

REVISTA DE OBRAS PÚBLICAS

PUBLICACION TECNICA DEL CUERPO DE INGENIEROS DE CAMINOS, CANALES Y PUERTOS

DIRECTOR

D. MANUEL MALUQUER Y SALVADOR

COLABORADORES

LOS INGENIEROS DE CAMINOS, CANALES Y PUERTOS

SE PUBLICA LOS JUEVES

Dirección y Administración: Plaza de Oriente, 6, primero derecha.

LOS MÉTODOS DE CÁLCULO DE ESTRUCTURAS

DERIVADOS DEL TRABAJO ELASTICO

POR D. JUAN MANUEL DE ZAFRA,

Profesor de Hormigón armado y de Puertos en la Escuela especial de Caminos Canales y Puertos.

IV

Los trabajos térmico y dinámico.

En todo lo dicho hemos supuesto acciones del género de fuerzas ó momentos que, al obrar *de un modo gradual* sobre la construcción, desarrollan un trabajo activo. Este trabajo es absorbido íntegramente por las deformaciones elásticas del sólido-construcción y de los cuerpos sustentadores, que lo conservan, tanto aquél como éstos, en estado potencial. En el caso práctico, ideal del constructor, la energía activa se almacena exclusivamente en el sólido, nada en las sustentaciones, supuestas indeformables.

Otra forma de energía activa puede, también de un modo gradual, romper el equilibrio primitivo: las alteraciones de volumen del sólido por efecto de cambio de temperatura ó de estado higrométrico.

El cambio puede ser uniforme ó variado, es decir, afectar del mismo ó de diferente modo á los diversos puntos del sólido. Sólo se acostumbra estudiar el primero, que produce, mientras una influencia extraña, la sustentación, no se le opone, una dilatación ó contracción unitaria igual en todos los puntos y direcciones.

Si la variación de volumen es uniforme y se efectúa libremente, sin que ninguna sustentación se le oponga, el sólido conserva siempre una forma semejante á la primitiva: la energía activa, suma de calorías recibidas, se guarda íntegra en el trabajo de deformación elástica y en la energía potencial que corresponde á la nueva posición del centro de gravedad.

En cuanto alguna sustentación coarta el cambio de volumen, la forma de equilibrio deja de ser semejante á la primitiva: nacen reacciones que son precisamente las necesarias para reducir la forma que el cuerpo tomaría libremente á la que toma forzado por las condiciones de sustentación.

Como no hay fuerzas ni momentos exteriores, esas reacciones constituyen necesariamente un sistema en equilibrio; nos encontramos, por tanto, en el caso general, sustituyendo al sistema $\Sigma A + \Sigma R$ el ΣR_t , total mente desconocido.

Poco importa esto, pues expresado el trabajo elástico $\mathfrak{T}$ en función de las variables consideradas como independientes R_t (to-

das menos tres, puesto que forman un sistema en equilibrio), sus derivadas parciales serán siempre los recorridos. Si una sustentación impide en absoluto el cambio de volumen según R_t , y si á la variación de dimensiones efectuada en completa libertad corresponde, también según la dirección de R_t , un recorrido p_t , el recorrido real de esta reacción debe ser el que anule al libremente efectuado:

$$p_t + \frac{d\mathfrak{T}}{dR_t} = 0 \quad ; \quad \frac{d\mathfrak{T}}{dR_t} = -p_t \quad (24)$$

Si la sustentación coarta parcialmente el cambio de dimensiones y en lugar de p_t , efectuado en libertad, es p'_t el recorrido real, el de la reacción debe ser el que lo reduzca á ese valor

$$p_t + \frac{d\mathfrak{T}}{dR_t} = p'_t \quad ; \quad \frac{d\mathfrak{T}}{dR_t} = -(p_t - p'_t) \quad (24')$$

Si la sustentación en nada coarta el cambio de volumen, no se produce en ella reacción alguna. El sistema ΣR_t , que, como siempre, simboliza lo mismo fuerzas que momentos, así como p_t indica recorridos lineales ó angulares, queda perfectamente determinado. Las ecuaciones (24) tienen sus primeros miembros de la forma (19), expresados N , M , T , en función de las R_t independientes y designando N_k , M_k , T_k , las derivadas parciales respectivas con relación á la R_t correspondiente al punto ó sección k .

Si la variación de volumen no es uniforme para todos los puntos de cada sección, no es posible calcular *a priori* los recorridos p_t . El problema es, sin embargo, factible cuando se supone una ley lineal de distribución de las variaciones de longitud, desde λ_s en la fibra superior, hasta λ_i en la inferior de una pieza prismática. A ellas corresponde en la fibra neutra una variación λ_0 definida por:

$$\lambda_0 = \lambda_s - \frac{\lambda_s - \lambda_i}{e} \times v_s = \lambda_i + \frac{\lambda_s - \lambda_i}{e} \times v_i$$

siendo e el espesor ó altura de la sección, y v_s , v_i las distancias de la fibra neutra á la superior é inferior.

La sección terminal de la rebanada dl sufre entonces una traslación uniforme $dl \times \lambda_0$, más un giro, alrededor de la normal á la fibra neutra, igual al ángulo cuya tangente es

$$dl \times \frac{\lambda_s - \lambda_i}{e}$$

y por su pequeñez se confunden, como siempre, los valores de la tangente y del ángulo.

