

REVISTA DE OBRAS PÚBLICAS

PUBLICACION TECNICA DEL CUERPO DE INGENIEROS DE CAMINOS, CANALES Y PUERTOS

DIRECTOR

D. MANUEL MALUQUER Y SALVADOR

COLABORADORES

LOS INGENIEROS DE CAMINOS, CANALES Y PUERTOS

SE PUBLICA LOS JUEVES

Dirección y Administración: Plaza de Oriente, 6, primero derecha.

Apuntes sobre Mecánica social ⁽¹⁾

POR ANTONIO PORTUONDO Y BARCELÓ,

Ingeniero de Caminos, Canales y Puertos.

Leyes del equilibrio y del movimiento de un individuo.

Admitidos los *Principios fundamentales*, se pueden deducir las leyes que rigen el equilibrio y el movimiento, cuando se considera por abstracción un solo individuo *libre* en un asunto y se conocen las fuerzas (relacionadas con el asunto) que actúan simultáneamente sobre él, unas emanaando del interior del organismo del individuo natural y otras del exterior.

EQUILIBRIO.—Si un individuo se halla libre y en reposo, teniendo una determinada posición en un asunto de carácter social, y es solicitado simultáneamente por varias fuerzas dadas en diversas direcciones y sentidos en el asunto, y con intensidades conocidas, cada una de las cuales tiende á modificar la posición del individuo—sacándole del estado de reposo—para imprimirle un cierto movimiento con la velocidad que correspondiera á la intensidad de cada una de ellas, y en su dirección y sentido en el asunto de que se trate, es evidente—en virtud de su inercia y de la composición de las fuerzas—que (componiendo dos de las fuerzas y su resultante con una tercera, y así sucesivamente) el efecto de todo el conjunto de fuerzas que actúan es equivalente al de la *resultante final*; por consiguiente, el efecto será *nulo*, y el individuo permanecerá en la misma posición que tiene, sin experimentar cambio alguno en el asunto—y como si se le hubiera dejado entregado á sí mismo—si aquella resultante final es *nula*, es decir, si en la representación simbólica, el llamado polígono representativo de las fuerzas es cerrado. Se dice entonces que el individuo libre está *en equilibrio* bajo la acción de tales fuerzas; ó de otro modo: que las fuerzas que actúan sobre el individuo *se equilibran*. Con este último modo de expresión se significa más claramente que—por sus direcciones y sentidos particulares en el asunto y por sus respectivas intensidades—las influencias están contrarrestadas unas por otras.

La ley, pues, del equilibrio del individuo libre aislado, es que el polígono representativo de las fuerzas sea cerrado, porque así como ésta es condición *suficiente*, es también *necesaria*; es decir, que estando en equilibrio el individuo, habrá de cumplirse la condición necesariamente, pues de no ser cerrado el polígono, existiría una resultante final y á ella obedecería el individuo libre poniéndose en movimiento en la dirección y sentido de esta resultante.

Si en vez de considerar al individuo libre en reposo le consideramos en estado de movimiento, se dirá también que un grupo de fuerzas que sobre él actúa se equilibra, cuando el estado de movimiento no se altera; es decir, no se modifica, sino que continúa como si ese grupo de fuerzas no existiera. Del mismo modo que en el caso del reposo, las fuerzas del grupo en equilibrio deberán de cumplir la condición necesaria y suficiente que acabamos de formular.

Con esto queda dicho todo respecto al equilibrio de las fuerzas que actúen sobre un individuo libre.

MOVIMIENTO.—Para tratar en toda su generalidad el problema del movimiento de un individuo libre bajo la acción de varias fuerzas dadas, fijemos primeramente la atención en *los datos* del problema. Estos son:

1.º El *estado inicial* del individuo en el asunto; es decir: la *posición* que tiene en el instante que consideramos como inicial para el estudio, y la *velocidad* que tiene en este instante en magnitud, dirección y sentido.

2.º La *masa* del individuo en el asunto.

3.º Las *varias fuerzas psíquicas* que simultáneamente actúan sobre el individuo, conocidas por sus magnitudes, direcciones y sentidos en cada instante. No se olvide que las únicas acciones que han de ser consideradas son las que *obran efectivamente* sobre la psiquis del individuo, como dijimos en los *Preliminares*.

Siguiendo el procedimiento que se emplea en la *Mecánica racional*, el problema del movimiento se resuelve procurando determinar el cambio *muy pequeño* de movimiento que experimentará el individuo en el asunto á partir de un cierto instante y durante un intervalo de tiempo muy pequeño δ ; es decir, el movimiento que se llama elemental, porque enlazando estos movimientos elementales por ley de continuidad *en el tiempo* y *en el asunto*, se tendría el movimiento real y efectivo de modificación del individuo en el asunto desde un instante cualquiera t_1 hasta otro instante cualquiera t_2 ; es decir, durante un transcurso cualquiera de tiempo.

(1) De la *Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales*.

Para determinar el movimiento elemental á partir de un instante dado (instante inicial), se empieza por reemplazar el conjunto de las fuerzas, que son conocidas en ese instante (dato tercero) por una sola F que sea la *resultante* de todas ellas.

Ya vista; si se aplica el segundo principio fundamental, se deduce la aceleración total J del movimiento del individuo en ese instante, porque tendrá, en virtud de ese principio, la misma dirección y el mismo sentido que F , y una magnitud que se obtendrá dividiendo la intensidad de F por la masa m (dato segundo) del individuo en el asunto ($J = \frac{F}{m}$).

