

Su visita á los puertos de Sevilla, Cádiz y Huelva, en los últimos días de Enero de 1901, fué un acontecimiento, y el Sr. Alzola recibió muchas pruebas de alta consideración y cariño.

Con probidad patriótica que nunca se elogiara bastante, detuvo algunos expedientes sobre concesiones de carbón á extranjeros en las islas Canarias y en las rías de Galicia, y propuso al Ministro la preparación de disposiciones concernientes á la defensa nacional, como denegación de concesiones de muelles y embarcaderos á extranjeros en la vecindad de las plazas fuertes y en los fondeaderos de cierta importancia.

Siendo Presidente de la Cámara de Comercio de Bilbao, reclamó en el Ministerio de Agricultura y Obras públicas contra el defectuoso alumbrado marítimo del Machichaco y la Galea. Se deben al Sr. Alzola otras muchas innovaciones, reformas é iniciativas de la misma importancia.

La conducción de su cadáver al cementerio de Vista Alegre constituyó una verdadera manifestación de duelo, habiendo sido presidido este acto por la Excm. Diputación de Vizcaya en cuerpo de comunidad y por la familia y amigos del finado.

Descanse en paz nuestro ilustre amigo, y reiteramos nuestro más sentido pésame á la familia del finado, confiando que el cielo sabrá premiar sus virtudes y sus desvelos continuos en el trabajo.

F. DE L.

*
* *

La REVISTA DE OBRAS PÚBLICAS, que tan grato recuerdo conserva del que sobresalientemente colaboró en sus trabajos, siendo digno de especial mención el de *Las obras públicas en España*, que tantos elogios mereció, interpreta el sentimiento de todos los Ingenieros de caminos, asociándose de todo corazón á las frases de duelo antes expresadas por la muerte del que tanto se distinguió en la profesión y en cuanto empleó su actividad. Su nombre ilustre no se olvidará entre nosotros. Nos asociamos al pesar de su distinguida familia.

Homenaje á Alejandro Olano.

La muerte de Alejandro Olano ha sido por todos sentida; en unos la noticia de su trágico fin ha producido el sentimiento humanitario natural por la pérdida de un compañero de carrera ó de un conocido de varios días; pero en muchos, en los que fuimos sus buenos amigos, la pena ha sido profunda, el sentimiento grande, ¡tan grande como eran el talento y el corazón de Olano!

Su muerte ha removido en mí los afectos juveniles de hace veinticinco años, de esa época de la vida, en que la amistad está cimentada con las ilusiones, y aun no adulterada con los desengaños: entonces, á pesar de estar distanciados por los estudios que en la Escuela cursábamos, nos unió, sin embargo, una estrecha y fraternal amistad, después nos separamos, nos volvimos á ver á su regreso de Filipinas, de cuando en cuando he recibido con satisfacción noticias de sus triunfos ingenieriles; luego he sabido con amargura su trágica muerte.

¡Ciega y torpe muerte, sorprendiste á nuestro malogrado compañero en el apogeo de su carrera, en la plenitud de su vida, te hiciste dueña de su cuerpo, pero su espíritu perdurará en nosotros!

El nombre de Olano no será olvidado por los que fuimos sus amigos, ni tampoco debe olvidarlo ningún Ingeniero de caminos, no sólo por las especiales circunstancias de su muerte, sino también por sus méritos profesionales: debemos rendirle homenaje de sabio y de valiente.

Una manera de cristalizar este pensamiento pudiera ser la construcción de una artística lápida expresiva de sus méritos técnicos y de su trágica muerte, que será costeada por el Cuerpo de Caminos y colocada en el Musel, en el sitio mismo en donde, cumpliendo con su deber, nos lo arrebató la muerte.

De esta manera su cuerpo quedará bajo la tierra, su espíritu petrificado en su obra y su recuerdo en nuestros corazones.

Descanse en paz el ilustre Ingeniero, el hombre honrado y valeroso, el buen amigo y compañero.

FRANCISCO G. DE MEMBRILLERA.

Barcelona 1.º de Noviembre de 1912.

LOS MÉTODOS DE CÁLCULO DE ESTRUCTURAS DERIVADOS DEL TRABAJO ELASTICO

POR D. JUAN MANUEL DE ZAFRA,

Profesor de Hormigón armado y de Puertos en la Escuela especial de Caminos Canales y Puertos.

I

Introducción.

La Mecánica aplicada, la ciencia á un tiempo racional y experimental, caballo de batalla del Ingeniero, aparece, para la mayoría de los que en España la practican, con un carácter absolutamente estático. La noción de trabajo en nada interviene en el cálculo de construcciones, tal como, analítica ó gráficamente, se suele realizar. Y mientras que los problemas estáticos se resuelven fácilmente, se tropieza con dificultad grave en cuanto aparecen acciones dinámicas cuyo efecto en la construcción precisa evaluar.

La orientación de la escuela francesa en el sentido estático y el ser francesas las obras en que la mayoría de los Ingenieros españoles ha estudiado Mecánica aplicada, son la causa de aquéllo.

El cálculo de la estabilidad de una construcción es un problema esencialmente dinámico: es el estudio del paso de un equilibrio inicial á otro equilibrio final, paso que implica fatalmente un movimiento. Se mueven las causas exteriores, cuya acción rompe el equilibrio primitivo; se mueve poquísimos, pero se mueve, la construcción, algo en su conjunto, mucho más en sus elementos unos respecto á otros: *trabajan*, á un tiempo, las causas exteriores y la construcción. La energía puesta en juego por aquéllas se almacena en ésta, una vez logrado el equilibrio y allí subsiste, en forma potencial, hasta que la desaparición de las causas provoca un proceso recíproco del primero y que realiza á expensas de esa energía.

El principio de D'Alembert permite reducir los problemas dinámicos á estáticos, mediante la introducción de las fuerzas de inercia. Si las velocidades de las causas exteriores y de la construcción decrecen indefinidamente, es decir, si el movimiento de unas y otra se hace indefinidamente lento, desaparecen aquellas fuerzas. Tal es el fundamento de la escuela estática: el problema

se reduce al del equilibrio *final*, entre unas causas que *ya se han movido* y una construcción que *ya se ha deformado*.

Si las causas son de suyo dinámicas, un choque, por ejemplo, no hay posibilidad de prescindir de las fuerzas de inercia: el problema se resuelve por dicha escuela, siempre por reducción al caso estático, mediante el principio de D'Alembert.