Si N_t es la fuerza normal, función de las reacciones desconocidas R_t , el trabajo elástico relativo al recorrido uniforme $dl \times \lambda_0$, más el del mismo género $\frac{N_t}{ES} dl$, propio de N_t , vale

$$\int \frac{N_t}{ES} dl + \int N_t \times \lambda_0 dl.$$

Del mismo modo al momento flector M corresponde el trabajo

$$\int \frac{M_t}{EI} dl + \int M_t \times \frac{\lambda_s - \lambda_i}{e} dl.$$

El recorrido de una reacción R_t , que, por las condiciones del problema, sea nulo ó de un valor determinado, p , será la derivada parcial del trabajo elástico debido á N_t y M_t

$$\begin{aligned} \frac{d\mathcal{E}}{dR_t} &= \int \frac{M_t}{EI} \frac{dM_t}{dR_t} dl + \int \frac{N_t}{ES} \frac{dN_t}{dR_t} dl + \\ &+ \int -\frac{dM_t}{dR_t} \times \frac{\lambda_s - \lambda_i}{e} dl + \\ &+ \int \frac{dN_t}{dR_t} \times \lambda_0 dl = \begin{cases} 0 & (25) \\ p_t & (25') \end{cases} \end{aligned}$$

Examinemos ahora otro caso. El sólido recibe un sistema de acciones, fuerzas ó momentos, que se establecen *repentinamente* con toda su intensidad, pero sin acumulación anterior de energía. Su trabajo es, por tanto, en lugar de $\Sigma \frac{Aa}{2}$, que corresponde al desarrollo gradual de cero á A y de cero á a , otro, que llamando al recorrido gradualmente alcanzado desde cero á a' bajo la acción *súbita* A , es $\Sigma Aa'$.

Las fuerzas interiores Φ y sus recorridos φ se desarrollan progresivamente partiendo de cero; de otro modo habría que admitir para la propagación de las cargas y deformaciones moleculares una celeridad *infinita*. No lo es, ni mucho menos; su valor es precisamente, como luego veremos, el de la propagación del sonido $v = \sqrt{\frac{E}{d}}$ (E , coeficiente de elasticidad; d , densidad, ambos en correlativas unidades), ó sea unos 5.000 metros por segundo en el acero de construcciones. El sólido elástico es un resorte y funciona como tal: la transmisión es gradual, el trabajo elástico vale $\Sigma \frac{\Phi\varphi}{2}$ y el de las reacciones que á compás de la transmisión hasta los cuerpos sustentadores se desarrollan, — $\Sigma \frac{Rr}{2}$.

Consideremos una acción cualquiera, A , que operando *estáticamente*, es decir, del modo gradual y lentísimo ya dicho, alcanza, cuando el sólido queda en equilibrio, un recorrido a_0 . Cuando la misma A opera *dinámicamente*, es decir, de un modo súbito, con todo su valor desde el principio, el equilibrio inicial se rompe y el recorrido alcanza un cierto valor a' , desarrollándose un trabajo Aa' .

Desde luego a' es mayor que a_0 . El sólido se pone en movimiento, y cuando A ha recorrido tan sólo $\frac{a_0}{2}$, el trabajo es ya igual al compatible con el equilibrio estático.

$$\frac{Aa_0}{2} = \frac{1}{2} \left\{ \Sigma \Phi_0 \varphi_0 + \Sigma R_0 r_0 \right\} = \mathcal{E}_0.$$

El exceso de trabajo puesto en juego, $A \left(a' - \frac{a_0}{2} \right)$, es una energía cinética que se va almacenando en el sólido y en las sustentaciones, gradual aunque rápidamente, forzando las fuerzas elásticas, reacciones y recorridos $\Phi_0 \varphi_0$, $R_0 r_0$, relativas al equilibrio, hasta Φ' , φ' , R' , r' , simultáneos con a' .

La energía, toda ella potencial, que en ese momento acumulan el sólido y los cuerpos sustentadores

$$\mathcal{E}_p = -\frac{1}{2} \left\{ \Sigma \Phi' \varphi' - \Sigma \Phi_0 \varphi_0 + \Sigma R' r' - \Sigma R_0 r_0 \right\}$$

es incompatible con el equilibrio correspondiente al recorrido a' . El movimiento recomienza en sentido opuesto á expensas de $\mathcal{E}_p$, cuyo signo hemos puesto en evidencia (fuerzas elásticas y reacciones coartan la deformación).

Si $\mathcal{E}_p$ subsistiera íntegro, sin pérdida alguna, el sólido y las sustentaciones proseguirían su movimiento hasta las posiciones simétricas de las relativas al recorrido total a' respecto á la posición de equilibrio, correspondiente á $\frac{a_0}{2}$, estableciéndose y conservándose indefinidamente el régimen oscilatorio entre $\left(a' - \frac{a_0}{2} \right)$ y $-\left(a' - \frac{a_0}{2} \right)$, alrededor de $\frac{a_0}{2}$.

Pero la energía $\mathcal{E}_p$ se *disipa* gradualmente, por comunicación del movimiento al aire que envuelve al sólido y á los cuerpos sustentadores y de éstos á los que á su vez los sustentan, etc. En cada oscilación simple la energía potencial que vuelve á parecer como cinética, para nuevamente pasar á potencial, etc., es una fracción menor que la unidad, n , de la relativa á la oscilación anterior.

Esta disipación se produce desde luego y la energía acumulada cuando el recorrido primero vale a' es *realmente* $n \mathcal{E}_p < \mathcal{E}_p$ y sus valores sucesivos $n^2, n^3, n^4 \dots \times \mathcal{E}_p$, cada vez menores. El total de energía puesta en juego por la acción súbita A es:

$$n \mathcal{E} = n A a'.$$

En el límite, cuando $\mathcal{E}_p$ se haya disipado por completo, quedará el sólido en equilibrio bajo la acción A obrando ya estáticamente y con una energía potencial $\mathcal{E}_0 = -\frac{Aa_0}{2}$.