Determinada así en magnitud, dirección y sentido la aceleración total J en el instante inicial, bastaría componer $J \cdot \theta$ con la velocidad inicial v_0 (dato primero) por Cinemática, y la resultante indicará—tanto en dirección y en sentido como en magnitud—cuál ha de ser la velocidad v' del individuo al fin de un intervalo muy pequeño de tiempo θ . Habremos determinado así el cambio de movimiento producido por las fuerzas en ese intervalo de tiempo muy pequeño θ . Es claro que la posición del individuo, cuando haya de tener esa nueva velocidad v' , se obtendría (según dijimos en la Cinemática), añadiendo á la posición p_0 (dato primero), el cambio ó modificación experimentado en el tiempo θ —que tendrá la dirección y el sentido de v_0 , y una magnitud que puede medirse aproximadamente por $v_0 \cdot \theta$.

Cuando en la *Mecánica racional* se considera un punto material que no está en libertad absoluta de moverse en el espacio en cualquiera dirección y sentido, se dice que tiene *enlaces*. La naturaleza física de éstos, así como su disposición especial en cada caso, deben de ser estudiadas y tenidas en cuenta en la Mecánica aplicada; pero en la *Mecánica racional* se supone siempre que esas limitaciones para el movimiento se expresan y definen tan sólo por ecuaciones. Si el enlace es unilateral, se expresa por una desigualdad negativa.

Para las especulaciones abstractas que intentamos en estos *Apuntes sobre Mecánica social*, basta que digamos que el individuo tiene *enlaces*, cuando no está en libertad absoluta de modificar su posición—en un asunto—en cualquiera dirección y sentido.

Si se intentara hacer una Mecánica social aplicada, habría de procederse á un estudio minucioso de la disposición especial de los enlaces en cada caso, porque tendría eso una importancia capital. A nosotros nos basta ahora concebir su existencia y hacer intervenir los enlaces en los razonamientos.

Así, después de haber dado las leyes del equilibrio y del movimiento de un individuo *libre*, debemos de añadir que si no está libre, sino sujeto á enlaces, se deberá de reemplazar éstos por fuerzas equivalentes antes de aplicar aquellas leyes. Y se puede asegurar desde luego que hay siempre en todo individuo un género de limitación al cual está ligado el ente abstracto y simple á quien llamamos nosotros *el individuo*, es á saber: el enlace de éste con el ser orgánico de su propio cuerpo. Por eso hemos sobreentendido siempre (al considerar al individuo como mecánicamente libre) que este enlace ha sido reemplazado por las fuerzas psíquicas que le sean equivalentes, en cuanto al efecto psíquico mecánico.

Se concibe que hay otros muchos géneros de enlaces psíquicos que deben de ser considerados en la *Mecánica social*. Proviene de las relaciones que medien entre el individuo de que se trate y otros individuos ó elementos sociales. Es-

tos enlaces son los que habremos de considerar al estudiar en la *Segunda parte* las agrupaciones sociales desde nuestro punto de vista de la Mecánica.

La solución que hemos dado al problema del movimiento de modificación de un individuo libre, planteado en toda su generalidad para el caso teórico de que la fuerza motriz F , resultante de todas las que actúen en cada instante, varíe de un instante al siguiente por ley de continuidad, conduce, naturalmente, á un movimiento del individuo, que—como sucesión de movimientos elementales—es simbolizado por el movimiento de trayectoria curvilínea de un punto material (1).

Ya dijimos anteriormente que en la realidad del desenvolvimiento de la vida psíquica del individuo, las direcciones en las cuales se operan sus cambios de posición en cada asunto—que son las direcciones de sus velocidades—no son generalmente variables de un instante al siguiente, sino á intervalos de tiempo de bastante duración para que el movimiento en la realidad sea *una sucesión de movimientos de dirección constante*, cada uno de los cuales es de duración relativamente larga dentro de la longitud de la vida total.

Para cada uno de esos movimientos parciales, supongamos que (si la velocidad inicial no es cero) adquiriera la velocidad—al empezar—una orientación y un sentido que sean los mismos que los de la fuerza motriz F que habrá de seguir actuando ya en todo el tiempo de la duración de ese movimiento *parcial*. Esto requiere que, en el instante crítico del cambio de dirección en el movimiento del individuo, las fuerzas cambien de un doble modo: primero, para cambiar la dirección de la velocidad al terminar el movimiento anterior, y después, para que su resultante se coloque—por decirlo así—en la dirección que ha de conservar ya por algún tiempo.

Pero como la teoría dinámica anteriormente expuesta es *general*, deberemos de aplicarla á cada uno de esos movimientos de dirección constante (representables por movimientos rectilíneos de un punto material) y diremos por tanto:

1.º Que si en uno de esos movimientos de dirección constante, todas las fuerzas que actúan incesantemente sobre el individuo, tuvieran una resultante F que no sólo fuera constante en dirección y sentido, sino también en *intensidad*, la aceleración J en ese movimiento del individuo, habría de ser también *de magnitud constante* ($J = \frac{F}{m}$); es decir, que su movimiento habría de ser *uniformemente acelerado* en ese transcurso de tiempo. Si el sentido de F fuera el opuesto al sentido de la velocidad, el movimiento sería *uniformemente retardado*.

