con un empuje e kg.: m. l. que puede ser uniforme ($e = \text{constante}$) ó variable con la altura ($e = f(\delta)$).

Observemos que el primer miembro es independiente de la variable δ y en nada se altera.

Los coeficientes de m , H , V , son funciones exclusivas de las dimensiones p , π , v y de la relación de momentos de inercia, r . Llamando para abreviar (I, m) á la primera ecuación, derivada respecto á m , resulta

$$(I, m) = ep \times \left\{ \frac{p^2}{6} + \frac{p\pi}{2} - \frac{\pi^2}{2} + rv \frac{p}{2} \right\} \quad (1'h)$$

cuando e es constante (acción del viento), y si $e = e_0 \frac{p-\delta}{p}$ (empuje de tierras ó de líquidos)

$$(I, m) = e_0 p \left\{ \frac{p^2}{8} + \frac{p\pi}{3} - \frac{\pi^2}{4} + rv \frac{p}{3} \right\} \quad (1''h)$$

Análogamente, anulando el recorrido de H' , las derivadas parciales son: u , de 0 á p ; p , de 0 á v ; $(p-z)$, de 0 á π . Hechas las integraciones y ordenando, resulta:

$$m \left\{ \frac{p^2}{2} + p\pi - \frac{\pi^2}{2} + rpv \right\} + \\ + H \left\{ \frac{p^3}{3} + p^2\pi - p\pi^2 + \frac{\pi^3}{3} + rp^2v \right\} + \\ + V \left\{ p\pi v - \pi^2 \frac{v}{2} + rp \frac{v^2}{2} \right\} = \\ = P \left\{ \frac{p^3}{3} + p^2\pi - p\pi^2 + \frac{\pi^3}{3} - p\pi\delta - p^2 \frac{\delta}{2} + \pi^2 \frac{\delta}{2} + \frac{\delta^3}{6} + \right. \\ \left. + r\pi^2v - rpv\delta \right\} \quad (2h)$$

Análogamente para el empuje uniforme, el primer miembro (II, H) no varía y resultan:

$$(II, H) = ep \times \left\{ \frac{1}{8} p^3 + \frac{1}{2} p^2\pi - \frac{3}{4} p\pi^2 + \frac{\pi^3}{3} + rv \frac{p^2}{2} \right\} \quad (2'h) \\ (II, H) = e_0 p \left\{ \frac{11}{120} p^3 + \frac{1}{3} p^2\pi - \frac{5}{12} p\pi^2 + \frac{1}{6} \pi^3 + \right. \\ \left. + rv \frac{p^2}{3} \right\} \quad (2''h)$$

Y la nulidad del recorrido de V' , para las derivadas parciales: 0 de 0 á p ; x de 0 á v ; v de 0 á π , conduce á:

$$m \left\{ r \frac{v^2}{2} + \pi v \right\} + H \left\{ rp \frac{v^2}{2} + p\pi v - \pi^2 \frac{v}{2} \right\} + \\ + V \left\{ r \frac{v^3}{3} + \pi v^2 \right\} = \\ = P \left\{ p\pi v - \pi v\delta - \pi^2 \frac{v}{2} + rp \frac{v^2}{2} - rv^2 \frac{\delta}{2} \right\} \quad (3, h)$$

y para el empuje uniforme á:

$$(III, V) = ep \left\{ \frac{p \pi v}{2} - \frac{\pi^2 v}{2} + r \frac{v^2 p}{4} \right\} \quad (3', h)$$

y para el empuje creciente á:

$$(III, V) = e_0 p \left\{ \frac{p \pi v}{3} - \frac{\pi^2 v}{4} + r \frac{v^2 p}{6} \right\} \quad (3'', h)$$