Prescindiendo del estudio del movimiento vibratorio, podemos, como solución práctica, la que interesa al constructor, buscar el valor de una acción A_e , tal que establecida *estáticamente* produzca el mismo trabajo molecular $n \mathcal{E} = n A a'$, que la acción súbita.

Dentro del límite de perfecta elasticidad, que siempre consideramos, el trabajo es proporcional á la deformación.

Las fuerzas elásticas Φ_e y reacciones R_e alcanzarán en este equilibrio gradual los mismos máximos $n \Phi'$, $n R'$ que en el primer período dinámico, si el recorrido *estático* a_e es el mismo máximo a' . La condición:

$$n A a' = \frac{1}{2} A_e \times a_e = \frac{1}{2} A_e a'$$

conduce á

$$A_e = 2 n \times A \quad (26)$$

En el límite, para n infinitamente próximo á la unidad, $A_e = 2 A$.

La aplicación súbita de una causa produce trabajo y deforma-

ción elásticos, cuyos límites son dobles que los relativos a la aplicación gradual y lentísima de la misma causa.

Esos límites son de sentidos opuestos: superior para el trabajo súbito é inferior para el trabajo indefinidamente lento. Ambos límites son inasequibles en la práctica (*). El trabajo elástico relativo a una acción que se establece con mucha rapidez, una locomotora que entra en un puente, por ejemplo, se aleja todavía bastante del doble del trabajo desarrollado por la misma cuando allí se estaciona. El coeficiente de equivalencia (2 n) es en la práctica tanto menor cuanto menor sea la rapidez de establecimiento (velocidad de las locomotoras), y se suele tomar para puentes de ferrocarril, como igual á 1,5.

Veamos, por fin, el caso verdaderamente dinámico: la causa exterior es una energía cinética, un choque recibido por el sólido elástico. El problema, de una complicación formidable en la teoría de la elasticidad, se simplifica cuando se investigan, no los efectos exactos, sino los límites de éstos, los que, por prudencia, debe tener en cuenta el constructor.

Un cuerpo de peso Q cae desde una altura a y aborda al sólido elástico con la velocidad $v = \sqrt{2ga}$. El caso límite, el más desfavorable para el sólido, es el de transformación *íntegra* de toda la energía cinética, $\frac{Q}{g} \frac{v^2}{2}$, en trabajo elástico.

Jamás se llega á esto en la realidad. Si el cuerpo Q rebota con una velocidad ($-v'$), por pequeña que sea, la energía transformada es solamente una fracción $\frac{v^2 - v'^2}{v^2}$. Si Q taladra al sólido P , saliendo con la velocidad v'' , de la fracción $\frac{v^2 - v''^2}{v^2}$ absorbida por P , una parte considerable se invierte en el trabajo *plástico* de perforación, otra en el calentamiento de la zona contigua y del mismo cuerpo Q , y sólo el residuo es el que llega á interesar en forma de trabajo elástico toda la masa de P .

Entre estos dos casos extremos caben todos los intermedios, siempre con pérdida de energía por deformación plástica y calentamiento de P , de Q ó de ambos á la vez. Sólo se concibe la transformación *íntegra* como límite en el caso de choque á velocidad inferior á cierto valor crítico (como luego razonaremos) entre cuerpos que, por una parte, debieran ser ambos perfectamente elásticos, y, por otra, necesitaría ser perfectamente *inelástico* el cuerpo chocante. Aun así, como veremos, hay *siempre* una parte de energía cinética transformada en calor.

Admitamos como posible aquel caso: el cuerpo Q , *blando*, y que, sin embargo, suponemos no absorbe energía alguna deformándose, pasa bruscamente de la velocidad v á la misma velocidad v' , que adquiere en el momento del choque el sólido P . Si éste estuviera libre, v' sería la obtenida igualando cantidades de movimiento de Q y de $(P + Q)$

$$v' = v \frac{Q}{P + Q} = v \frac{1}{1 + \frac{P}{Q}}$$

Pero el movimiento de P está coartado por los cuerpos sustentadores. El punto (en que suponemos concentrado el choque) adquiere la velocidad u' y cada uno de los demás toma la representada en general por u , nula en las sustentaciones y variable de un punto á otro, según su posición respecto á aquéllas y al punto chocador.

(*) El primero puede realizarse, casi, en un experimento. Suspendiendo un peso de un hilo combustible y graduando la tensión de éste de tal modo, que aquél toque estrictamente al sólido elástico, pero sin producir presión alguna, la combustión del hilo determina la aplicación *casi* súbita del peso. *Casi*, porque se requiere un tiempo pequeñísimo, pero finito, nunca nulo para la combustión.

La fuerza viva absorbida por P es

$$\int \frac{dP}{g} \frac{u^2}{2}$$

que, como P y u' son constantes respecto á la integración, se puede poner bajo la forma

$$\begin{aligned} & \frac{P}{g} \frac{u'^2}{2} \times \int dP u^2 \times \frac{1}{P u'^2} = \\ & = \frac{P}{g} \frac{u'^2}{2} \int \left(\frac{u}{u'} \right)^2 \frac{dP}{P} = \frac{P}{g} \frac{u'^2}{2} \times k \quad (27) \end{aligned}$$

$\frac{P}{g} \frac{u'^2}{2}$ es la energía absorbida por P en el supuesto de que todos sus puntos adquieran la misma velocidad u' . La integral k , cuyos límites deben comprender la totalidad de P , es un número abstracto, casi siempre menor que la unidad. En efecto, la relación $\frac{u}{u'}$ de velocidades es igual á la de recorridos ó flechas de un punto cualquiera y del punto chocador, cuando en éste actúa una fuerza; las flechas de todos los puntos aumentan ó disminuyen en la misma escala y todas pasan en el mismo tiempo de cero á sus mayores valores. Conocida la ecuación de la elástica, dada por la disposición de las sustentaciones, $f = F \times \varphi(x)$, y la flecha del punto chocador u' , $f' = F \times \varphi(x')$:

$$\frac{u}{u'} = \frac{f}{f'} = \frac{\varphi(x)}{\varphi(x')};$$

dP es de la forma $p dx$; P es una constante $= \int p dx$ y, por tanto:

$$k = \int \left(\frac{u}{u'} \right)^2 \frac{dP}{P} = \frac{1}{\int p dx} \times \int \left(\frac{\varphi(x)}{\varphi(x')} \right)^2 p dx \quad (28)$$

magnitud de la dimensión cero (*).