2.º Que si sólo fuera constante la dirección y el sentido

(1) Al plantear el problema general é indicar cómo podría concebirse—ya que no obtener—su solución, lo vemos como un problema *determinado*.

Decía John Stuart Mill: "Dados los motivos que estén presentes en la mente de un individuo, y dados igualmente el carácter y la disposición de ese individuo, se podría inferir con certeza su modo de obrar."

Nosotros, al deducir el movimiento del individuo, hemos supuesto, dada la *posición inicial* y la *masa* del individuo, que parecen corresponder á lo que Stuart Mill quiere significar con la *disposición* y el *carácter*; y también, dadas las varias fuerzas psíquicas que simultáneamente actúan sobre el individuo, que parecen corresponder á los motivos que estén presentes en su mente. En lo que Stuart Mill denomina el *carácter* y la *disposición* del individuo, van envueltas las fuerzas que nosotros concebimos como emanado del interior del propio organismo corporal.

de la resultante motriz F (que sean los mismos de la velocidad), pero no lo fuera su intensidad (lo cual ocurrirá frecuentemente), el movimiento sería de aceleración variable J ; y que su ley de variación se deduciría de la ley de variación de la intensidad de la fuerza, que suponemos conocida (puesto que $J = \frac{F}{m}$). Conocida ya la J en cada instante, se sabe por lo (que dijimos en la *Cinemática*) que el cálculo del incremento de la *magnitud* de la velocidad en un cierto tiempo, se hace integrando los productos $J \cdot \theta$ que expresan *aproximadamente* los pequeños incrementos sucesivos de la velocidad en los intervalos pequeños de tiempo θ .

* *

Por todo lo expuesto se ve que la posición psíquica que llegue á alcanzar al cabo de algún tiempo un individuo en un asunto dado de carácter social, podría determinarse mecánicamente, si fuera posible conocer todas las variadísimas é innumerables influencias que—como fuerzas—ejercen su acción sobre él, y que por modo muy complejo emanan tanto del interior del propio individuo natural, como de otros individuos ó elementos sociales, y, por último, del ambiente *natural y social* en que esté colocado.

Las leyes que hemos tomado de la *Mecánica racional*, parecen indicar que el plan *ideal* para la educación de cada individuo, con el fin de que alcance (ó tienda á alcanzar) una cierta *posición* á que aspire, en un asunto dado, requeriría:

1.º Un conocimiento completo del temperamento nativo del individuo, que permitiera determinar las fuerzas que habrán de actuar sobre él (como ente abstracto ó simple), emanando de su propia individualidad natural (fisiológica y psíquica), en relación con las sucesivas y variadas incidencias de su vida.

2.º Un conocimiento completo de todas las influencias que se habrán de ejercer como fuerzas sobre él, emanando de otros individuos y elementos sociales y también del medio ambiente educativo natural y social en que esté colocado.

3.º Una apreciación de su masa para el asunto; y

4.º Un conocimiento perfecto de la dirección y el sentido en que debe de moverse (ó modificarse la *posición* del individuo), para llegar á alcanzar por el camino más corto la posición á que aspire.

Con estos conocimientos y datos, el problema de la educación consistiría en disponer del medio ambiente externo educativo (1), de tal modo que las fuerzas varias que de él emanen, compuestas con las que emanen del propio individuo den, en todos los instantes, una resultante F que marque constantemente la *dirección y el sentido* en que se quiere ver realizado el movimiento de modificación del individuo en el asunto, y además procurar que la intensidad F sea la mayor posible. Si se pudiera conseguir que esa resultante F de todo el conjunto de fuerzas se conservara siempre *con esa intensidad, y en la dirección y sentido* que se desea, el movimiento (rectilíneo) del individuo sería *uniformemente acelerado*, según vimos: su aceleración J sería directamente proporcional á la intensidad de F , é inversamente proporcional á la masa del individuo en el asunto (2).

(1) En esto incluimos todo lo físico y psíquico que esté fuera del individuo natural, fuera del límite U de Mach.

(2) Hemos concebido siempre la *masa* de cada individuo en un asunto como un coeficiente *constante* en el tiempo. Pero quizás debería de ser concebida como variable á compás de los cambios en la *posición* del indi-

Para terminar estas ligeras indicaciones que presentamos desde un punto de vista exclusivamente mecánico, diremos que sólo con ese ideal de perfección podrían evitarse los *ziszás* que frecuentemente ocurren en los movimientos de modificación de los individuos durante su vida, y que son producidos, á mi entender, por las fuerzas psíquicas que, influyendo como componentes sobre la dirección y el sentido de la resultante motriz F , cambian de vez en cuando la dirección del movimiento, desviándole de aquella dirección que se deseaba. Mientras menos desviaciones y *ziszás* haya, más nos acercaremos al ideal de perfección en la educación, cualquiera que sea el fin de ésta; es decir, cualquiera que sea aquella *posición* á que deseamos tienda el individuo, si no puede llegar á alcanzarla.