Considerando una fuerza vertical F aislada, á la distancia d del punto 2, los valores de M son:

$$\begin{aligned} M_0^2 &= m + Hu & u \text{ de } 0 \text{ á } p \\ M_1^3 &= m + Hp + Vx & x \text{ de } 0 \text{ á } d \\ M_2^4 &= m + Hp + Vx - Fx + Fd & x \text{ de } d \text{ á } v \\ M_3^6 &= m + Hp - Hx + Vv - Fv + Fd & z \text{ de } 0 \text{ á } \pi \end{aligned}$$

Igualando á cero el recorrido de m' se obtiene como primer miembro el mismo (I, m) lo que era fácil de prever, dada su significación. Lo mismo sucede con las ecuaciones relativas á los recorridos de H' y V' .

$$(I, m) = F \left\{ \pi v - \pi d + \frac{r}{2} v^2 - rvd + \frac{r}{2} d^2 \right\} \quad (1 v)$$

Para una carga uniforme, c kg:m. l., haciendo $F = c \times d$ (d) é integrando respecto á d :

$$(I, m) = cv^2 \left\{ \frac{\pi}{2} + r \frac{v}{6} \right\} \quad (1' v)$$

Y del mismo modo:

$$(II, H) = F \left\{ p \pi v - p \pi d - \pi^2 \frac{v}{2} + \pi^2 \frac{d}{2} + r p \frac{v^2}{2} - r p v d + r p \frac{d^2}{2} \right\} \quad (2 v)$$

$$(II, H) = c v^2 \left\{ r \frac{p v}{6} + \frac{p \pi}{2} - \frac{\pi^2}{4} \right\} \quad (2' v)$$

$$(III, V) = F \left\{ \pi v^2 - \pi v d + r \frac{v^3}{3} - r \frac{v^2 d}{2} + r \frac{d^3}{6} \right\} \quad (3 v)$$

$$(III, V) = c v^2 \left\{ \frac{\pi v}{2} + r \frac{v^2}{8} \right\} \quad (3' v)$$

Si queremos considerar una fuerza Π sobre el pilar π , además de la P sobre el p (fig. 11), las expresiones de los momentos desde 0 á 4 no cambian. Entre 4 y 5 subsiste la anterior de M_4^6 y entre 5 y 6 se le agregan los términos $+\Pi\pi$, $-\Pi\Delta$, $-\Pi x$, que producen, al integrar desde $z = \pi - \Delta$ hasta $z = \pi$ los siguientes términos en los segundos miembros:

$$\text{En } (I, m) \quad + \frac{\Pi}{2} \Delta^2$$

$$\text{En } (II, H) \quad + \frac{\Pi}{2} \left\{ p \Delta^2 - \pi \Delta^2 + \frac{5}{3} \Delta^3 \right\}$$

$$\text{En } (III, V) \quad + \frac{\Pi}{2} v \Delta^2$$

Cuando las alturas son iguales, $p = \pi$, todo se simplifica, resultando los primeros miembros:

$$(I', m) = m \left\{ 2p + rv \right\} + H \left\{ p^2 + rpv \right\} + V \left\{ pv + r \frac{v^2}{2} \right\}$$

$$(II', H) = m \left\{ p^2 + rpv \right\} + H \left\{ \frac{2}{3} p^3 + rp^2 v \right\} + V \left\{ \frac{pv^2 + rpv^2}{2} \right\}$$

$$(III', V) = m \left\{ pv + r \frac{v^2}{2} \right\} + H \left\{ \frac{p^2 v + rpv^2}{2} \right\} + V \left\{ pv^2 + r \frac{v^3}{3} \right\}$$

Los segundos para $P = \Pi$, $\delta = \Delta$ se convierten en:

$$(I) \quad P \left\{ p^2 - 2p\delta + \delta^2 + rpv - v\delta \right\}$$

$$(II) \quad P \left\{ \frac{2}{3} p^3 - p^2 \delta + \delta^3 + rp^2 v - rpv \delta \right\}$$

$$(III) \quad P \left\{ p^2 \frac{v}{2} - pv \delta + v \delta^2 + rp \frac{v^2}{2} - rv^2 \frac{\delta}{2} \right\}$$

