

y el de R_{21}

$$r_{21} = \frac{dT_1}{dR_{21}} = - \frac{dT_1}{dR_{12}}.$$

Como cualquiera que sea el trozo que se considere el recorrido es el mismo

$$r_{12} = r_{21} = \frac{dT_2}{dR_{12}} = - \frac{dT_1}{dR_{12}}.$$

La derivada parcial de T , trabajo elástico *total*, en el sólido sin cortar, *derivada que ahora no mide recorrido alguno*, resulta en virtud de lo anterior:

$$\frac{dT}{dR_{12}} = \frac{dT_1}{dR_{12}} + \frac{dT_2}{dR_{12}} = 0 \quad (22).$$

Como un incremento de trabajo elástico total conduce necesariamente á un aumento de reacción mutua, la segunda derivada de T es positiva. El valor de R_{12} , deducido de (22), hace T *mínimo*. Resulta así demostrado el segundo teorema de Castigliano: *Las fuerzas elásticas dentro de un sólido en equilibrio son en cada punto tales, que hacen, dentro de las condiciones de sustentación, mínimo el trabajo total de deformación elástica.*

Es sencillamente el resultado de la ley general de la naturaleza, el principio de la mínima acción. Entre todas las maneras con que un sólido puede, partiendo de un equilibrio inicial, llegar á otro equilibrio final, sujeto á las condiciones de sustentación, elige, irremisiblemente, puede decirse, aquella que, dentro de las condiciones impuestas, requiere un mínimo de trabajo, tanto de las causas exteriores como de las fuerzas moleculares interiores.

El teorema es rigurosamente exacto, sin más restricción que la general de ser las deformaciones *perfectamente elásticas*. El teorema de Menabrea, exacto solamente en el límite cuando $\Sigma Rr = 0$ resulta como corolario.

Consideremos, por ejemplo, un arco sobre dos estribos que ceden elásticamente, sustentados ambos en roca *que no ceda nada*. El sólido elástico comprende estribos y arco: las fuerzas interiores en la sección de arranques, aunque ésta ceda visiblemente, son tales que hacen mínimo el trabajo de *todo* el sistema. Si suponemos que los estribos van ganando progresivamente en rigidez seguirá cumpliéndose la condición de mínimo, pero dentro del trabajo total irá correspondiendo una parte cada vez menor á los estribos.

En el límite, cuando éstos no se deformen en absoluto, la condición persiste; el trabajo, que entonces es el del arco sólo, es un mínimo y las fuerzas interiores en los arranques pasan á ser las reacciones con recorrido y trabajo nulos.

El teorema de Maxwell, que como el de Menabrea sólo es exacto en el límite ($\Sigma Rr = 0$), resulta igualmente un corolario del de Castigliano.

El trabajo total del sistema $\Sigma A + \Sigma R$, tiende al límite ideal de perfección de las construcciones:

$$T = \frac{1}{2} \Sigma Aa - \lim \left(\frac{1}{2} \Sigma Rr \right) = \\ = \frac{1}{2} \{ A_1 a_1 + \dots + A_k a_k + \dots \}$$

El equilibrio bajo la acción unidad ejercida en q , determina en p un recorrido a'_{pq} . A dicha acción corresponden ciertas reacciones indispensables para el equilibrio: a'_{pq} engloba el resultado del conjunto de una y de otras. Una acción A_q veces mayor,

origina $a'_{pq} \times A_q$. El recorrido total en p , en el equilibrio bajo el sistema completo, es de la forma:

$$a_{p(1,2,\dots,n)} = \frac{dT}{dA_p} =$$

$= a'_{p1} \times A_1 + \dots + a'_{pp} \times A_p + \dots + a'_{pq} \times A_q + \dots$ (23)
función lineal de las únicas variables independientes A , puesto que la influencia de las R , funciones también lineales de A , está comprendida dentro de las a' .