Así, pues, el efecto de las sustentaciones al restringir la libertad de movimiento del sólido P es reducir la fuerza viva que libremente absorbería $\frac{P}{g} \frac{v'^2}{2}$, á $k \times \frac{P}{g} \frac{u'^2}{2}$.

Entre la energía inicial, $\frac{Q v^2}{2g}$, y la inmediatamente después de verificado el choque, $\frac{Q u'^2}{2g} + k \frac{P u'^2}{2g}$ hay una *pérdida*, debida al paso brusco de v á u' en el cuerpo de masa $\frac{Q}{g}$ y de cero á u en cada elemento de masa $\frac{dP}{g}$. Esta pérdida es, como no puede menos, aparente: es una transformación, *inevitable*, de

(*) En una pieza de sección constante y de longitud $2a$, $P = p \times 2a$. Si está apoyada en los extremos y chocada en el centro ($x' = a$):

$$\frac{f}{f'} = \frac{3}{2} \frac{x}{a} - \frac{1}{2} \frac{x^3}{a^3}; \quad k = 2 \int_0^a \left(\frac{3}{2} \frac{x}{a} - \frac{1}{2} \frac{x^3}{a^3} \right)^2 \frac{dx}{2a} = \frac{17}{35}$$

Si los extremos están empotrados:

$$\frac{f}{f'} = 3 \frac{x^2}{a^2} - 2 \frac{x^5}{a^5}; \quad k = 2 \int_0^a \left(3 \frac{x^2}{a^2} - 2 \frac{x^5}{a^5} \right)^2 \frac{dx}{2a} = \frac{13}{35}$$

En la pieza de longitud a , empotrada en un extremo y chocada en el otro: $P = pa$; $x' = a$:

$$\frac{f}{f'} = \frac{3}{2} \frac{x^2}{a^2} - \frac{1}{2} \frac{x^5}{a^5}; \quad k = \int_0^a \left(\frac{3}{2} \frac{x^2}{a^2} - \frac{1}{2} \frac{x^5}{a^5} \right)^2 \frac{dx}{a} = \frac{33}{4 \times 35}$$

Cuando el punto chocador se acerca á una sustentación, k aumenta, llega á superar á la unidad, y si el choque se verifica sobre una sustentación, k se hace infinito al mismo tiempo que u' nulo.

energía cinética en calor que guardan Q y P . La aplicación del teorema de Borda, igualdad entre la pérdida aparente y las fuerzas vivas correspondientes á los decrementos bruscos de velocidad conduce á

$$\frac{Qv^2}{2g} - (Q + kP) \frac{u'^2}{2g} = \frac{Q(v-u')^2}{2g} + \int \frac{dP}{g} \times \frac{(v-u')^2}{2} \quad (29)$$

ecuación que desarrollada y simplificada se reduce á

$$u'(Q + kP) = vQ; \quad \text{ó} \quad u' = v \frac{Q}{Q + kP} = v \frac{1}{1 + k \frac{P}{Q}} \quad (30)$$

Las cosas pasan, por lo tanto, como si la masa de P se redujera á una, en general bastante menor, kP , considerada en completa libertad: la ecuación (39) es la de igualdad de cantidades de movimiento de Q antes del choque y de $(Q + kP)$ después del mismo.

La energía cinética queda reducida á:

$$(Q + kP) \frac{u'^2}{2g} = \frac{(Q + kP)}{2g} \frac{v^2 Q^2}{(Q + kP)^2} = \frac{Qv^2}{2g} \times \frac{1}{1 + k \frac{P}{Q}} \quad (31)$$

La transformada en calor y perdida para los efectos mecánicos del choque:

$$\frac{Qv^2}{2g} \left\{ 1 - \frac{1}{1 + k \frac{P}{Q}} \right\} = \frac{Qv^2}{2g} \times \frac{1}{1 + \frac{Q}{kP}} \quad (32)$$

Al constructor no le interesa el problema del movimiento oscilatorio, sino simplemente el de evaluación del efecto del choque, supuesto el caso límite de transformarse íntegra en trabajo elástico la energía cinética subsistente.

Si una acción estática A_e produce un recorrido del mismo género, α_e , otra cualquiera que aplicada en el mismo punto origine un cierto q_e vale, dentro siempre del período de elasticidad perfecta, $A_e \times \frac{q_e}{\alpha_e}$ y desarrolla un trabajo

$$A_e \times \frac{q_e}{\alpha_e} \times \frac{1}{2} q_e.$$

Supongamos en el punto chocado una acción creciente desde cero hasta un valor tal que en su correspondiente recorrido q_e desarrolle un trabajo exactamente igual á toda la energía cinética subsistente (31). Los trabajos elásticos producidos por esta acción y por el choque serán idénticos.