Con empuje unilateral resulta:

$$ep \left\{ \frac{1}{6} p^2 + \frac{1}{2} rpv \right\} \quad (1^{III} h); \quad e_0 p \left\{ \frac{5}{24} p^2 + \frac{1}{3} rpv \right\} \quad (1^{IV} h)$$

$$ep \left\{ \frac{5}{24} p^3 + \frac{1}{2} rp^2 v \right\} \quad (2^{III} h); \quad e_0 p \left\{ \frac{7}{40} p^3 + \frac{1}{3} rp^2 v \right\} \quad (2^{IV} h)$$

$$ep \left\{ \frac{1}{4} rpv^2 \right\} \quad (3^{III} h); \quad e_0 p \left\{ \frac{1}{12} p^2 v + \frac{1}{6} rpv^2 \right\} \quad (3^{IV} h)$$

Y si en lugar de las fuerzas aisladas P obran simétricamente un empuje unitario uniforme, e , ó uno variable desde 0 hasta e_0 resultan:

$$ep \left\{ \frac{1}{2} rvp + \frac{1}{3} p^2 \right\} \quad (1^V h); \quad e_0 p \left\{ \frac{1}{3} rvp + \frac{1}{4} p^2 \right\} \quad (1^{VI} h)$$

$$ep \left\{ \frac{1}{2} rvp^2 + \frac{5}{12} p^3 \right\} \quad (2^V h); \quad e_0 p \left\{ \frac{1}{3} rvp^2 + \frac{13}{60} p^3 \right\} \quad (2^{VI} h)$$

$$ep \left\{ \frac{1}{4} rv^2 p + \frac{1}{6} v p^2 \right\} \quad (3^V h); \quad e_0 p \left\{ \frac{1}{6} rv^2 p + \frac{1}{8} v p^2 \right\} \quad (3^{VI} h)$$

Como ejemplo concreto, supongamos $p = \pi = v$ y $r = 1$, es decir, las mismas longitudes y momentos de inercia en los tres elementos del pórtico.

Resultan, simplificadas, las ecuaciones siguientes, relativas á una sobrecarga uniforme, c , sobre la viga v :

$$\left. \begin{aligned} 3 m + 2 v H + \frac{3}{2} v V &= \frac{2}{3} cv^2 \\ 2 m + \frac{5}{3} v H + v V &= \frac{5}{12} cv^2 \\ \frac{3}{2} m + v H + \frac{4}{3} v V &= \frac{5}{8} cv^2 \end{aligned} \right\}$$

$$m = + \left(\frac{1}{36} = 0,0277 \right) cv^2$$

$$H = - \left(\frac{1}{12} = 0,0833 \right) cv$$

$$V = + \left(\frac{1}{2} = 0,5000 \right) cv$$

De estos valores se deducen: la altura del punto de inflexión i , en cada pilar (fig. 12).

$$Hi + m = 0; \quad i = - \frac{m}{H} = + \frac{1}{3} v$$

y los valores de los momentos flectores en el vértice y en el centro del vano:

$$\begin{aligned} M_v &= m - Hv = - \left(\frac{1}{18} = 0,0556 \right) cv^2; \quad M_c = M_v + \\ &+ \frac{cv^2}{8} = + \left(\frac{5}{9 \times 8} = 0,0694 \right) cv^2 \end{aligned}$$

que determinan por completo la distribución de flexiones y permiten formarse idea de la figura del pórtico deformado, como, con enorme exageración, representamos.