* *

OBSERVACIÓN.—Ya hicimos notar que lo que bajo el nombre genérico de fuerza hemos considerado para la acción (estática ó dinámica) sobre el individuo, puede ser de cualquiera especie y ejercer su influencia por la sensibilidad ó por el entendimiento ó por el sentimiento, etc. Todas esas varias especies han tenido para nosotros el carácter común de fuerzas psíquicas, es decir, de causas de modificación de movimiento psíquico, y á todas les hemos atribuido dirección, sentido é intensidad. Así como la *Mecánica racional* no se preocupa de la naturaleza especial de las fuerzas, á la *Mecánica social pura* no le interesa saber si las fuerzas psíquicas, sobre las cuales versan sus especulaciones, son de una ú otra especie, siempre que se admita que unas y otras y todas, obedecen á los *Principios generales* que se han sentado como *Postulados*.

Prescindimos completamente de algunas cuestiones que se plantean en la Psicología, como, por ejemplo: si una fuerza intelectual para producir impulsión ha de provocar antes en el individuo un estado de sentimiento (ó pasional) que sea el que realmente impulse al individuo. No podemos nosotros penetrar aquí en estos procesos que corresponde estudiar á los psicólogos; pero sí debemos de observar que, si para la *Mecánica* de los cuerpos materiales las fuerzas que más se diferencian unas de otras por sus caracteres físicos, son tratadas por la *Mecánica racional* como cantidades del mismo género (en cuanto son consideradas como causas de modificación de movimiento), y se refieren á una misma unidad (la dina ó el kilogramo), sería necesario asimismo para la *Mecánica social* que las fuerzas psíquicas que más se diferencian unas de otras por su naturaleza especial y por sus

viduo, porque parece que la posición misma debe de influir en la capacidad del individuo para su modificación. Quizás también puede decirse que, por sí sola, la edad del individuo influye en su masa, dotándole — á medida que aumenta — de una menor capacidad de modificación, es decir, aumentando la masa del individuo con su edad. Estos son puntos muy delicados y oscuros, respecto de los cuales nos abstenemos de ahondar. En la *Mecánica racional* la masa se miró siempre como un coeficiente constante, aunque recientemente se haya afirmado en los físicos, la idea de considerar la masa como aumentando al crecer enormemente la velocidad.

Seguiremos considerando la masa como constante, y esto se podría quizás conciliar con las observaciones ó los reparos que acabamos de hacer, teniéndolos en cuenta al hacer la medición de las fuerzas psíquicas el día que esto pudiera intentarse por la Psicología experimental. Bastaría, en efecto, que la intensidad de una fuerza F se pudiera expresar (en medida) con arreglo á la edad y á la posición del individuo sobre quien actúa para que su relación á la aceleración J fuera un coeficiente *constante* m . De esta suerte la masa quedaría como una constante del individuo para el asunto, y la dificultad iría á recaer sobre el problema de la Psicología referente á la medición de las fuerzas.

caracteres, pudieran ser referidas á alguna unidad común, mediante los progresos de la Psicología.

Esto que decimos respecto de las fuerzas psíquicas, deberá de aplicarse análogamente á los *trabajos* y á las otras formas de *energías psíquicas*. Ya hablaremos de esto más adelante.

No podemos entrar en disquisiciones acerca de la predominancia de lo intelectual sobre lo moral, para producir el movimiento progresivo de las Sociedades. Parece que las fuerzas que sean puramente intelectivas, es decir, que estén desprovistas de todo elemento pasional, no se contrarrestan ni se contraponen unas á otras, del mismo modo que las fuerzas sentimentales. Por esto se alcanza en las Sociedades progresivas la acumulación de conocimientos y su difusión, y se obtiene en general un gran desarrollo para las fuerzas que provienen de la educación intelectual. Pero estas cuestiones son ajenas á nuestro estudio, como lo es la noción misma de Progreso, si se da á esta palabra el sentido de mejoramiento en general.

Teoremas sobre el movimiento del individuo.

1.º—Teorema de las fuerzas vivas ó de la energía.

Si adoptamos en los asuntos sociales la antigua denominación de fuerza viva, llamaremos aquí *fuerza viva de un individuo en un instante*, el producto de la masa del individuo (en el asunto de que se trate) por el cuadrado de la magnitud de su velocidad en ese instante ($m \cdot v^2$). Hoy se denomina *energía cinética en un instante*, la mitad de ese producto.

Veamos la definición del *trabajo elemental* de una fuerza. Cuando un individuo realiza un cambio muy pequeño de *posición*, en un asunto, en una determinada dirección y sentido (la de su velocidad en ese instante), y lo hace estando bajo la acción de una fuerza cualquiera P , se dice que esta fuerza hace un *trabajo elemental*; se llama así el producto de la intensidad de la fuerza por el pequeño cambio de posición *estimado en la dirección de la fuerza*. O bien, porque es enteramente lo mismo, y más apropiado á nuestro estudio: el producto de la intensidad de la fuerza *estimada* en la dirección de la velocidad, por el pequeño incremento del parámetro que define su posición. Se representaría en el movimiento elemental de un punto material por la expresión $P \cdot ds \cdot \cos \varphi$; siendo ds el camino elemental recorrido, y φ el ángulo de la dirección y sentido de la fuerza P con la dirección y sentido del desplazamiento elemental $ds = v \cdot \theta$.—Se dice que el trabajo elemental de una fuerza es *motor* (positivo) cuando al *estimar* la fuerza en la dirección de la velocidad, aparece en *el mismo sentido* que ésta; cuando aparece en *sentido contrario*, se dice que el trabajo elemental es *resistente* (negativo).