La transformación íntegra exige $\left(\alpha = \frac{v^2}{2g} \right)$:

$$\frac{1}{2} \frac{A_e}{\alpha_e} \times q_e^2 = Q \alpha \times \frac{1}{1 + k \frac{P}{Q}} \quad (33)$$

Si el recorrido α_e , correspondiente á A_e , lo sustituimos por

el q_e , correlativo con el peso Q , estáticamente aplicado, y A_e lo reemplazamos por Q , la igualdad no se altera:

$$Q \alpha \times \frac{1}{1 + k \frac{P}{Q}} = \frac{1}{2} \frac{Q}{q_e} \times q_e^2; \quad q_e = \sqrt{\frac{2 \alpha q_e}{1 + k \frac{P}{Q}}} = q_e \sqrt{\frac{2 \alpha}{q_e (1 + k \frac{P}{Q})}} \quad (34)$$

El recorrido q_e es el buscado; para que el sólido alcance tal deformación en el punto chocado precisa obligarle á absorber, en forma de trabajo elástico, toda la energía subsistente:

$$Q \frac{v^2}{2g} \times \frac{1}{1 + k \frac{P}{Q}}$$

La acción estática Q_e , capaz de originar q_e , y equivalente, por tanto, al máximo efecto posible del choque, es:

$$Q_e = \frac{Q}{q_e} \times q_e = Q \sqrt{\frac{2 \alpha}{q_e (1 + k \frac{P}{Q})}} \quad (35)$$

En función de la velocidad $v = \sqrt{2g\alpha}$:

$$q_e = v \sqrt{\frac{q_e}{g}} \sqrt{\frac{1}{1 + k \frac{P}{Q}}} \quad (34')$$

$$Q_e = Q v \sqrt{\frac{1}{g q_e}} \sqrt{\frac{1}{1 + k \frac{P}{Q}}} \quad (35')$$

Si se supone despreciable la masa de P ante la de Q se obtienen las expresiones más corrientes de q_e y Q_e , en las que no interviene k , que se pueden aplicar, como límites, á casos en que aquella hipótesis casi se realice: una barra metálica delgada, chocada por un cuerpo bastante pesado. Pero á una construcción sería desatinado hacerlo.

Suponiendo $k = \frac{1}{2}$, para $\frac{P}{Q} = 1, 10, 25, 50, 100$, el radical $\sqrt{\frac{1}{1 + k \frac{P}{Q}}}$ vale, respectivamente, 0,816, 0,408, 0,272, 0,196, 0,140, lo que hace ver la exageración que se cometería al tomar simplemente, prescindiendo de aquí:

$$(34'') \quad q'_e = \sqrt{2 \alpha q_e} \quad \text{y} \quad Q'_e = \sqrt{\frac{2 \alpha}{q_e}} \quad (35'')$$

Aun así, la aproximación, siempre por exceso, de las expresiones (34) y (35) á la realidad, varía mucho con la altura α ó, lo que es igual, con la velocidad v .

Observemos que el trabajo de la fuerza Q_e equivale á toda la energía cinética (31)

$$\frac{Q u'^2}{2g} + \frac{k P u'^2}{2g}$$

subsistente, verificado el choque, en la masa de Q y en la de kP , es decir, á la energía que conserva el cuerpo chocante y á la que anima á la construcción, y que una y otra concluyen por desaparecer en la forma cinética para almacenarse íntegras en forma

de trabajo elástico, al alcanzarse el recorrido q_e . Evaluado Q_e no hay por qué ocuparse del peso de la construcción, que ya está involucrado en aquél.

Una misma energía $\frac{Qv^2}{2g}$, produce efectos muy distintos, según los valores de Q y de v . Un choque de 100 kilogrametros puede provenir de 10.000 kg. $\times$ 0,010 m., con velocidad v de 0,443 m. por segundo; ó de 0,010 kg. $\times$ 10.000 m., con $v = 443$. Si, para concretar, suponemos $P = 1.000$ kg. y $k = \frac{1}{2}$, las velocidades finales u' son respectivamente:

$$\frac{0,443}{1,05} = 0,422; \text{ y } \frac{443}{50,601} = 0,009.$$

En el primer caso apenas hay diferencia entre v y u ; en el segundo es enorme.

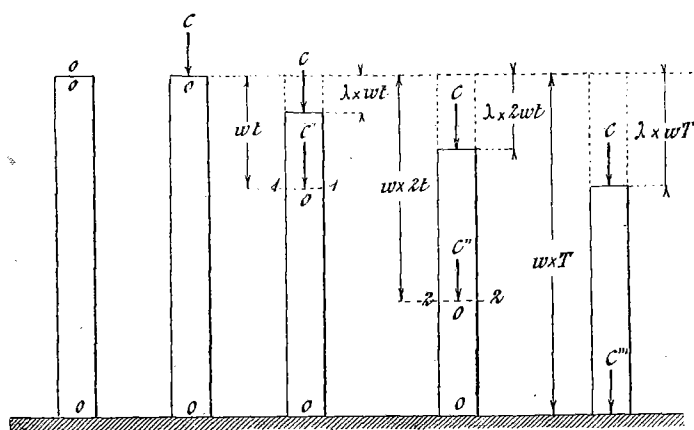


Fig. 7.a

En una barra (fig. 7.a) soportada por un plano rígido y sustraída á toda acción, incluso la gravedad, aplicamos súbitamente una carga, C kilogramos por unidad de superficie. En el instante inicial, la barra conserva todavía sus cargas moleculares, nulas en todas partes.

C no se transmite *instantáneamente* es decir, en un tiempo nulo, á los demás puntos de la barra: se propaga de molécula en molécula, con una velocidad w . Al cabo de un tiempo t , todas las partículas dentro del espacio wt soportan dicha carga y la llevan desde la sección terminal, donde actúa la causa, hasta la sección 11. De ésta para abajo las cargas moleculares continúan siendo todas nulas.

Si E es el coeficiente de elasticidad de la barra, la longitud cargada wt sufre una variación $\frac{C}{E} wt = \lambda \times wt$. La sección terminal ha recorrido esa distancia con una velocidad λw .