Al demostrar el teorema de Castigliano, hemos encontrado una ecuación (c) que en el límite, $\Sigma Rr = 0$, da:

$$a_p = \Sigma A \times \frac{da}{dA_p}$$

Su derivada respecto á A_q es:

$$\frac{da_p}{dA_q} = \Sigma A \times \frac{d^2 a}{dA_p \times dA_q} + 1 \times \frac{da_q}{dA_p}$$

puesto que todas las A , salvo A_q á la que multiplica a_q , son independientes de A_q .

Como todas las derivadas segundas de una función lineal son nulas, resulta, según (23):

$$\left(\frac{da_p}{dA_q} = a_{pq} \right) = \left(\frac{da_q}{dA_p} = a_{qp} \right)$$

El teorema de Maxwell no es riguroso, puesto que requiere $\Sigma Rr = 0$.

(Continuará.)

Apuntes sobre Mecánica social (1)

POR ANTONIO PORTUONDO Y BARCELÓ,

Ingeniero de Caminos, Canales y Puertos.

La energía universal.

Hemos hecho la exposición de los Principios y de los Teoremas principales de la Cinemática, la Estática y la Dinámica. Tanteando el camino que recorriamos, hemos ido traduciendo las proposiciones de la *Mecánica racional* para formular las correspondientes á la *Mecánica social*, que constituyen (para los fenómenos sociales) el *modelo mecánico* (Lord Kelvin). Sobre algunas convenciones y algunos supuestos, hubimos de solicitar del lector, en los *Preliminares*, todo aquello que necesitábamos para la exposición; y sobre esa base y esas hipótesis, hemos considerado las leyes abstractas del equilibrio y del movimiento, así de los individuos y elementos sociales como de las agrupaciones (2).

(1) Véase el núm. 1934

(2) Al recordar ahora por última vez la hipótesis del parámetro de n dimensiones psíquicas, que hube de proponer en los *Preliminares* para definir la posición del individuo en un asunto social, me ocurre que esto quizá pueda ser considerado como un ejemplo de la concepción abstracta de algunos matemáticos alemanes—especialmente *Georg. Cantor*—acerca de lo que llaman *número complejo de n números reales*. Estos n distintos valores reales $x_1, x_2, \dots, x_n$, (que se reúnen en el número complejo) son expresados en relación con sus diversas unidades respectivas.

Recordemos que esos matemáticos piensan que cada valor del número complejo define la posición de un punto—así lo llaman—en un *espacio aritmético de n dimensiones*; y los valores $x_1, x_2, \dots, x_n$, de los cuales depende el número complejo, son las n coordenadas de dicho punto. El espacio aritmético de n dimensiones viene á estar constituido por el *conjunto* de todos

Hemos visto las fuerzas de naturaleza psíquica, ya equilibrándose (estáticamente), ya influyendo sobre los movimientos por sus impulsiones ó por sus trabajos (dinámicamente); pero no se ha tratado de inquirir nada sobre la esencia ó naturaleza íntima de esas fuerzas, porque— como dijimos en la *Introducción*—no consideramos eso asequible, ni siquiera tiene sentido para nosotros, que pensamos las fuerzas como meras abstracciones.

Vamos á volver ahora á la consideración del trabajo de las fuerzas, porque este tema es importantísimo para la *Dinámica*, y acaso sea de gran interés relacionar los conceptos de *trabajo y energía* en el juego mecánico de las Sociedades, como lo es en la complejión mecánica de toda la Naturaleza.

Se sabe que en los sistemas materiales que estudia la Mecánica, como ciencia física, se llama *energía* todo lo que, transformándose de cualquier modo, sea capaz de convertirse en *trabajo*. Cualesquiera que sean las formas en que se presenten las energías, ya sean térmicas, eléctricas, químicas, mecánicas, etc., se transforman naturalmente unas en otras; y con ellas, se podrían relacionar (mediante equivalencias) los trabajos correspondientes á movimientos geométricos. Prescindimos aquí de ciertas limitaciones, como, por ejemplo, que la energía calorífica no se transforme directamente en energía química, como tampoco se transforme en química la energía mecánica. En cambio la eléctrica se transforma fácilmente en todas las distintas formas conocidas de energía, y á su vez todas éstas se transforman inversamente en energía eléctrica. Son conocidas muchas de las formas que revisten la *energía cinética* y la *potencial*; y se puede asegurar que algunas son todavía desconocidas para los hombres de ciencia. Las ciencias físicas—dándose la mano con la Mecánica—han formulado algunas leyes cuantitativas para su transformación, y han determinado el *equivalente mecánico* (1).