Se ve fácilmente—por la ley de la descomposición de fuerzas—que si el individuo ha estado bajo la acción de varias fuerzas, el trabajo elemental de la resultante F de éstas es igual á la suma algebraica de los trabajos elementales de las componentes.

Para dejar establecido el *Teorema de las fuerzas vivas (ó de la energía)*, considérese esa resultante motriz $F = m \cdot J$, que, estimada en la dirección del movimiento, da:

$$F \cdot \cos \alpha = m J \cdot \cos \alpha.$$

Se ve que su trabajo elemental es el producto $m J \cos \alpha \times v \theta$, ó bien $m v \times J \theta \cos \alpha$. Pero como $J \theta \cos \alpha$ (según lo que

vimos en *Cinemática*, al tratar de la aceleración total J) puede considerarse que expresa el incremento muy pequeño experimentado por *por la magnitud* de la velocidad v , y producido por la acción de la fuerza; si se representa por $d v$, se tiene que el trabajo elemental de F es igual á $m v \times d v$. Y como el producto $v \times d v$ puede considerarse que es la mitad del incremento muy pequeño que haya experimentado v^2 , y se representa por $\frac{1}{2} d v^2$, se tiene en definitiva

que: *el trabajo elemental de F es igual á $\frac{1}{2} d \cdot (m v^2)$* . En esto consiste el famoso *Teorema de las fuerzas vivas*, que (para el movimiento de un individuo durante un intervalo muy pequeño de tiempo θ) podría enunciarse de este modo:

La mitad del incremento muy pequeño (positivo, negativo ó nulo) que experimenta la fuerza viva del individuo, es igual á la suma algebraica de los trabajos elementales efectivos realizados por todas las fuerzas que hayan actuado simultáneamente sobre el individuo en su movimiento elemental.

O dicho de otro modo:

El incremento muy pequeño (positivo, negativo ó nulo) de la energía cinética del individuo es igual á la suma algebraica de los trabajos elementales realizados por todas las fuerzas que hayan actuado simultáneamente sobre el individuo en su movimiento elemental.

Este teorema indica claramente:

1.º Que si en un movimiento elemental del individuo predominan los trabajos elementales *motores* que realicen unas fuerzas sobre los trabajos elementales *resistentes* de otras, la energía cinética del individuo aumentará, puesto que su incremento será positivo; el movimiento se habrá acelerado porque habrá habido un aumento en la *magnitud* de la velocidad.

2.º Que si predominan los trabajos elementales *resistentes* sobre los *motores*, la energía cinética del individuo disminuirá porque su incremento será negativo; habrá habido disminución en la magnitud de la velocidad.

3.º Que si hay compensación entre los trabajos elementales *motores* y los *resistentes* de unas y otras fuerzas, la energía cinética del individuo no se alterará porque su incremento será nulo; no habrá habido, por tanto, alteración en la magnitud de la velocidad.

Nótese que este teorema no afecta en nada al cambio de dirección de la velocidad; se refiere solamente al cambio de *magnitud* de la velocidad, puesto que esta magnitud es la que interviene en la energía cinética. Y nótese también que en este teorema no entra directamente el tiempo.

Si del movimiento elemental queremos pasar al movimiento del individuo por ley de continuidad en el asunto durante un transcurso cualquiera de tiempo, basta aplicar el teorema á todos y cada uno de los movimientos elementales que se integran en el movimiento total y hacer la suma.

Se ve desde luego que el incremento numérico de la energía cinética, desde un instante t_0 hasta otro instante cualquiera t_1 , es la suma de todos los incrementos *muy pequeños* (positivos, negativos ó nulos) que haya ido recibiendo la energía cinética en todos los movimientos elementales sucesivos. Y si llamamos *trabajo total de una fuerza* que haya actuado de un modo continuo sobre el individuo desde el instante t_0 hasta el instante t_1 , á la suma algebraica de los *trabajos elementales* (positivos, negativos ó nulos) que haya realizado la fuerza en todos los movimientos elementales

sucesivos, el teorema para los transcurso cualesquiera de tiempo, se enunciará así:

El incremento de la energía cinética del individuo desde un instante t_0 hasta otro posterior t_1 , es igual á la suma algebraica de los trabajos totales (motores y resistentes) realizados en ese transcurso de tiempo por todas las fuerzas que hayan estado actuando sobre él.

Así vemos que la energía cinética del individuo en un asunto, será en el instante t_1 mayor, igual ó menor que la que tenía en el instante t_0 , según que el trabajo *total* hecho por las fuerzas haya sido motor, nulo ó resistente. Decir que el trabajo total haya sido nulo desde t_0 á t_1 , equivale á decir que los trabajos totales positivos ó motores de unas fuerzas, hayan sido compensados por los negativos ó resistentes de otras. Y es evidente que si en todos y en cada uno de los instantes hubiera compensación de los trabajos motores y resistentes, habría *conservación de la energía cinética del individuo para todo su movimiento en el asunto*; y este movimiento habría de ser necesariamente uniforme.

*
.

Tanto para el movimiento elemental como para el que se realiza en un transcurso cualquiera de tiempo, la expresión del *teorema* se simplifica, recordando que en cada instante la suma algebraica de los trabajos elementales de todas las fuerzas, es igual al trabajo elemental de su *resultante* F en ese instante.