Análogamente, al cabo de un tiempo $2t$ desde el momento inicial, quedan cargadas todas las moléculas hasta la sección 22, á la distancia $w \times 2t$; las restantes continúan sin carga alguna. La variación de longitud es $\lambda \times 2wt$ y la velocidad del movimiento de la sección terminal, es siempre la misma, λw .

Se llega, finalmente, á establecer el equilibrio molecular en toda la barra al cabo de un tiempo T , cuando C alcanza la sección inferior que descansa sobre el soporte, supuesto absolutamente rígido. El acortamiento de la longitud $l = wT$, es el total que puede sufrir la barra. La sección terminal lo ha recorrido siempre con la velocidad λw .

La causa (carga molecular) se propaga con una celeridad w mucho mayor que la del efecto (contracción ó dilatación) λw . Es una de tantas manifestaciones de la ley del retraso, universal en

la naturaleza: el efecto nunca es simultáneo, sino posterior á la causa.

Para que la velocidad de la sección terminal sea mayor, es forzoso aumentar $\lambda = \frac{C}{E}$ y, por lo tanto, la carga C ; y en cuanto ésta supere á la límite de elasticidad, la deformación producida será en parte plástica ó permanente, en parte todavía elástica. Cuanto más se fuerce la velocidad de la sección terminal mayor será la variación unitaria λ' que á la materia se imponga. λ' no será ya $\frac{C}{E}$, sino la suma de una variación λ'' todavía elástica, inversamente proporcional á un coeficiente de elasticidad E'' , no ya el primitivo, sino uno variable y de otra variación λ''' plástica, disminuyendo tanto más E'' y preponderando tanto más λ''' , ambas funciones de la carga unitaria C , cuanto mayor sea la velocidad $\lambda'w$. Y al llegar á un cierto límite de λ' se producirá, finalmente, la rotura.

Así pues, y la experiencia lo confirma plenamente, del valor de la velocidad que al ocurrir un choque toma la superficie del sólido chocado depende que se produzcan en la zona de impacto:

1.º, deformaciones puramente elásticas cuando $\lambda = \frac{u}{w}$ es inferior á $\Lambda = \frac{L}{E}$; 2.º, deformaciones permanentes si λ excede á Λ , ó lo que es igual $u > w\Lambda$, y 3.º, si u supera mucho ese valor, la rotura del sólido chocado.

En los aceros dulces, corrientes en las construcciones, la celeridad w , que es la de propagación del sonido (*):

$$w = \sqrt{\frac{E}{d}} = \sqrt{\frac{2.200.000 \text{ kg./cm}^2}{0,0078 \text{ kg./cm}^3}} = 530000 \text{ cm. ó } 5306 \text{ m. por 1''}.$$

La carga límite elástica vale de 2.500 á 3.500 kg./cm² y la variación límite, Λ de 0,001.14 á 0,001.36. La velocidad crítica, $w\Lambda$, á partir de la cual aparecen las deformaciones permanentes, resulta de 6 á 7,20 metros por segundo.

Volviendo al ejemplo concreto, dentro del período en que v desciende de su valor inicial, 443 metros por segundo, los puntos del sólido en contacto con Q (los valores numéricos corresponden sensiblemente á los de una bala de fusil Remington), toman forzosamente al principio velocidades del orden de aquella, mucho mayores que el límite 7,20. La materia es *arrollada* en la zona de impacto; la energía del choque *no tiene tiempo* para transmitirse lateralmente é interesar el resto del sólido más que en pequeñísima proporción y se gasta casi íntegra en taladrarlo total ó parcialmente. Se transforma, por fin, en calor, salvo una parte insignificante transmitida hasta las sustentaciones y almacenada en forma de trabajo elástico en ellas y en el sólido.

De ahí nace la importancia capital de forzar la velocidad en las armas de fuego, y, por lo contrario, de aumentar la relación Λ , forzando la carga límite elástica L , en los blindajes. Claro que el espesor del sólido interviene eficazmente, más que por el aumento de masa, por *sostener*, por decirlo así, las capas inferiores, á las que no llega íntegra, sino muy reducida, la velocidad destructiva u , á las capas superiores, ya taladradas las primeras, aplastadas las siguientes, menos deformadas las subsiguientes, etcétera, hasta llegar, si el espesor es grande, por minoración progresiva de u á valores de ésta inferiores á Λw , que sólo producen deformaciones elásticas.

(*) La densidad d es la masa específica, expresada en kilogramos-masa por unidad de volumen. Involucra el factor $\frac{1}{g}$ y la expresión de w resulta, como debe, de la dimensión línea $\times$ (tiempo)⁻¹.

A medida que, á igualdad de fuerza viva $\frac{Qv^2}{2g}$, aumenta Q y disminuye v , los efectos plásticos y caloríficos, que no sólo afectan al sólido P , sino también al cuerpo Q , absorbiendo en uno y en otro una porción considerable de la energía del choque, van siendo menores y cada vez mayor la porción transformada y almacenada en trabajo elástico.

El límite, la transformación íntegra, no se realiza nunca, como ya hemos visto, (31), aun tratándose de masas muy pesadas y á cortísima velocidad: hay siempre una *disipación* de energía, favorable á la resistencia del sólido, en forma de elevación de temperatura en la zona de contacto de P y Q , rebote de éste en muchos casos, en otras deformaciones plásticas locales por verificarse el contacto en superficie muy pequeña, vibraciones sonoras, etc. Las expresiones (34) y (35) son *límites* y la exageración que implican puede ser muy grande. Tomándolas como *ciertas* hay completa seguridad.