Si, como ocurre en la práctica, los pilares son menos rígidos que la viga, y, por ejemplo,

$$r = \frac{I_p}{I_v} = \frac{1}{10},$$

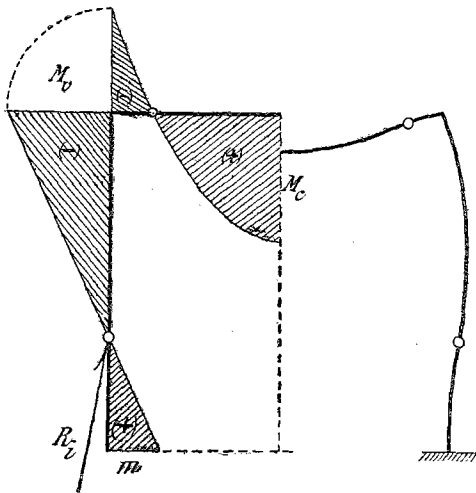


Fig. 12.

resulta (fig. 13):

$$\begin{aligned} \frac{21}{20} m + \frac{11}{10} vH + \frac{21}{20} vV &= \frac{31}{60} cv^2 \\ \frac{11}{10} m + \frac{23}{30} vH + \frac{11}{20} vV &= \frac{8}{30} cv^2 \\ \frac{21}{20} m + \frac{11}{20} vH + \frac{31}{30} vV &= \frac{41}{80} cv^2 \end{aligned}$$

$$m = +0,006.858 cv^2 ; H = -0,020.970 cv$$

$$i = +0,329 v ; M_v = -0,014 cv^2 ; M_c = +0,111 cv^2$$

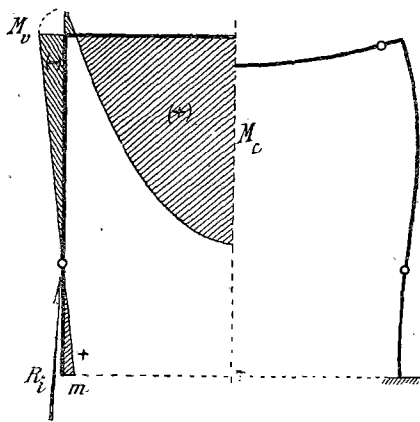


Fig. 13.

A medida que aumenta la rigidez de la viga su trabajo se aproxima al correspondiente al simple apoyo y el de los pilares se hace cada vez más pequeño. En el límite para $r = 0$ resulta el sistema

$$\begin{aligned} 2m + vH + vV &= \frac{1}{2} cv^2 \\ m + \frac{2}{3} vH + \frac{1}{2} vV &= \frac{1}{4} cv^2 \\ m + \frac{1}{2} vH + vV &= \frac{1}{2} cv^2 \end{aligned}$$

que sólo se satisface con:

$$m = 0 ; H = 0 ; V = \frac{1}{2} cv$$

Lo mismo resulta si se aumenta la longitud de los pilares respecto a la de la viga. Cuanto más largos ó más débiles, menor flexión experimentan. Si, por lo contrario, su rigidez se hace cada vez mayor, se llega, dividiendo por r y llevando al límite, á:

$$\begin{aligned} m + vH + \frac{1}{2} vV &= \frac{1}{6} cv^2 \\ m + vH + \frac{1}{2} vV &= \frac{1}{6} cv^2 \\ \frac{1}{2} m + \frac{1}{2} vH + \frac{1}{3} vV &= \frac{1}{8} cv^2 \end{aligned}$$

$$m = -\frac{1}{12} cv^2 ; H = 0 ; V = \frac{1}{2} cv ;$$

que corresponden, como deben, á la viga perfectamente empotrada en dos macizos absolutamente rígidos.

Cualquier caso de coexistencia de cargas verticales, horizontales, uniformes, variables, etc., se estudia con la misma sencillez, por separado, ó en total, igualando los primeros miembros de siempre á los respectivos segundos ó á sus sumas. Por ejemplo, una presión unilateral del viento, que supondremos $e = \frac{c}{4}$ kg. : m.l., produce, por sí sola (fig. 14):