Y así el *teorema* se enunciaría diciendo:

1.º *Que en el movimiento elemental el incremento muy pequeño de la energía cinética es igual al trabajo elemental de la resultante motriz F .*

2.º *Que desde un instante t_0 hasta otro posterior t_1 , el incremento de la energía cinética es igual al trabajo total hecho por las resultantes motrices F .*

Si pensamos atentamente en los efectos de la acción (sobre el individuo) de la resultante F en cada instante, se nota que produce un doble cambio en el *estado de movimiento* del individuo, á saber: un cambio en la *dirección* de la velocidad v que tenía, y otro cambio en la *magnitud* de esa velocidad v .

El cambio de la *dirección* en que venía dispuesto á seguir modificándose la posición del individuo, se produce por la influencia que sobre él ejerce la componente de la fuerza, según una dirección en el asunto, que sea enteramente ajena á la dirección de v ; ó, lo que es igual, por la influencia de la componente de esa naturaleza que tenga F . Mientras mayor sea esta componente de F , más acentuado será el *cambio de dirección* del movimiento del individuo. Y se comprende que la componente de que hablamos influya *sólo de este modo*, porque se limita á llamar la atención del individuo—si vale la frase—hacia una dirección totalmente *extraña* á la que él trae, á fin de desviarle de ésta, pero sin empujarle ni retenerle, es decir, sin ejercer influjo alguno sobre su energía cinética. Es claro que si el movimiento del individuo se realiza sucesivamente en direcciones constantes que tienen largos transcurso de tiempo de duración, lo que acabamos de decir sólo será aplicable en los instantes *críticos* del cambio de dirección.

El cambio en la *magnitud* de la velocidad v , que trae el individuo, se produce por la componente F_1 que tenga la fuerza en la dirección misma de v , la que hemos llamado fuerza F , estimada en la dirección de v . Se comprende que esta F_1 sea la que por modo muy directo influya sobre la

magnitud de v , ya empujando al individuo, ya reteniéndole, según que su aspiración sea acelerar ó retardar su movimiento. Para lo primero, el sentido de la fuerza F_1 habrá de ser el mismo de ésta; para lo segundo, el sentido contrario. En el primer caso, la componente de que hablamos aumentará la energía cinética del individuo; en el segunda caso, la disminuirá.

Este segundo efecto de la resultante motriz F , es decir, el *cambio en la energía cinética* del individuo será tanto más acentuado cuanto mayor sea el trabajo que haga la fuerza F , porque precisamente trabaja para eso, ya sea positivamente, ya negativamente. La que verdaderamente trabaja es la componente F_1 , porque la primera componente que vimos influyendo solamente para desviar al individuo de la dirección que traía, ejerce una influencia que *no es de trabajo*, puesto que según la definición de esta palabra, su trabajo es nulo. Por esto se dice que *el trabajo que hace la F_1 es el de la F .*

Pero volviendo á lo que decíamos: si el cambio en la magnitud de la velocidad v , es debido al trabajo que haga la resultante F de todas las fuerzas, ¿qué ley relaciona este trabajo con el cambio de magnitud de v ? A esta pregunta se ha contestado con el *teorema de la energía*, en el cual está formulada la *ley*, á saber: *que el trabajo hecho por la fuerza F es igual al incremento experimentado por la energía cinética.*

Sin insistir más en comentarios acerca de este *teorema*, diremos—para terminar—que en la vida social de cada individuo las fuerzas que sobre él actúan—tanto emanando de su propio cuerpo como de otros individuos ó elementos y del medio ambiente—serán más eficaces para desviarle de la dirección en que esté dispuesto á moverse ó modificarse por causas anteriores, cuanto más tiendan á indicarle direcciones ajenas á la suya. Pero que cuando se quiere entrenarlo—si así puede decirse—en su misma dirección y sentido, imprimiéndole mayor energía cinética, deberá procurarse, para la mayor *eficiencia* de las fuerzas que actualmente ejerzan acción, que éstas (todas ellas) tengan direcciones y sentidos que se acerquen mucho á la de su velocidad actual, porque así se trabajará más eficazmente. Y que (por la misma razón) cuando se quiera quitarle energía cinética deberán de ejercerse las acciones todas, ó bien en la misma dirección de su movimiento, pero en sentido diametralmente opuesto, ó bien en direcciones que se separen poco de ella, pero siempre en sentido contrario. El trabajo que se haga en uno ú otro caso no es perdido, puesto que según el *teorema* es íntegramente recogido por el individuo en forma de aumento ó disminución de su energía cinética. Propiamente recogido será, en el caso de aumentar su energía cinética, porque se haya hecho trabajo positivo. En el otro caso, el trabajo negativo que se haya consumido se encontrará íntegramente compensado por la energía cinética que se haya quitado al individuo.