Los puntos posibles en él, ó sea de todos los valores posibles de los números complejos para todas las combinaciones de todos los valores reales posibles de las coordenadas $x_1, x_2, \dots, x_n$ en las n dimensiones de ese espacio aritmético. Y esos matemáticos demuestran que si se considerasen las n coordenadas de cada punto como funciones distintas de una sola variable u , resultaría que entre todos los valores reales posibles de esta u (de una sola dimensión) y los sistemas de valores posibles de $x_1, x_2, \dots, x_n$, podría establecerse correspondencia unívoca y recíproca—punto por punto—, es decir, en último término, que el conjunto de puntos ó posiciones en un espacio de n dimensiones, sería *equivalente* á otro conjunto de una dimensión ó lineal.

Ahora bien; ¿no se podría pensar que un determinado asunto social—tal como yo lo he entendido en estos *Apuntes*—es un ejemplo de espacio aritmético de n dimensiones? Y mirándolo así, la posición de un individuo en ese asunto, ¿no se definiría por un número complejo (que sería el parámetro hipotético nuestro) de n números reales que se reuniesen en él? Y ese número complejo, ¿no determinaría la posición de un punto en ese espacio aritmético de n dimensiones? Y el conjunto de todos los valores bien determinados, ó de todos los puntos posibles en un espacio aritmético de n dimensiones, ¿no es quizá la expresión ideal (en la pura Matemática) del conjunto de todos los valores posibles del parámetro de n notas psíquicas?

Y, finalmente, la correspondencia unívoca y recíproca que establecen esos matemáticos—punto por punto—entre los conjuntos de sistemas de valores reales posibles de $x_1, x_2, \dots, x_n$, y los valores reales posibles de una variable u de una sola dimensión, que conducen á un conjunto lineal, ¿no se podría aplicar igualmente á nuestro parámetro, según apuntamos en los *Preliminares* (pág. 50)?

Con todo género de reservas hacemos las interrogaciones que preceden, porque acaso las indicaciones que apuntamos podrían contribuir en algo á justificar nuestras hipótesis.

(1) Se sabe, por ejemplo, que una *caloría-gramo* (caloría pequeña), es decir, la cantidad de calor necesaria para elevar en un grado centígrado

Respecto de las formas de energía física que sean desconocidas, ó que no hayan podido ser estudiadas todavía completamente, admitiremos que puedan transformarse unas en otras, y en las ya conocidas y estudiadas; y admitiremos también que todas las transformaciones de energías físicas del mundo llamado *inorgánico*, se rijan por leyes cuantitativas, aunque casi todas esas leyes nos sean desconocidas.

* *

En el mundo llamado *orgánico* (vegetal y animal) se manifiesta la energía en nuevas formas, mucho más desconocidas por las ciencias llamadas naturales (la Fisiología y la Biología) de lo que eran las anteriores formas de energía por las ciencias físicas. Son patentes las energías cinéticas y potenciales que se presentan en el mundo orgánico de modo—al parecer—distinto que en el mundo inorgánico. Así, en cada semilla, en cada huevo existe, sin duda alguna, una complicadísima energía potencial, que después se manifiesta, en cada vegetal ó en cada animal, por un inmenso y variadísimo—casi inextricable—despliegue de energías cinéticas y potenciales por sus reacciones con el medio.