La escuela cinética plantea el problema de un modo mucho más general, aplicando el principio de la conservación de la energía. Poco importa que las causas exteriores sean estáticas ó dinámicas: ponen en juego un trabajo, una energía, que al *desaparecer aparentemente*, alcanzado el equilibrio final, tiene que subsistir íntegra; la construcción la guarda en las deformaciones y movimientos y hasta, á veces, en la elevación de temperatura que ha experimentado. En lugar de igualdades de fuerzas ó equivalencia de éstas con las originadas por deformaciones, son igualdades de trabajos, desarrollados por las causas, absorbidos por la construcción, las que maneja la escuela cinética. Sus procedimientos se reducen á uno solo: bien sabido, y es muy sencillo, cualquier problema, estático ó dinámico, se plantea con suma facilidad.

Y, sin embargo, como la verdad es una sola, ambas escuelas llegan naturalmente, al mismo resultado: por el camino más directo la cinética, por otro, en general más tortuoso, la estática.

Es curioso que la escuela francesa, desde Bresse (1859) hasta los tratadistas de hoy día, haya desdeñado seguir la senda empezada á abrir por Clapeyron (1833) y proseguida por Lamé (1852). Verdad es que Clapeyron había sido precedido por los suizos Bernoulli (Daniel) y Euler (1741 y 1744), aunque sin generalizar éstos la ley de igualdad de trabajos.

El italiano Menabrea (1858), el inglés Maxwell (1864), el alemán Mohr (1874), y sobre todo el italiano Castigliano (1873 y 1879), han sido, parcialmente aquéllos, totalmente éste, los fundadores de la escuela. Y, sin embargo, no se ha desarrollado sino entre los alemanes, con Müller Breslau á la cabeza (1884), y no ha tomado gran auge sino ya entrado este siglo, coincidiendo con la aplicación del hormigón armado en la forma tan atrevida como científica que ha alcanzado en Alemania.

Desde hace algunos años, por seguir esas aplicaciones alemanas del hormigón armado, estudiamos los procedimientos de cálculo cinético y hemos tenido ocasión de aplicarlos repetidas veces. Enamorados de su generalidad y de las ventajas que procuran, tratamos de difundir su conocimiento y de ponerlos al alcance de los compañeros que quieran utilizarlos.

Con objeto de hacer la exposición lo más clara y fácil posible, procederemos del modo más elemental, á riesgo de que se nos tilde de pesadez.

Antes de abordar el estudio del trabajo estableceremos las notaciones y representaciones que hemos de emplear.

Una fuerza, representada por un segmento de su línea de acción con su flecha, será indicada por diversas letras mayúsculas, según la clase de causa ó efecto á que se refiera: *F*, fuerza en general; *Φ*, fuerza elástica; *A*, acción; *R*, reacción, etc.

La proyección sobre la línea de una fuerza, del camino recorrido por su punto de aplicación, se llamará *recorrido lineal*; estará representado por otro segmento de la línea de acción, con su flecha correspondiente y afectado con los signos $+$ ó $-$, según que su dirección concuerde ó discuerde con la de la fuerza (figura 1.^a). Se designará por las minúsculas *f*, *φ*, *a*, *r*, etc., que en cada caso correspondan á *F*, *Φ*, *A*, *R*, etc.

El trabajo, producto de fuerza por recorrido, estará representado por el área del rectángulo *Ff*, *Φφ*, *Aa*, *Rr*, con el mismo signo del recorrido; á la derecha de la línea de acción si es positivo y viceversa.

El momento de un par (fig. 2.^a), área del paralelogramo construido con sus dos fuerzas, estará representado lo mismo que una fuerza, sobre cualquier línea de acción (eje) normal al plano del par. Si las escalas son:

unidad de longitud $< > E$ unidades de fuerza

unidad de longitud $< > e$ unidades de recorrido

la de momentos es:

unidad de longitud $< > Ee$ unidades de momento.

E, *e*, (*Ee*), son así magnitudes del orden cero, números abstractos. Las designaciones serán: *m*, momento en general, ó también de empotramiento; *A*, acción; *R*, reacción (acciones y reacciones pueden ser del género fuerza ó del género momento).

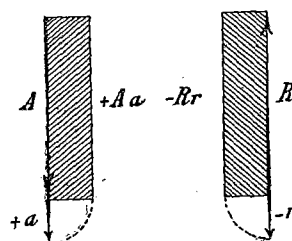


Fig. 1.^a

El ángulo descrito por cualquier línea del plano del par se llamará *recorrido angular*; estará representado por un segmento medido en el mismo eje arbitrario del par, afectado por el signo $+$ si el sentido del giro concuerda con el del momento y viceversa. Su escala será:

unidad de longitud $< >$ unidad de ángulo

y su designación:

μ , α , r , etc., correlativa con *m*, *A*, *R*, etc.

El trabajo, producto del momento por el ángulo girado, estará representado por el área del rectángulo $m\mu$, $A\alpha$, Rr , etc., con el mismo signo del recorrido angular y á derecha ó izquierda del eje, según sea $+$ ó $-$.

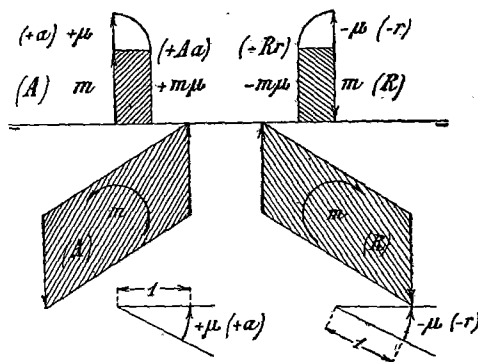


Fig. 2.^a

La escala de trabajos es naturalmente la misma, procedan de fuerzas ó de momentos:

unidad de superficie $< > (Ee)$ unidades de trabajo;

Recordemos que los pares se proyectan, componen, etc., lo mismo que las fuerzas, operando sobre los ejes que en magnitud y sentido los representan, y que del mismo modo se procede con los recorridos angulares ó rotaciones. Así, pues, en el caso más general de considerar un momento, representado por su eje y un ángulo de giro alrededor de otro eje, llamaremos *recorrido angular* correspondiente al momento á la proyección sobre su eje del segmento representativo del giro.

Observemos que como las fuerzas y momentos pueden tener cualquier dirección en el espacio, no cabe atribuirles signos: sólo son éstos posibles en los trabajos y resultan sencillísimamente de la convención admitida (*).

II

El trabajo virtual.

Si sobre un punto material en equilibrio actúan diversas fuerzas y el equilibrio se conserva, la suma de proyecciones de aquellas sobre cualquier dirección *arbitraria* debe ser nula:

$$\sum F \cos \alpha = 0.$$

Si en esa dirección se supone posible una desviación *virtual*, v , del punto, el producto $v \times \sum F \cos \alpha$, idéntico á la suma $\sum F \times (v \cos \alpha)$ es también necesariamente nulo.