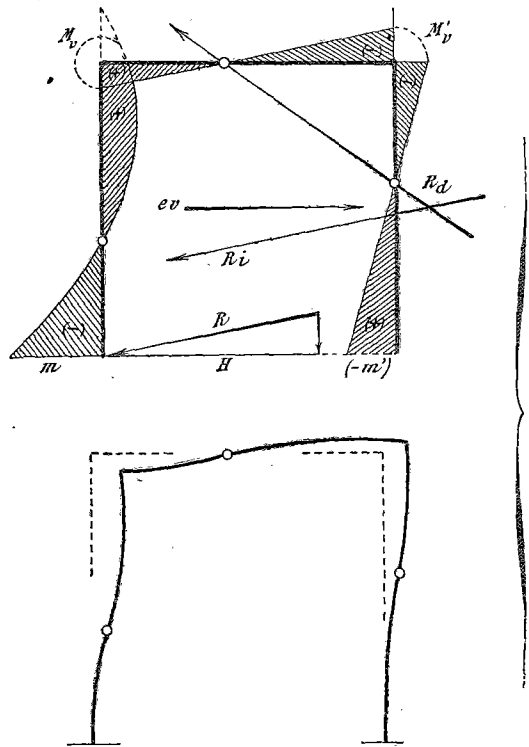


Fig. 14.

$$3m + 2vH + \frac{3}{2} vV = cv^2 \left\{ \frac{2}{3} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{6} \right\}$$

$$2m + \frac{5}{3} vH + vV = cv^2 \left\{ \frac{17}{24} \times \frac{1}{4} = \frac{17}{96} \right\}$$

$$\frac{3}{2} m + vH + \frac{4}{3} vV = cv^2 \left\{ \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{16} \right\}$$

$$m = -\left(\frac{59}{1008} = 0,058\right) cv^2 ; H = +\left(\frac{19}{96} = 0,198\right) cv ;$$

$$V = -\left(\frac{1}{28} = 0,036\right) cv$$

$$m + Hi - \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} cv^2 = 0 ; i = +\left\{ \begin{matrix} 0,298 \\ 1,192 \end{matrix} \right\} v$$

Hay dos puntos de inflexión, uno real y otro virtual en la prolongación del pilar de barlovento.

En la figura representamos los momentos flectores: el correspondiente al extremo del pilar derecho es igual y opuesto al de empotramiento; $m'_f = -m'$.

$$\begin{aligned} M_v &= m + Hv - \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} cv^2 = + 0,015 cv^2 \\ M'_v &= M_v - Vv = - 0,021 cv^2 \\ m'_f &= -m' = m + \frac{1}{8} cv^2 - Vv = + 0,031 cv^2 \end{aligned}$$

La viga y el pilar de sotavento tienen también inflexión. Por ellos pasa la reacción total de la derecha, como es fácil comprobar calculando las componentes H' , V' y el par m' .

Figuramos las deformaciones del pórtico en escala, como siempre, muy exagerada.

(Continuará.)

Estudio acerca de las redes subterráneas de alta tensión

UNIDAS METÁLICAMENTE A LÍNEAS AÉREAS

Plantearemos las cuestiones siguientes:

1.º ¿Está la industria en condiciones de suministrar cables capaces de soportar las tensiones máximas empleadas en las líneas aéreas?

2.º ¿A qué tensiones conviene ensayar estos cables?

3.º ¿Se ha reconocido la existencia de peligros especiales para los cables unidos metálicamente a las líneas aéreas?

4.º ¿Qué precauciones se han tomado para evitar estos peligros?

I. *Tensión máxima.* — En Noruega, la línea aérea que pasa el túnel de Tysse á Odda funciona á 120.000 voltios.

En América se emplean tensiones de 110.000 á 120.000 voltios en líneas aéreas.

En el Continente son corrientes en estas mismas líneas las tensiones de 60 á 70.000 voltios.

Por otra parte, se han realizado, á título de ensayo, y especialmente para la Exposición de Turín, cables subterráneos de conductores múltiples capaces de funcionar á 100.000 voltios; pero, según nuestras noticias, no se han hecho funcionar todavía cables en servicio industrial á tensiones superiores á 400.000 voltios en alternativa y 50.000 en continua.

Sin embargo, la Compagnie Lorraine d'Electricité va á poner en carga una línea de transporte de energía de 65.000 voltios, de 23 kilómetros de cables subterráneos, de tres conductores.