Aquellas incesantes é innumerables transformaciones de energías en todo lo *inorgánico*, se realizaban ante nuestra consideración dentro de moldes de un mismo género, como si dijéramos. Pero al considerar las transformaciones de energías en todo lo llamado *orgánico*, tanto en los individuos aislados (un vegetal ó un animal), como en las colecciones de individuos, sean familias, géneros ó especies, las transformaciones de energías parecen salir fuera de aquellos moldes. No porque estas energías cinéticas y potenciales nos aparezcan *en si mismas*, como algo diferente de las energías en el mundo inorgánico. Si nos parece que las transformaciones en el mundo orgánico son algo distinto de las que se realizan en el inorgánico, es porque aquéllas se concretan y particularizan de un modo tal en los individuos, y porque aparecen tales caracteres y limitaciones en las transformaciones (dentro de su inmensa riqueza y complejidad), que no acertamos á aplicar á ellas de *idéntico modo*, leyes como las que conocemos para las transformaciones de las energías en el mundo inorgánico, por lo cual muchos las han llamado *energías vitales*. Naturalistas de genio han llegado, después de profundísimos estudios, á formular algunas leyes, como Darwin, la de las variaciones y la selección natural en las especies vegetales ó animales, ó Lamarck la de las transformaciones por adaptación. Es natural pensar que estas leyes, por ejemplo, se cumplen en la Naturaleza mediante transformaciones complicadísimas de energías cinéticas y potenciales, que la ciencia está muy lejos todavía de conocer bien, aunque se avance más y más cada día en su estudio (1).

(de 15° á 16°) la temperatura de un gramo de agua, equivale á un trabajo mecánico de 4,17 *julios*, ó sean $4,17 \times 10^5$ *ergios*. Siendo 1 julio = 0,102 kilográmetros, se ve que la *caloría-gramo* equivale á $4,17 \times 0,102 = 0,425$ kilográmetros.

El equivalente mecánico de la *caloría grande* es, pues, de 425 kilográmetros.

(1) *Le Dantec* hace notar que la ley de la *selección natural*, y la de la *persistencia del más apto*, no expresan en el fondo sino la necesaria continuidad en la ascendencia genealógica de todo ser que viva en un instante dado. Ninguna de las variaciones que se han ido operando en un transcurso enorme de siglos, y por las cuales han pasado los ascendientes, ninguna le ha matado; porque allí habría terminado la historia de sus variaciones.

Aunque á nosotros no nos interesen directamente las leyes naturales á que obedezca la propagación de la vida, nos importa sí ver que estos procesos parecen realizarse mediante transformaciones de energías.

Las manifestaciones de energías que estudian la Botánica y la Zoología, en el nacimiento, en el crecimiento y en la vida entera de los individuos vegetales y animales, revelan claramente las transformaciones de unas energías en otras dentro de un mismo individuo.

Pero estas energías de que hablamos no parecen ser esencialmente distintas de las que se consideran en el mundo inorgánico. Las ciencias de aplicación como la Agronomía, por ejemplo, fundándose en el conocimiento de aquellas energías, ponen de relieve—mediante la observación y la experiencia—las transformaciones de las físicas y químicas (cinéticas ó potenciales) en estas otras energías llamadas vitales (cinéticas ó potenciales), dentro de cada individuo vegetal ó animal, y viceversa. Así, por ejemplo: las energías químicas que hay en el agua ó en el aire, las físicas que hay en el calor, en la luz, en la electricidad, etc., se transforman en otras energías internas en los vegetales y animales. Y viceversa: éstas se transforman en calor, en esfuerzos musculares que dan variadísimos trabajos mecánicos, proporcionando energías para el mundo inorgánico, etc.

Dentro del mundo orgánico son patentes también las transformaciones de energías del reino vegetal en otras del reino animal, y viceversa. Así, por ejemplo: las energías potenciales que hay en la hierba, en un grano de trigo, etc., se transforman, mediante los procesos de la nutrición, en energías internas en el animal. Y viceversa, los residuos de un animal llevan energías que se convierten en otras de los vegetales, etc.

En resumen, todo parece indicar, en una vista rápida, que las transformaciones mutuas de las energías físicas, y químicas y fisiológicas se cumplen igualmente en la Naturaleza viva que en la que se dice muerta, aunque sólo en casos muy contados sea posible formular hoy leyes cuantitativas de las transformaciones. Se realizan á nuestra vista incesantemente, y todos los seres son tan profundamente penetrados por esas transformaciones en su continuidad, que en ellas está la manera de ser de la Naturaleza con sus movimientos todos y con la vida toda.