$(v \cos \alpha)$ representa un *recorrido virtual*, f , en la dirección de cada fuerza. Como v y α son arbitrarios, f es en absoluto independiente de F .

Indicando con $\bar{F}$ dicha independencia, el símbolo $\sum \bar{F} f = 0$, expresión del *trabajo virtual nulo*, es la expresión del equilibrio del punto.

Si sobre el punto actúan pares ó momentos m , debe resultar también $\sum m \cos \alpha = 0$ en cualquier dirección *arbitraria* en que se proyecten aquéllos. Si alrededor de esa dirección arbitraria se considera posible un giro ó *desviación angular virtual* r ,

$$r \times \sum m \cos \alpha = \sum m (r \cos \alpha) = 0.$$

$(r \cos \alpha)$ representa un *recorrido virtual*, μ , alrededor del eje de cada momento. Resulta análogamente, por la arbitrariedad de r y de α , $\sum m \mu = 0$, nulidad del trabajo virtual de m .

Si, en general, actúan sobre el punto fuerzas y momentos, el equilibrio exige:

$$(1) \quad \sum \bar{F} f = 0 \quad ; \quad \sum \bar{m} \mu = 0 \quad (2)$$

Designando, en general, por $\bar{C}$ las *causas* (fuerzas ó momentos) *independientes de los recorridos*, c , efectuados virtualmente (los lineales en las direcciones de las fuerzas, los angulares alrededor de los ejes de los momentos), las expresiones (1) y (2) se verifican siempre que $\sum \bar{C} c = \sum \bar{F} f + \sum \bar{m} \mu = 0$. Para que la suma de los productos $(\bar{C} c)$ sea nula, *cualesquiera* que sean $\bar{C}$ y c , se necesita imprescindiblemente que sean nulas *por separado* las sumas $\bar{F} f$, $\bar{m} \mu$.

Un sistema de valores $f' \mu'$ podrá conducir á $\sum \bar{C} c = 0$ si se cumple $\sum \bar{F} f' = -\sum \bar{m} \mu'$. Con las mismas $\bar{F} \bar{m}$ y μ' , otro sistema f'' conducirá á $\sum \bar{F} f'' \geq -\sum \bar{m} \mu'$, y no se verificará ya $\sum \bar{C} c = 0$.

Por este mismo razonamiento, la condición $\sum \bar{C} c = 0$, entendida la suma á todas las causas $\bar{C}' \bar{C}'' \dots$ que actúen sobre un sistema de puntos materiales *invariablemente unidos*, implica necesariamente $\sum \bar{C}' c = \sum \bar{C}'' c = \dots = 0$. Un sólido *indeformable* permanece en equilibrio si el trabajo virtual de las causas que sobre él actúan es nulo.

Si el sólido es deformable, pero dentro del período de elasticidad perfecta (**) entre punto y punto materiales aparecen variaciones de distancia: nace un sistema de fuerzas interiores Φ , correlativo con el de causas C . Cada punto efectúa, relativamente al

inmediato, un movimiento que proyectado en la dirección de Φ da un recorrido φ , correlativo con el sistema de recorridos c . Si *cualesquiera* que sean de una parte las causas $\bar{C}$ y las fuerzas por ellas originadas, $\bar{\Phi}$, y de otra los recorridos c y los á ellos correspondientes, φ , la suma de todos los trabajos virtuales $\bar{C} c$ y $\bar{\Phi} \varphi$ es nula, el sólido quedará en equilibrio.

Contemos positivamente los trabajos cuando concuerdan los sentidos de causas (fuerzas ó momentos) y recorridos (lineales ó angulares). En el interior del sólido esos sentidos son siempre opuestos: las fuerzas elásticas *coartan* las deformaciones de que nacen. Poniendo en evidencia el signo, la expresión del equilibrio es:

$$\sum \{\bar{C} c - \bar{\Phi} \varphi\} = 0$$

$$\sum \bar{C} c = \sum \bar{\Phi} \varphi \quad (3)$$

ó sea la igualdad, en valor absoluto, de los trabajos virtuales de las causas externas y de las fuerzas internas, cualesquiera que sean, de una parte las causas, de otra los recorridos de éstas.

Las causas exteriores son de dos clases: acciones y reacciones. De obrar sólo las acciones el sólido se pondría y permanecería en movimiento: los cuerpos que sustentan al sólido se oponen, pero no en absoluto; ceden, deformándose y restringiendo el movimiento y de su deformación nacen las reacciones que llegan á anularlo y á dejar finalmente al sólido en equilibrio.

Un buque al que se agrega un peso, aumenta visiblemente de calado. Un puente de arco entre dos macizos de roca parece que no sufre movimiento alguno en sus arranques cuando penetra una sobrecarga. En realidad la roca cede elásticamente y, aunque en cantidad inapreciable, *se mueven* los arranques del arco.

Las causas externas satisfacen, llegado el equilibrio, á la condición *simbólica*

$$\sum C = \sum A + \sum R = 0 \quad (4)$$

C , A , R , representan lo mismo fuerzas que momentos. La expresión (4) involucra, de este modo, las condiciones de la Estática, seis para los sistemas de tres dimensiones y tres para los de dos.

Consecuencia de (3) y de (4) es $\sum \Phi = 0$, puesto que C y Φ constituyen un sistema total en equilibrio.

Toda reacción nace de una deformación del cuerpo sustentador, y, por tanto, implica un recorrido lineal ó angular, cuya proyección, r , sobre la fuerza ó sobre el eje del par, es de sentido opuesto al de éstos: la reacción *coarta* y limita la deformación. El trabajo de las reacciones es resistente, negativo: poniéndolo en evidencia resulta como condición de equilibrio:

$$\sum \bar{C} c = \sum \bar{A} a - \sum \bar{R} r = \sum \bar{\Phi} \varphi. \quad (5)$$

A las acciones $\bar{A}$ corresponden, *por las formas de sustentación*, determinadas reacciones $\bar{R}$ y, *por la constitución y forma del sólido*, determinadas fuerzas internas $\bar{\Phi}$. A los recorridos a corresponden, análogamente, determinados r y φ . Como las variables $\bar{A}$, a , son en absoluto independientes una de otra, lo son también entre sí las respectivas funciones, $\bar{R}$ respecto á r , $\bar{\Phi}$ respecto á φ . Si, cualesquiera que sean $\bar{A}$ y a , se verifica la condición (5), el sólido elástico queda en equilibrio.