El cálculo de la acción de un choque, $Q\alpha = \frac{Qv^2}{2g}$ kilogramos, se reduce á determinar las cargas sufridas por la construcción y la flecha q_0 bajo la acción *gradual* de Q kilogramos y á multiplicar los valores de aquéllas por el amplificador

$$\sqrt{\frac{2\alpha}{q_0 \left(1 + k \frac{v^2}{Q}\right)}} \quad (36)$$

que afecta igualmente á todas las flechas calculadas bajo la acción de Q . Si la construcción es hiperestática, las reacciones, fuerzas ó momentos, correlativos al peso gradual Q , también sufrirán igual amplificación. El cálculo viene á ser, por tanto, de falsa posición.

V

Aplicaciones generales.

Recapitemos lo expuesto para concretar su aplicación práctica.

El trabajo elástico, gradualmente desarrollado, es:

$$\begin{aligned} (\mathfrak{T})_0^1 = & \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{M^2}{EI} dl + \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{N^2}{ES} dl + \\ & + \frac{1}{2} \times \int_0^1 \frac{T^2}{E_t S} dl \quad (37) \end{aligned}$$

Si ha lugar á ello, está complementado con el término relativo á la torsión:

$$\frac{1}{2} \int_0^1 \frac{(Mt)^2}{E_t I_t} dl \quad (37')$$

Y si hay una variación lineal desde λ_s hasta λ_t en las fibras superior é inferior, distantes entre sí e y á las que corresponde en la fibra neutra λ_0 comprende también los términos:

$$\int_0^1 M_t \times \frac{\lambda_s - \lambda_t}{e} dl + \int_0^1 N_t \times \lambda_0 dl \quad (37'')$$

$\mathfrak{T}$ es una función: 1.º, de los elementos de cálculo M, N, T , á su vez funciones de las causas exteriores al sólido, $\Sigma A + \Sigma R$, en magnitud y posición; 2.º, de las dimensiones y forma del sólido,

caracterizadas por S é I , en general variables, así como de su elasticidad, generalmente supuesta constante.

Hay, por lo tanto, una variable *fundamental* geométrica, l , longitud contada á lo largo del eje neutro á partir de un origen. S é I son funciones explícitas de l ; M, N, T también lo son. Al integrar entre cero y un valor particular de l, l_p , se totaliza el trabajo elástico desarrollado en el trozo de sólido comprendido entre el origen, un extremo generalmente y la sección definida por el subíndice p , de área y momento de inercia S_p, I_p .

Ese trabajo, ya integrado, $(\mathfrak{T})_0^{l_p}$ es una expresión *independiente* de la variable l . Si son conocidas todas las causas $\Sigma A + \Sigma R$ y se introducen sus valores, $(\mathfrak{T})_0^{l_p}$ se reduce á un número concreto de unidades de trabajo.

Si los valores introducidos son todos numéricamente conocidos menos uno, el de la causa exterior, acción ó reacción *que obra precisamente* en la situación definida por l_p , $(\mathfrak{T})_0^{l_p}$ no es ya un número concreto de kilogrametros, sino una función lineal de la causa C_p

$$(\mathfrak{T})_0^{l_p} = (f) \times C_p$$

en la que (f) es una magnitud concreta de la dimensión línea ó ángulo (uno ó cero) según que C_p sea una fuerza ó un momento.

Si, aunque C_p sea desde luego conocido, se le supone capaz de variar sufriendo un incremento infinitesimal, á compás del cual $(\mathfrak{T})_0^{l_p}$ sufrirá otro, la relación de incrementos $\frac{\text{trabajo}}{\text{causa}}$ es decir, la derivada

$$\frac{d(\mathfrak{T})_0^{l_p}}{dC_p} = (f) \quad (38)$$

es el recorrido de la causa C_p .

Recordemos que (f) se mide en la línea ó eje de C_p y que su signo es $+$ ó $-$, según que su dirección concuerde ó discuerde con la de C_p .

Si la causa C_p es todavía incógnita y, por lo contrario, conocemos *a priori* su recorrido, (38) nos permite evaluarla.

Hemos supuesto previamente conocidas todas las demás causas C . En ciertos casos, sistemas isostáticos, lo son, por las ecuaciones generales del equilibrio, mucho más sencillas que (38). En otros, sistemas hiperestáticos, del conjunto $\Sigma C = \Sigma A + \Sigma R$, conocemos desde luego todas las A y, mediante dichas ecuaciones, algunas (3 ó 6), de las R ; hay, ante todo, que determinar las R restantes.

Si las sustentaciones de un sistema plano son en número de:

- ϵ , empotramientos;
- α , articulaciones;
- δ , apoyos de dilatación,

el número total de reacciones es:

$$\begin{cases} \epsilon(V, H, m) = 3\epsilon \\ \alpha(V, H, o) = 2\alpha \\ \delta(V, o, o) = \delta \end{cases} \quad 3\epsilon + 2\alpha + \delta$$

y el de indeterminadas $(3\epsilon + 2\alpha + \delta) - 3 = (i)$. (Los alemanes suelen decir «sistema i veces indeterminado».) Conocidas todas las A , tres de las R se expresan en función de ellas y de las (i) R restantes; éstas son las únicas variables independientes y mediante ellas y la variable fundamental l se formulan M, N, T .

Si $m, n, p, \dots$ son los subíndices que corresponden á las sus-

tentaciones que dan esas R ; si hacemos las integraciones respectivas de (37) desde cero á $l_m, l_n, l_p, \dots$ y derivamos parcialmente respecto á $R_m, R_n, R_p, \dots$ tendremos tantas ecuaciones:

$$\frac{d(\mathfrak{F})_0^{l_m}}{dR_m} = (\rho)_m; \quad \frac{d(\mathfrak{F})_0^{l_n}}{dR_n} = (\rho)_n$$

$$\frac{d(\mathfrak{F})_0^{l_p}}{dR_p} = (\rho)_p; \dots$$

como incógnitas. Y siempre que conozcamos desde luego los respectivos recorridos (ρ) el problema estará resuelto.