Prescindiendo de los detalles, se puede decir, en términos generales, que es siempre alguna manifestación de energía química potencial en el organismo la que provoca inmediatamente cada energía fisiológica, en la cual se transforma aquélla mediante alguna destrucción del material orgánico y la consiguiente pérdida de parte de la energía potencial, que está en las reservas. Inversamente las energías fisiológicas del animal, al transformarse en físicas, conducen á alguna manifestación de energía térmica (para disiparse) ó á energía mecánica.

Perteneciendo el hombre al reino animal, le son aplicables las brevísimas consideraciones anteriores. Veamos ahora rápidamente algo respecto al mundo *psíquico*.

* *

En los animales de las especies superiores—el hombre entre ellos—hay variadísimas *energías psíquicas*, que se relacionan con sensaciones, recuerdos, ideas, sentimientos, emociones, voliciones, etc. Son las que más nos interesan aquí, porque están íntimamente ligadas con lo que hemos llamado fuerzas psíquicas sociales.

Parece que estas energías psíquicas surgen primeramente en el individuo animal, mediante transformaciones internas muy complicadas y oscuras de las energías físicas y químicas por los procesos de la nutrición, la respiración, etcétera, transformándose en fisiológicas, y luego en *otras correspondientes* energías psíquicas.

Estas últimas transformaciones son más oscuras aún que aquellas de las energías físicas y químicas entre sí, ó de éstas en las energías fisiológicas de un animal.

Se ve que primeramente las energías físicas exteriores llegan como excitaciones de los sentidos, y se transforman en las energías nerviosas interiores al organismo; y éstas vuelven á transformarse en los órganos centrales. Las últimas formas en que la energía se manifiesta en el campo de la conciencia, son las que llamamos energías psíquicas. Aunque no conozcamos bien su naturaleza, la Psicología fisiológica ha adelantado mucho en el estudio de los fenómenos psíquicos, viendo sus procesos en conexión con los procesos materiales que les son *paralelos*, es decir, con los procesos fisiológicos correspondientes.

Un distinguido escritor, *W. M. Pepperrell Montague*, intenta establecer: "que lo que un individuo (desde su interior psíquico) *llama sus sensaciones*, son ni más ni menos que lo que otro individuo (desde fuera) describiría como las formas de energía potencial en que se transforman las energías cinéticas de las corrientes nerviosas al atravesar el cerebro del primer individuo,,.

Dice Ostwald, que los fenómenos psicológicos pueden concebirse como fenómenos energéticos, y ser interpretados como tales, lo mismo que todos los demás fenómenos. En esos fenómenos de la energía llamada nerviosa, se observa que los procesos (en todo el complicado sistema nervioso cerebral) llevan consigo consumo de energía durante la actividad psíquica.

Nuestro compatriota *D. José R. Carracido*, después de establecer en su *Tratado de Química biológica* que "el trabajo específico de los nervios es correspondido en todas sus formas por el consumo de cierta cantidad de potencial químico,,; y de afirmar que "es indudable que no se produce acto psíquico alguno sin otro material correspondiente,, rechaza (como aventurada) la afirmación hecha por *Gautier* de que el pensamiento no tiene equivalente mecánico ni químico. El ilustre Profesor español dice que no puede darse por demostrada—como pretende Chauveau—la *íntegra conversión* de la energía del trabajo fisiológico en calor sensible; y cree posible, por el contrario, que la actividad psíquica corresponda á un verdadero trabajo que sea siempre una cantidad positiva, y no pueda reducirse á cero.

Pero si los procesos de transformación son muy complicados y oscuros, y hoy se sabe poco de ellos, lo que está á la vista—y todo el mundo reconoce—es la *íntima conexión y correspondencia* que hay entre las energías físicas y químicas, las fisiológicas, y su paralelismo con las psíquicas en cada individuo; de tal modo, que el estado psíquico de un individuo es en general *función* de todas las variables que constituyen el estado fisiológico, según se ha dicho. Se muestra por multitud de fenómenos de la vida; y no podía menos de ser así, puesto que unas y otras se dan en el *todo* individual, *que es uno*.

(Continuará.)