El ideal del constructor sería anular en absoluto los recorridos r . En la imposibilidad de lograrlo, se procura sustentar las construcciones de tal modo que los posibles r sean sumamente pequeños. El ideal $\sum \bar{R} r = 0$, es decir, la nulidad del trabajo puesto en juego en las sustentaciones no se alcanza por comple-

(*) Negativo equivale á *resistente*. Como veremos, todo trabajo negativo se acumula en forma de energía potencial.

(**) Ningún cuerpo la posee desde un principio. Por la reiteración ó permanencia de cargas, todos los materiales de construcción llegan á ser, dentro de ciertos límites, perfectamente elásticos.

to, pero falta poco. Así, pues, en una construcción *bien establecida* se puede admitir *con suficiente aproximación*

$$\Sigma \bar{A} a = \Sigma \bar{\Phi} \varphi. \quad (6)$$

Cada sustentación produce un sistema de reacciones infinitesimales, aplicada cada una á un punto de la superficie de contacto entre el sólido y el cuerpo sustentador. Este sistema se sustituye por uno equivalente, constituido por la fuerza y par resultantes de trasladar todas aquellas reacciones al centro de gravedad de dicha superficie. La fuerza á su vez se sustituye por sus dos componentes, vertical y horizontal. El trabajo Rr equivale á la suma $\bar{V}v + \bar{H}h + \bar{m}\mu$ y la condición ideal queda expresada por

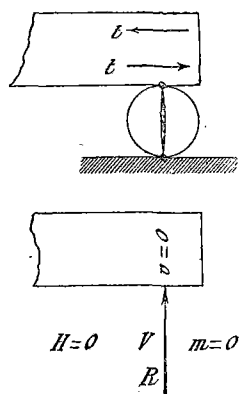
$$\Sigma \{ \bar{V}v + \bar{H}h + \bar{m}\mu \} = 0$$

que por el razonamiento ya conocido, y en virtud de la independencia entre reacciones y recorridos, implica la nulidad de cada uno de los trabajos $\bar{V}v$, $\bar{H}h$, $\bar{m}\mu$ relativos á cada sustentación.

Recordando que llamamos *recorrido* al efectuado según la dirección de la fuerza ó alrededor del eje del momento, se comprende que ciertas formas de sustentación permitan al sólido elástico una deformación relativamente grande, pero sin componente alguna según la dirección ó alrededor del eje; es decir, con recorrido nulo y trabajo nulo.

Las formas de sustentación de un sistema plano son tres: apoyo *móvil*, ó de dilatación; apoyo *fijo*, ó de articulación; apoyo *completo*, ó empotramiento.

En el primero (fig. 3.^a), que permite una traslación t paralela

Fig. 3.^a

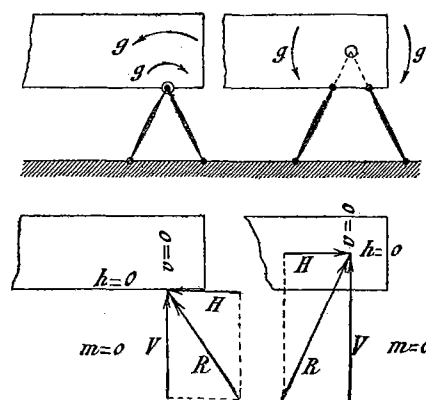
á una recta dada, sólo es posible una reacción dirigida normalmente á dicha recta, pero aplicada á un punto variable según aquella traslación. Equivale prácticamente al apoyo sobre un rodillo. Si la traslación posible es bastante pequeña, se confunde su efecto con el de una rotación alrededor del centro instantáneo, contacto del rodillo con el plano de rodadura y el apoyo se *simboliza* por una biela articulada al sólido y al cuerpo sustentador. No pueden existir H ni m .

En una articulación (fig. 4.^a) que permite el giro g alrededor de su centro, sólo es posible una reacción que pase por el mismo, pero su inclinación puede ser cualquiera, lo mismo que la relación de sus componentes, V , H . Se simboliza por dos bielas concurrentes: el sólido resulta articulado en la intersección, real ó virtual, de dichas bielas. No puede existir m .

En un empotramiento (fig. 5.^a) que no permite ni giro ni traslación, la reacción puede pasar por cualquier punto y en cualquier dirección. Para que la sección empotrada del sólido permanezca invariable basta fijar un punto por una articulación y soportar otro en un apoyo móvil, de modo que para un

punto cualquiera la traslación t , compatible con el apoyo, sea incompatible con el giro g , alrededor de la articulación. V , H , m , pueden ser cualesquiera.

Geométricamente, son nulos: en el primer caso, v ; en el segundo, v , h ; en el tercero, v , h , μ , y en todos ellos ΣRr , que es, respectivamente (ΣVv) , $(\Sigma Vv + \Sigma Hh)$ y $(\Sigma Vv + \Sigma Hh + \Sigma m\mu)$. Realmente, ni rodillos, ni rótulas, aun supuestos en absoluto in-

Fig. 4.^a

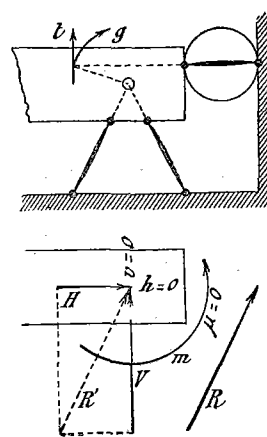
deformables, dejan de presentar rozamiento, que origina en el primer caso una reacción H , y en el segundo otra m , y oponen cierto trabajo ΣHh ó $\Sigma m\mu$. Prácticamente, en una construcción bien sustentada, ΣRr se puede considerar nula, y como suficientemente aproximada la condición

$$\Sigma \bar{A} a = \Sigma \bar{\Phi} \varphi \quad (6)$$

Puesto que $\bar{A}$ y sus consecuentes $\bar{\Phi}$ son en absoluto *independientes* de a y sus correlativas φ , si á la acción unidad, aplicada á un punto determinado p , corresponde el sistema de fuerzas interiores $\Phi_{p,1}$, la ecuación:

$$\bar{1} \times a_p = \Sigma \bar{\Phi}_{p,1} \times \varphi \quad (7)$$

determina el recorrido a_p de aquel punto en función de los recorridos φ , cualquiera que sea el sistema (a, φ) . Si podemos calcu-

Fig. 5.^a

lar los φ' producidos por un sistema particular de acciones conocidas, A' , en función de los recorridos incógnitos, a' , exigidos por el equilibrio, la expresión:

$$\bar{1} \times a'_p = \Sigma \bar{\Phi}_{p,1} \times \varphi' \quad (8)$$

determinará el recorrido a'_p del punto p cuando el sólido soporte en equilibrio el sistema A' .