Los recorridos (ρ) de las reacciones son: 1.º, nulos, como límite ideal de perfección, al que se aproxima muchísimo una obra bien sustentada; 2.º, desconocidos, pero calculables en función de la reacción correspondiente; por ejemplo, en un soporte de longitud L_s , sección S_s y coeficiente de elasticidad E_s :

$$(\rho)_p = C_p \times \frac{L_s}{E_s S_s} \quad (39)$$

3.º Calculables por las condiciones de cambio de volumen, como ya hemos visto (24) y (25).

En suma, llegamos á conocer totalmente con las R el sistema ΣC , y entonces podemos calcular las deformaciones de cualquier parte de la obra.

El procedimiento no puede ser más general. Basta saber bien la marcha, que es siempre la misma, para resolver toda clase de problemas.

En la práctica conviene invertir el orden en que, por claridad lo hemos expuesto. Es más sencillo, y claro que nada afecta al resultado, empezar por la derivación bajo el signo f y dejar para lo último la integración entre los límites debidos.

Así, pues, se parte de la expresión, función de las derivadas parciales;

$$\frac{d(\mathfrak{F})_0^1}{dR_p} = \int_0^1 \frac{M}{EI} \times \frac{dM}{dR_p} dl +$$

$$\int_0^1 \frac{N}{ES} \times \frac{dN}{dR_k} dl + \times \int_0^1 \frac{T}{Et S} \times \frac{dT}{dR_k} dl \quad (39)$$

Recordemos que las derivadas parciales de M, N, T , son los valores particulares de estos elementos, cuando el equilibrio se establece bajo la única acción unidad en lugar de R_p y las demás acciones se anulan. Se pueden obtener aquéllas derivando M, N, T , ó bien escribiendo directamente sus expresiones en el equilibrio unitario antedicho.

Tal como hemos expuesto los teoremas de Castigliano y de Mohr, parece que el cálculo del recorrido de un punto (ó de una sección) donde *no obre acción ninguna* es imposible. Según el primero, hay que derivar respecto á una acción *que no existe*; conforme al segundo, hay que sustituir esa misma acción cero por la unidad, lo que no parece legítimo.

Si introducimos en el punto (ó sección) de que se trate una acción infinitesimal, dY , el recorrido incógnito, y , producido por el sistema ΣA , sufrirá un incremento, dy .

Los elementos de cálculo, M, N, T , sufrirán sus respectivos incrementos y serán ahora de la forma:

$$(M + dM) = (M_1 A_1 + \dots + M_k A_k + \dots) + M_y \times dY \quad (40)$$

y análogos.

El trabajo elástico se convertirá en $(\mathfrak{F} + d\mathfrak{F})$ y el recorrido de dY será, como siempre (39):

$$\frac{d(\mathfrak{F} + d\mathfrak{F})_0^y}{d(dY)} =$$

$$= \int_0^y \frac{(M + dM)}{EI} \times \frac{d(M + dM)}{d(dY)} dl + \text{etc.} = y + dy \quad (41)$$

La derivada parcial de $(M + dM)$ respecto á la acción dY será M_y , es decir, el valor de $(M + dM)$ cuando $(A_1 \dots A_k \dots)$, se anulan y se sustituye dY por *uno*. El recorrido (41) es, pues:

$$y + dy = \int_0^y \frac{(M + dM)}{EI} \times M_y \times dl + \text{etc.}$$

cuyo límite, el recorrido buscado *cundo sólo existe* ΣA , es:

$$y = \int_0^y \frac{M}{EI} \times M_y dl + \text{etc.} \quad (42)$$

puesto que dy es de primer orden, lo mismo que $\int (dM) dl$, mientras que y, M, M_y , son todos finitos.

Basta, por tanto, introducir la acción unidad en el punto ó sección considerados y obtener los valores de M, N, T correspondientes al equilibrio, que sustituyen exactamente á las derivadas parciales del caso general. Dicha acción unidad será de fuerza, ó de momento, según que el recorrido que se quiere calcular sea lineal ó angular.

Se prescinde casi siempre de tener en cuenta las fuerzas tangenciales ó esfuerzos cortantes, T : su influencia en la deformación, y más todavía en el valor total del trabajo elástico, es pequeña. La complicación que introducen en el cálculo hace que tan sólo en uno comprobativo muy minucioso y de una construcción muy escatimada en dimensiones, valga la pena de apurar la exactitud. Los ejemplos lo demostrarán.

En muchas construcciones la influencia de las fuerzas normales, N , es también pequeña comparada con la de los momentos flectores, M , y se puede, por lo menos en una aproximación, prescindir de aquéllas. En otros casos, por ejemplo en los arcos muy rebajados, predominan los trabajos debidos á N con relación á los originados por M y constituiría *grave error* prescindir de aquéllos. (*)

La serie de ejemplos consecutivos pondrá de manifiesto cuanto queda dicho y aclarará la manera de desarrollar el procedimiento.

(Continuará.)

Apuntes sobre Mecánica social

POR ANTONIO PORTUONDO Y BARCELÓ,

Ingeniero de Caminos, Canales y Puertos.

(Conclusión.)

Energía de las agrupaciones.

Para ver la energía de una agrupación social, empecemos—como siempre—por recordar lo que sabemos por la Mecánica de los sistemas materiales.

(*) En un arco parabólico articulado, uniformemente cargado según la cuerda, M es constantemente nulo, como en su recíproco, puente colgado y como en el arco en catenaria uniformemente cargado á lo largo de la fibra neutra.