En suma, las más recientes experiencias de los constructores de cables parecen establecer que pueden expedir, con toda seguridad, cables para funcionar:

En corriente continua..... 100.000 voltios.
En corriente alternativa.... 50.000

¿Se puede ir más allá?

Esto depende del coeficiente de seguridad que se exija.

II. *Tensión de ensayo. Coeficiente de seguridad.* — Llamaremos coeficiente de seguridad á la relación entre la tensión de ensayo y la tensión de régimen.

En Alemania se prescribe el coeficiente 2 en fabricación, y el coeficiente 1,25 en instalación.

En Italia, según los informes dados por los establecimientos Pirelli, el coeficiente impuesto varía á gusto del comprador y esta

misma casa indica como suficientes los coeficientes 2 de fabricación y 1,5 de instalación.

En Francia y en Inglaterra las asociaciones prescriben 3 y 2, respectivamente.

La experiencia industrial es la que ha hecho adoptar estas últimas cifras para los cables que funcionen á 25.000 voltios y menos.

Se ha comprobado que los cables ensayados al doble en fabricación dan accidentes en servicio y que los cables ensayados al triple quedan indemnes.

Para los cables de corriente continua es suficiente, en general, 1,5 en fabricación.

Si se quiere aplicar la fórmula franco-inglesa á los cables de 100.000 voltios para corriente alternativa, tendremos necesidad de ensayarlos bajo 300.000 voltios en fabricación y 200.000 voltios en instalación.

Estos ensayos son de una realización difícil y hasta imposible en muchos casos; la ejecución del cable capaz de soportar estas tensiones es todavía problemática.

Pero la opinión parece indicar que para estas altas tensiones no es necesario un coeficiente de seguridad tan elevado.

Esta opinión ha sido sostenida especialmente en la Sociedad Internacional de Electricistas y en el Congreso de Marsella de 1908, por MM. Brylinski y De Marchena, y confirmada por los establecimientos Pirelli.

En efecto, las sobretensiones consecutivas á un cierre de interruptor en un cable en vacío, proporcionales á la tensión de servicio, no exceden del doble de esta tensión.

Pueden, es cierto, en caso de cierre en el momento de un máximo alcanzar dos veces la tensión máxima instantánea, ó sea $2\sqrt{2}$ veces la tensión eficaz del régimen.

Este caso es sumamente raro, tanto, que jamás se ha producido, y mediante precauciones fáciles de tomar, pueden eliminarse las consecuencias (bobinas de reactancia ó resistencias muertas intercaladas en el circuito en el momento del cierre, etc.).

Las otras sobretensiones de origen interno se producen en el momento de la ruptura de la corriente de régimen ó de la corriente de corto circuito, y son proporcionales al valor de la intensidad en el momento de la ruptura.

Como la intensidad para una potencia dada es inversa de la tensión, las sobretensiones al cortar la corriente de régimen son, pues, tanto más pequeñas cuanto más alta es dicha tensión de régimen.

Parece desde luego resultar de experiencias directas que el corte de la corriente se hace, no cerca del máximo de la intensidad, sino, al menos con los interruptores en aceite, muy cerca del paso por cero.

Por último, M. Boucherot ha demostrado recientemente que, en el caso de un corto circuito, la energía disponible en el campo magnético se dispersa en parte en el alternador por inducción mutua.

Una tercera causa de sobretensión reside en las descargas atmosféricas; pero hay que observar que, según los informes últimamente recibidos de América, se suprime impunemente toda protección en las líneas aéreas que funcionen á más de 100.000 voltios; si el hecho se confirma, resultaría de él que las sobretensiones de origen atmosférico no exceden de 100.000 voltios.

M. De Marchena indicó en el Congreso de Marsella de 1908, teniendo en cuenta estas consideraciones, la fórmula:

Tensión de ensayo en la fábrica = $10.000 + 2E$, siendo E la tensión de régimen.