Para que esto último suceda, claro es que tiene que coexistir con el sistema A' el de reacciones correspondientes R' , sin el cual no habría equilibrio posible. Y por la misma razón, con $\bar{I}$ tiene que coexistir el sistema $\bar{R}_i$. Aunque los trabajos de estas reacciones se eliminen, R' y $\bar{R}_i$ intervienen necesariamente: las primeras en la determinación de φ' , las segundas en la de $\Phi_{p,1}$.

α'_p está, como siempre, medido en la dirección (ó alrededor del eje) de la acción unidad aplicada á p . Las direcciones de las fuerzas moleculares Φ son siempre las mismas, variando sólo sus signos y valores: Los recorridos φ' están medidos según esas direcciones constantes.

El primer miembro de (8) mide, prescindiendo del factor unidad de acción, el recorrido lineal (ó angular) de un punto (ó una línea) del sólido sometido al sistema A' y en equilibrio. El segundo miembro valora el trabajo que las fuerzas elásticas puestas en juego al actuar la acción unidad en aquel punto (ó línea) desarrollarían si los recorridos fueran los relativos al equilibrio, no bajo aquella acción, sino bajo el sistema A' . Este trabajo lo llamaremos *trabajo virtual unitario*.

El teorema de Mohr, expresado por (8), es:

El trabajo virtual unitario de un sistema de acciones relativamente á un punto (ó línea) mide el recorrido real de dicho punto (ó línea) determinado por aquel sistema.

Decimos *mide* porque el factor unidad de fuerza (ó de momento) multiplica siempre el recorrido lineal (ó angular) para expresar la igualdad de dos trabajos.

Los recorridos φ son fáciles de evaluar; son los que un punto (ó línea) efectúan á causa de la deformación relativamente al punto (ó línea) contiguo.

En una pieza prismática, de coeficiente de elasticidad E y sección S , sometida á una fuerza normal, N , en el centro de gravedad, una rebanada de longitud dl sufre una contracción ó dilatación

$$dl \propto \frac{N}{S} \propto \frac{1}{E} = dl \propto \frac{N}{ES}.$$

Este valor es el del *recorrido lineal* de cualquier punto de la sección.

Cuando la misma rebanada soporta un momento flector M , el *recorrido angular* ó giro de la sección es análogamente

$$dl \propto \frac{M}{I} \propto \frac{1}{E} = dl \propto \frac{M}{EI}.$$

Una fuerza transversal T , ó esfuerzo cortante, aplicado al centro de gravedad, produce un recorrido lineal de todos los puntos de la sección

$$d \propto \frac{T}{E_t S} \propto x.$$

E_t es el coeficiente de elasticidad transversal y x un coeficiente numérico, mayor que la unidad y dependiente de la forma de la sección (*).

Como es sabido, las deformaciones debidas al esfuerzo cortante son, en general, pequeñas comparadas con las producidas por la fuerza normal N y por el momento flector M , y se prescinde usualmente de tenerlas en cuenta.

(*) El valor de x es, llamando D la carga de desgarramiento, variable en cada punto de la sección,

$$x = \frac{S}{T^2} \times \int D^2 dS.$$

En las secciones rectangulares $x = 1,2$; en las doble T , aproximadamente $x = \frac{S}{\alpha \varepsilon}$, siendo α la altura total y ε el espesor del alma.

Introduciendo estos valores en (8), si N, M, T expresan los elementos producidos en el equilibrio bajo la acción unidad, al obrar ésta en un punto (ó línea) p y en una dirección lineal (ó angular) arbitrariamente elegida y si N, M, T son los originados en el equilibrio bajo un sistema de acciones cualesquiera, A , resulta:

$$1 \times \alpha_p = \int N_i \times \frac{N}{ES} dl + \int M_i \times \frac{M}{EI} dl + \int T_i \times x \frac{T}{E_t S} dl \quad (9)$$

expresiones concretas de los recorridos reales producidos en p , según la dirección escogida, originados en el equilibrio bajo el sistema A .

Reduzcamos el sistema A á una sola acción aislada, de valor α veces la unidad, aplicada en q . N, M, T se convierten en N', M', T' para la unidad y en $\alpha N', \alpha M', \alpha T'$ para $A = (\alpha \times 1)$, en el mismo q aplicada. El recorrido

$$1 \times \alpha_{pq} = \int N_i \times \frac{\alpha N'}{ES} dl + \int M_i \times \frac{\alpha M'}{EI} dl + \int T_i \times x \frac{\alpha T'}{E_t S} dl$$

producido en p por la acción A que obra en q , es idéntico al escrito en otro orden:

$$\int N' \times \frac{\alpha N_i}{ES} dl \times \int M' \times \frac{\alpha M_i}{EI} dl + \int T_i \times x \frac{\alpha T_i}{E_t S} dl = 1 \times \alpha_{qp} \quad (10)$$

que, como $\alpha N_i, \alpha M_i, \alpha T_i$, corresponden á la acción $(\alpha \times 1)$ aplicada en p , mide el recorrido originado en q cuando la misma acción A obra en p .

Queda así sencillamente demostrado el teorema de Maxwell ó ley de la reciprocidad de los recorridos, cuya expresión más breve es:

$$\alpha_{pq} = \alpha_{qp} \quad (11)$$

El recorrido en p causado por la acción A , actuante en q , es idéntico al recorrido en q originado por la misma acción A , actuante en p .

Designemos en general por α'_{pq} el recorrido en p , debido á la unidad en q . Si en 1, 2, 3 n , obran acciones, de valores $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$, el recorrido total en p vale:

$$1 \times \alpha_{p(1,2,3,\dots,n)} = \alpha'_{p1}(1 \times A_1) + \alpha'_{p2}(1 \times A_2) + \dots + \alpha'_{pn}(1 \times A_n) \quad (12)$$

expresión cuyos términos son todos trabajo = acciones $\times$ recorridos, que no cambian si se atribuye á la unidad en el segundo miembro la dimensión «recorrido», y al mismo tiempo á los α'_{pq} la dimensión «cero». Así considerados los α'_{pq} son valores numéricos, coeficientes, que miden la influencia de la posición de q respecto á p ó de p respecto á q .

Pero es más correcto considerarlos como verdaderos recorridos: los A son entonces valores numéricos, la unidad de acción se elimina en ambos miembros y el recorrido total es la suma de productos de los recorridos parciales *unitarios* por los valores numéricos de las acciones respectivas.