Parece innecesario añadir—como ya apuntamos en otra ocasión—que tratándose de fuerzas psíquicas y de *estado psíquico* del individuo en un asunto, todo lo dicho tendrá solamente aplicación cuando la acción de las fuerzas exteriores sea *recibida* por el individuo *real y efectivamente*, pues si no llegan á él *psíquicamente*, si así puede decirse, no pueden ejercer influencia. Y para una *Dinámica práctica* sería indispensable—como dijimos anteriormente—el conocimiento perfecto del temperamento fisiológico y del temple psíquico del individuo para descubrir cuáles serían en cada instante las fuerzas que brotarían del individuo mismo na-

1. Sólo así podría disponerse como convenga del medio ambiente con el fin á que se aspire respecto de la energía cinética. Las fuerzas que emanen de otros individuos y elementos sociales, así como del medio ambiente físico y social, podrían hacer—entre todas—un gran trabajo positivo—por ejemplo—y nosotros (por la observación) ver que se producía, sin embargo, una disminución de energía cinética, ó que se conservaba constante, no porque la ley dinámica de la energía deje de cumplirse, sino porque haya habido fuerzas que, brotando del interior del individuo natural, hayan hecho un trabajo negativo preponderante sobre aquél ó igual á aquél.

Habría que tener muy en cuenta que las fuerzas que brotan del interior del individuo natural, no dependen *tan sólo* de su organismo fisiológico-psíquico; como de una entidad aislada, sino que, por el contrario, esas fuerzas serán unas ú otras, según sea el medio ambiente *natural* y *social* en que esté colocado, lo cual hace comprender la enorme complejidad y dificultad del problema general teórico (1).

2.º—Teoremas sobre las cantidades de movimiento.

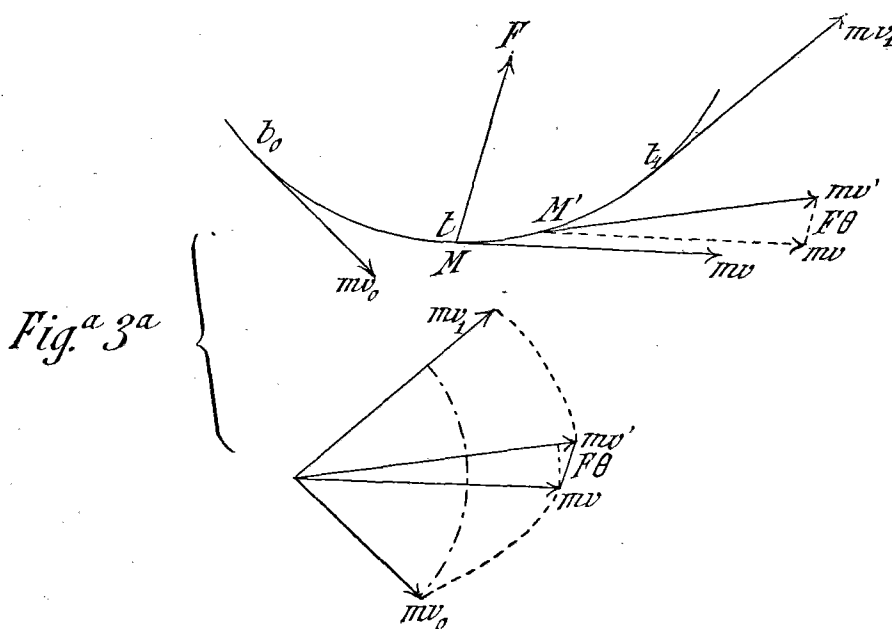
Para poder formular estos *teoremas* recordemos, ante todo, las dos *definiciones* siguientes:

1.ª Se llama *cantidad de movimiento en un instante*, de un individuo en un asunto, el producto de su masa en el asunto por su velocidad en ese instante (mv). Pero conviene

por su magnitud. Por eso la cantidad de movimiento es, en Dinámica, una cantidad vectorial representada por un vector localizado en la posición que tiene el individuo en un instante dado, lo mismo que la velocidad lo era en Cinemática. La magnitud del vector dinámico—cantidad de movimiento—, es la magnitud del vector-velocidad, afectado de un coeficiente, que es la masa del individuo en el asunto: la dirección y el sentido son los mismos.

2.ª Se llama *impulsión elemental* de una fuerza F el producto de la intensidad de la fuerza por el tiempo θ muy pequeño de su acción. A este producto $F\theta$ se le atribuye la misma dirección y el mismo sentido de F , y así es también una cantidad vectorial representada por un vector (dinámico) localizado en la posición que el individuo tiene en el instante en que la fuerza es F .

Para ver el *Teorema de las cantidades de movimiento*, pensemos, desde luego, en la resultante motriz F de todas las fuerzas que, en un instante dado, actúan sobre el individuo; y empecemos por notar que la ley formulada en el *Teorema de la energía* sólo se refería á la cantidad de *energía cinética* que gana ó pierde el individuo por el *trabajo* que hace la fuerza. Hemos hecho resaltar—en las explicaciones dadas acerca de esa ley dinámica—que ese no es más que uno de los cambios producidos en el estado de movimiento del individuo por la acción de la fuerza motriz F , y hemos dejado á un lado lo que se refería al cambio de dirección de la velocidad.



notar bien, desde ahora, que la velocidad se considera aquí con su *magnitud, dirección y sentido*, á diferencia de la fuerza viva, en la cual no intervenía la velocidad más que

(1) En el teorema que hemos expuesto—y en los que siguen—se formulan propiedades generales, del movimiento de modificación del individuo bajo la acción de fuerzas psíquicas cualesquiera. Pero no hay modo de comprobar por la observación ó la experiencia la verdad de estas propiedades, porque carecemos hoy de procedimientos suficientemente aproximados para medir los trabajos de las fuerzas psíquicas por una parte, y la energía cinética del individuo por otra.