El teorema de Mohr no es sino una consecuencia de otro más general, y, sobre todo, de expresión más clara, precisa y elegante, relativo al trabajo *realmente* desarrollado en la deformación.

III

El trabajo real.

El trabajo *virtual unitario* es un puro ente de razón, producto de fuerzas elásticas engendradas en el equilibrio bajo la acción unidad y de recorridos *independientemente* originados en el equilibrio bajo un sistema de acciones.

El trabajo *real* elástico, producto de fuerzas y recorridos causados *ambos* en el equilibrio correspondiente á un solo sistema de acciones, que simultáneamente engendran aquéllas y éstos, depende íntimamente del modo de obrar dicho sistema y del modo de generar fuerzas y recorridos.

Un sólido, en equilibrio inicial, recibe una acción. Si ésta se manifiesta gradualmente, creciendo desde el valor cero del estado inicial, hasta adquirir su valor total al cabo de un cierto tiempo, del mismo modo irán desarrollándose gradualmente dentro del sólido las fuerzas elásticas Φ y sus recorridos ó deformaciones φ . En cualquier momento, dentro del régimen de perfecta elasticidad, unas y otros son exactamente proporcionales:

$$\varphi = k \Phi, \quad \text{ó} \quad \Phi = K \varphi$$

El trabajo elástico, gradualmente desarrollado, crece desde cero hasta

$$\left. \begin{aligned} \int_0^\varphi \Phi d\varphi &= \int_0^\varphi K \varphi d\varphi = \frac{K}{2} \varphi^2 = \frac{\Phi \varphi}{2} \\ \int_0^\Phi \varphi d\Phi &= \int_0^\Phi k \Phi d\Phi = \frac{k}{2} \Phi^2 = \frac{\Phi \varphi}{2} \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

siempre negativo, por ser opuestos los sentidos de Φ y φ .

Durante el mismo período, el recorrido de la acción, ó la deformación del sólido en el punto correspondiente, crece en proporción á aquella causa desde cero hasta su valor final. El trabajo puesto en juego es análogamente $\frac{Aa}{2}$. Y las reacciones del sistema sustentador desarrollan un trabajo negativo $-\frac{Rr}{2}$, prácticamente nulo.

Mientras la duración del período sea finita, el sólido elástico se anima con una velocidad y pone en juego una energía cinética $\frac{1}{2} \Sigma m v^2$ también finita. En el límite, cuando la duración crece indefinidamente, dicha energía (que en su lugar estudiaremos) tiende á anularse. El equilibrio se establece de un modo gradual y tendiendo á la *condición límite*:

$$\Sigma \frac{Aa}{2} - \Sigma \frac{Rr}{2} = \Sigma \frac{\Phi \varphi}{2};$$

ó prácticamente:

$$\Sigma \frac{Aa}{2} = \Sigma \frac{\Phi \varphi}{2}.$$

Los trabajos *reales* gradualmente puestos en juego por N, M, T , son:

$$\frac{1}{2} \int N \times \frac{N}{ES} dl = \frac{1}{2} \int \frac{N^2}{ES} dl \quad (15)$$

$$\frac{1}{2} \int M \times \frac{M}{EI} dl = \frac{1}{2} \int \frac{M^2}{EI} dl \quad (16)$$

$$\frac{1}{2} \int T \times \frac{T}{Et S} dl = \frac{1}{2} \int \frac{T^2}{Et S} dl \quad (17)$$

En el caso, más general, de no estar las acciones contenidas en el plano principal del sólido, ó de ser éste de planta curva, existe un momento de torsión M^t que en la sección de momento de inercia polar I^t determina un recorrido angular $\frac{M^t}{Et I^t}$ y un trabajo, por torsión,

$$\frac{1}{2} \int M^t \times \frac{M^t}{Et I^t} dl = \frac{1}{2} \int \frac{(M^t)^2}{Et I^t} dl$$

M^t es un elemento de cálculo completamente homólogo de los demás, N, M, T : le es aplicable cuanto respecto á éstos digamos. Como en la mayor parte de los casos prácticos M^t es nulo, prescindimos de él y del trabajo elástico que le corresponde.

Los elementos de cálculo, N, M, T , producidos en el equilibrio bajo acciones $A_1, A_2, \dots, A_n$ son de la forma

$$N = N_1 \times A_1 + N_2 \times A_2 + \dots + N_n \times A_n, \text{ etc.} \quad (18)$$

llamando en general N_k, M_k, T_k los producidos en el equilibrio bajo la acción *unidad* en k . N, M, T , corresponden, naturalmente, á la coexistencia de las acciones y reacciones.

Estas son función lineal de aquéllas, y el momento parcial ($M_k \times A_k$), por ejemplo, es la suma de: $m_k \times A_k$, correspondiente á la acción por sí sola, más $m'_k R'_k = m'_k \times (a' A_k)$, relativo á una reacción ($a' A_k$), etc., y $M_k = m_k + \Sigma a'_k m'_k$.

Estos valores unitarios N_k, M_k, T_k son independientes de las acciones: sólo dependen de la forma, dimensiones y propiedades elásticas del cuerpo y de las posiciones de k y de A_k . Son, finalmente, las derivadas parciales de N respecto al valor de la acción en k (*).

Si derivamos parcialmente respecto al valor de A_k la expresión del trabajo elástico real y total, T , suma de (15), (16) y (17) obtenemos:

$$\begin{aligned} \frac{dT}{dA_k} &= \int N_k \times \frac{N}{ES} dl + \int M_k \times \frac{M}{EI} dl + \\ &+ \int T_k \times \frac{T}{Et S} dl \quad (19) \end{aligned}$$

cuyo segundo miembro, donde N_k, M_k, T_k son los valores de N, M, T relativos á la acción *unidad* en k , es idéntico al homólogo de (9), expresión del teorema de Mohr. Por tanto:

$$1 \times a_k = \frac{dT}{dA_k} \quad (20)$$

demostración del teorema de Castigliano: *La derivada parcial del trabajo elástico, respecto al valor de una acción, mide el recorrido de ésta.*

(*) Decimos *respecto al valor de la acción* y no respecto á la acción misma. Un elemento parcial, M_k , es de las mismas dimensiones que M , es decir, un momento = fuerza $\times$ longitud. A_k no es la acción, estrictamente hablando, sino el número abstracto que mide su intensidad, su *valor*:

$$\frac{A_k \text{ unidades de acción}}{1 \text{ unidad de acción}} = A_k.$$

Se suele, sin embargo, nosotros mismos lo haremos, abreviar diciendo: «derivada respecto á la acción».

La derivada parcial de un trabajo (fuerza $\times$ longitud, ó momento $\times$ ángulo), respecto á una fuerza es una longitud y respecto á un momento un ángulo. La expresión (20) es absurda si la derivación se hace así. Por lo contrario, es perfectamente racional cuando se opera respecto al *valor* de la acción; la derivada es entonces otro trabajo.

Escribiendo

$$a_k = \frac{dT}{dA_k}$$

como en lo sucesivo haremos, se sobreentiende la derivación hecha respecto á la misma acción y no hay discrepancia entre las expresiones en lenguaje ordinario y matemático.

Puede darse mejor demostración de este importantísimo teorema, sin recurrir al de Mohr, que por implicar $\sum Rr = 0$ no es absolutamente riguroso.

Apliquemos á un sólido en equilibrio inicial una sola acción infinitesimal dA_k , que ocasiona un trabajo

$$\frac{1}{2} dA_k \times \left\{ \frac{da_k}{dA_k} \times dA_k \right\}$$

infinitesimal de segundo orden. Las reacciones correspondientes á dA_k originan otro trabajo análogo, de signo opuesto.

Apliquemos ahora el sistema finito $\sum A + \sum R$; la acción preexistente dA_k produce $dA_k \times a_k$, puesto que obra desde luego con todo su valor. En el límite de infinitesimales de primer orden:

$$T + dT = \frac{1}{2} \sum Aa - \frac{1}{2} \sum Rr + dA_k \times a_k;$$

$$dT = dA_k \times a_k; \quad \frac{dT}{dA_k} = a_k.$$

Mejor todavía, la demostración más directa del teorema, sin recurrir al artificio de aplicar primero el incremento parcial y después las acciones totales, es la siguiente:

Partiendo del equilibrio bajo $\sum A + \sum R$, al incremento parcial dA_k corresponden, aparte de los infinitesimales de segundo orden, los de primero relativos á las acciones preexistentes. Cada A produce $A \times \left\{ \frac{da}{dA_k} \times dA_k \right\}$; análogamente cada R , y, en suma, el incremento de primer orden es:

$$dT = \sum A \times \frac{da}{dA_k} dA_k - \sum R \times \frac{dr}{dA_k} dA_k$$

Por tanto:

$$\frac{dT}{dA_k} = \sum A \times \frac{da}{dA_k} - \sum R \times \frac{dr}{dA_k} \quad (a)$$

Directamente, derivando $T = \frac{1}{2} \sum Aa - \frac{1}{2} \sum Rr$, y puesto que la única A dependiente de A_k es ella misma, en el producto $\frac{1}{2} A \times a_k$:

$$\frac{dT}{dA_k} = \frac{1}{2} \sum A \frac{da}{dA_k} - \frac{1}{2} \sum R \frac{dr}{dA_k} + \frac{1}{2} a_k \quad (b)$$

De (a) y (b) resulta:

$$a_k = \sum A \times \frac{da}{dA_k} - \sum R \times \frac{dr}{dA_k} = \frac{dT}{dA_k} \quad (c)$$

Como se ve, cúmplase, ó no, la condición ideal $\sum Rr = 0$, la derivada parcial *mide* siempre el recorrido.

La distinción entre acciones y reacciones es, desde el punto de vista mecánico, puramente convencional. El constructor diferencia las causas conocidas, acciones y los efectos *a priori* desconocidos, reacciones, que los cuerpos sustentadores han de ejercer para que el sólido quede en equilibrio. Genéricamente acciones y reacciones son todas agentes *exteriores* que por intermedio del sólido elástico se equilibran. Un número cualquiera de ellas puede ser tomado como causas y el resto como efectos, siempre que se agreguen las condiciones que definen la mutua dependencia ó correlación.

Mientras la forma, dimensiones y elasticidad del sólido sean las mismas, así como sus relaciones con los cuerpos sustentadores, idéntico resultado se obtendrá de cualquier modo que se proceda.

Las expresiones (18) y análogas valúan los elementos de cálculo, N, M, T , en función explícita de A , implícita de R , considerando como variables independientes solo las A . Lo mismo puede hacerse tomando como tales variables todas ó algunas de las R , solas ó reunidas con algunas de las A ; las restantes hasta completar el sistema ($A + R$) entrarán, implícitamente, como funciones de las independientes. A y R están además ligadas por las condiciones fundamentales del equilibrio, tres en sistemas planos, seis en los del espacio. El trabajo elástico, expresado mediante N, M, T , será función de las mismas únicas variables independientes y su derivada parcial respecto á una de ellas medirá siempre el recorrido según la dirección de la misma.

Si ese recorrido es, *por las condiciones de sustentación*, muy pequeño, *prácticamente nulo*, igualando á cero la derivada parcial correlativa, se obtendrá una condición de equilibrio *suficientemente aproximada*. Con todas las homólogas, derivadas parciales respecto á las causas cuyos recorridos sean *despreciables* (reacciones) igualadas á cero, habrá tantas ecuaciones como variables independientes y los valores de éstas requeridos por el equilibrio quedarán determinados.

La condición $\frac{dT}{dR_k} = 0$ es la necesaria y suficiente para que el valor de ella deducido para R_k haga T máximo ó mínimo. La segunda derivada

$$\frac{d^2 T}{dR_k^2} = \frac{d \left(\frac{dT}{dR_k} \right)}{dR_k} = \frac{dr_k}{dR_k} \quad (21)$$

es necesariamente positiva: un incremento, dR_k , de un *agente exterior* produce una deformación elemental dirigida en el mismo sentido que R_k . El trabajo elástico es un mínimo.

De aquí otro teorema, enunciado primero por Menabrea y demostrado como consecuencia del suyo por Castigliano: *Las reacciones, cuyo trabajo es nulo, son tales, que hacen mínimo el trabajo elástico.*

Más en general todavía. Consideremos un sólido sustentado de un modo cualquiera y en equilibrio. Cortémoslo realmente en dos partes: el equilibrio subsiste si cada trozo ejerce sobre el otro una acción igual á la resultante de todas las fuerzas moleculares que antes de la escisión desarrollaba sobre aquél en la superficie separadora. Esa resultante es la fuerza de enlace.

El trabajo elástico *total* T , queda descompuesto en $T_1 + T_2$. Sea R_{12} la resultante de las acciones moleculares de 1 sobre 2, igual y contraria á R_{21} de 2 sobre 1. El recorrido de ($R_{12} = -R_{21}$) es:

$$r_{12} = \frac{dT_2}{dR_{12}} = - \frac{dT_1}{dR_{21}}$$

y el de R_{21}

$$r_{21} = \frac{dT_1}{dR_{21}} = - \frac{dT_1}{dR_{12}}.$$

Como cualquiera que sea el trozo que se considere el recorrido es el mismo

$$r_{12} = r_{21} = \frac{dT_2}{dR_{12}} = - \frac{dT_1}{dR_{12}}.$$

La derivada parcial de T , trabajo elástico *total*, en el sólido sin cortar, *derivada que ahora no mide recorrido alguno*, resulta en virtud de lo anterior:

$$\frac{dT}{dR_{12}} = \frac{dT_1}{dR_{12}} + \frac{dT_2}{dR_{12}} = 0 \quad (22).$$

Como un incremento de trabajo elástico total conduce necesariamente á un aumento de reacción mutua, la segunda derivada de T es positiva. El valor de R_{12} , deducido de (22), hace T *mínimo*. Resulta así demostrado el segundo teorema de Castigliano: *Las fuerzas elásticas dentro de un sólido en equilibrio son en cada punto tales, que hacen, dentro de las condiciones de sustentación, mínimo el trabajo total de deformación elástica.*

Es sencillamente el resultado de la ley general de la naturaleza, el principio de la mínima acción. Entre todas las maneras con que un sólido puede, partiendo de un equilibrio inicial, llegar á otro equilibrio final, sujeto á las condiciones de sustentación, elige, irremisiblemente, puede decirse, aquella que, dentro de las condiciones impuestas, requiere un mínimo de trabajo, tanto de las causas exteriores como de las fuerzas moleculares interiores.

El teorema es rigurosamente exacto, sin más restricción que la general de ser las deformaciones *perfectamente elásticas*. El teorema de Menabrea, exacto solamente en el límite cuando $\Sigma Rr = 0$ resulta como corolario.

Consideremos, por ejemplo, un arco sobre dos estribos que ceden elásticamente, sustentados ambos en roca *que no ceda nada*. El sólido elástico comprende estribos y arco: las fuerzas interiores en la sección de arranques, aunque ésta ceda visiblemente, son tales que hacen mínimo el trabajo de *todo* el sistema. Si suponemos que los estribos van ganando progresivamente en rigidez seguirá cumpliéndose la condición de mínimo, pero dentro del trabajo total irá correspondiendo una parte cada vez menor á los estribos.

En el límite, cuando éstos no se deformen en absoluto, la condición persiste; el trabajo, que entonces es el del arco sólo, es un mínimo y las fuerzas interiores en los arranques pasan á ser las reacciones con recorrido y trabajo nulos.

El teorema de Maxwell, que como el de Menabrea sólo es exacto en el límite ($\Sigma Rr = 0$), resulta igualmente un corolario del de Castigliano.

El trabajo total del sistema $\Sigma A + \Sigma R$, tiende al límite ideal de perfección de las construcciones:

$$T = \frac{1}{2} \Sigma Aa - \lim \left(\frac{1}{2} \Sigma Rr \right) = \\ = \frac{1}{2} \{ A_1 a_1 + \dots + A_k a_k + \dots \}$$

El equilibrio bajo la acción unidad ejercida en q , determina en p un recorrido a'_{pq} . A dicha acción corresponden ciertas reacciones indispensables para el equilibrio: a'_{pq} engloba el resultado del conjunto de una y de otras. Una acción A_q veces mayor,

origina $a'_{pq} \times A_q$. El recorrido total en p , en el equilibrio bajo el sistema completo, es de la forma:

$$a_p(1, 2 \dots n) = \frac{dT}{dA_p} =$$

$= a'_{p1} \times A_1 + \dots + a'_{pp} \times A_p + \dots + a'_{pq} \times A_q + \dots$ (23) función lineal de las únicas variables independientes A , puesto que la influencia de las R , funciones también lineales de A , está comprendida dentro de las a' .

Al demostrar el teorema de Castigliano, hemos encontrado una ecuación (c) que en el límite, $\Sigma Rr = 0$, da:

$$a_p = \Sigma A \times \frac{da}{dA_p}$$

Su derivada respecto á A_q es:

$$\frac{da_p}{dA_q} = \Sigma A \times \frac{d^2a}{dA_p \times dA_q} + 1 \times \frac{da_q}{dA_p}$$

puesto que todas las A , salvo A_q á la que multiplica a_q , son independientes de A_q .

Como todas las derivadas segundas de una función lineal son nulas, resulta, según (23):

$$\left(\frac{da_p}{dA_q} = a_{pq} \right) = \left(\frac{da_q}{dA_p} = a_{qp} \right)$$

El teorema de Maxwell no es riguroso, puesto que requiere $\Sigma Rr = 0$.

(Continuará.)

Apuntes sobre Mecánica social (1)

POR ANTONIO PORTUONDO Y BARGELÓ,

Ingeniero de Caminos, Canales y Puertos.

La energía universal.

Hemos hecho la exposición de los Principios y de los Teoremas principales de la Cinemática, la Estática y la Dinámica. Tanteando el camino que recorriamos, hemos ido traduciendo las proposiciones de la *Mecánica racional* para formular las correspondientes á la *Mecánica social*, que constituyen (para los fenómenos sociales) el *modelo mecánico* (Lord Kelvin). Sobre algunas convenciones y algunos supuestos, hubimos de solicitar del lector, en los *Preliminares*, todo aquello que necesitábamos para la exposición; y sobre esa base y esas hipótesis, hemos considerado las leyes abstractas del equilibrio y del movimiento, así de los individuos y elementos sociales como de las agrupaciones (2).

(1) Véase el núm. 1934

(2) Al recordar ahora por última vez la hipótesis del parámetro de n dimensiones psíquicas, que hube de proponer en los *Preliminares* para definir la posición del individuo en un asunto social, me ocurre que esto quizá pueda ser considerado como un ejemplo de la concepción abstracta de algunos matemáticos alemanes—especialmente *Georg. Cantor*—acerca de lo que llaman *número complejo de n números reales*. Estos n distintos valores reales $x_1, x_2, \dots, x_n$, (que se reúnen en el número complejo) son expresados en relación con sus diversas unidades respectivas.

Recordemos que esos matemáticos piensan que cada valor del número complejo define la posición de un punto—así lo llaman—en un *espacio aritmético de n dimensiones*; y los valores $x_1, x_2, \dots, x_n$, de los cuales depende el número complejo, son las n coordenadas de dicho punto. El espacio aritmético de n dimensiones viene á estar constituido por el *conjunto* de todos