La comprobación se puede hacer en la Mecánica de los sistemas materiales. Bien entendido que no se hace ni puede hacerse sobre *puntos materiales*, que son puras abstracciones de la *Mecánica racional*, sino sobre cuerpos; y para éstos son posibles aquellas mediciones con la aproximación propia de las observaciones y experiencias físicas.

En la *Mecánica social* no podemos hoy aspirar más que á prestar nuestro asentimiento á las proposiciones que se formulan en el terreno de la pura especulación, como deducidas de los principios fundamentales.

En el *Teorema general* que ahora vamos á formular sobre las cantidades de movimiento del individuo en relación con las impulsiones de la fuerza motriz, se atiende—como veremos—al *cambio total* que experimenta la velocidad por la acción de la fuerza.

Se enuncia así:

El incremento total muy pequeño que experimenta la cantidad de movimiento del individuo es igual en magnitud, dirección y sentido á la impulsión elemental de la resultante motriz F . (Véase la fig. 3.ª)

En esta ley dinámica se ve el efecto total de la fuerza motriz F actuando sobre el individuo en un intervalo muy pequeño de tiempo θ . Dice que su impulsión elemental en este intervalo ($F\theta$) se refleja en el individuo por el cambio total (muy pequeño) de su cantidad de movimiento, la cual pasa de ser (en el instante t) una mv (en magnitud, dirección y sentido) con que el individuo viene por causas anteriores, á

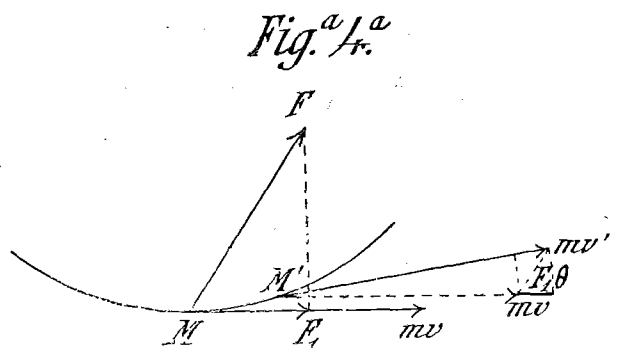
ser otra mv' (en el instante $t + \theta$) que difiere en todo (magnitud, dirección y sentido) de la mv —aunque muy poco—. Este cambio es exactamente igual á aquella impulsión elemental.

Y se comprende bien que la fuerza motriz F afecte así al individuo, compeliéndole á cambiar *simultáneamente* la dirección de su movimiento y la magnitud de su velocidad, mediante la impulsión que en su dirección (la de la fuerza) comunique al individuo, influyendo en éste en el intervalo de tiempo θ .

No existe nada instantáneo en el Universo; y para manifestarse un cambio en el estado de movimiento de modificación del individuo, se requiere que la fuerza obre durante algún tiempo, aunque sea muy pequeño, para que haya una verdadera impulsión que produzca efecto (1).

Si en vez de considerar la impulsión elemental de la fuerza motriz F , se pensara sólo en la impulsión elemental de aquella componente F_1 , que vimos para medir el trabajo elemental, esta impulsión elemental sería igual al incremento sólo en magnitud, que experimentaría la cantidad de movimiento desde el instante t hasta el instante $t + \theta$, lo cual nos conduce á este *segundo teorema*:

El incremento muy pequeño que experimente la MAGNITUD de la cantidad de movimiento del individuo, es igual á la impulsión elemental $F_1 \theta$ de la resultante motriz F , estimada en la dirección de la velocidad. (Véase la fig. 4.^a)



Esta ley serviría—como sirvió el *teorema de la energía*—, si sólo nos preocupáramos de apreciar los cambios en la magnitud de la velocidad. Nos valíamos antes de los cambios producidos en la energía cinética por el *trabajo de la fuerza F* . Ahora nos valdríamos de los cambios producidos en la cantidad de movimiento por la impulsión de la F_1 , que es la fuerza F , *estimada en la dirección de la velocidad*.

Por uno ú otro teorema se llega á las mismas conclusiones, atendiendo al *signo* del trabajo en el uno ó al *sentido* de la fuerza, estimada en la dirección de la velocidad, en el otro.

Volvamos al *primer teorema general* de las cantidades de movimiento. Para aplicarlo á un transcurso cualquiera de tiempo, basta verlo en todos y cada uno de los movimientos elementales que se integran por ley de continuidad en el movimiento total. Así, por composiciones sucesivas de las distintas impulsiones elementales $F\theta$ (fig. 3.^a), con las sucesivas y distintas cantidades de movimiento, se pasaría de un instante inicial t_0 á otro instante cualquiera posterior t_1 , y se obtendría la cantidad de movimiento mv_1 (en magnitud, dirección y sentido) en este último instante, si la fuerza—

variable de un instante á otro—ha actuado de modo continuo en ese transcurso de tiempo.

Análogamente—aunque con mayor sencillez—aplicaremos el segundo teorema al transcurso de tiempo desde el instante t_0 hasta otro instante cualquiera t_1 , para deducir la *magnitud* de la cantidad de movimiento mv_1 en este último instante, puesto que bastaría hacer la suma algebraica de los incrementos sucesivos (positivos ó negativos) de las *magnitudes* de las cantidades de movimiento, en los sucesivos movimientos elementales. Cada uno de estos incrementos muy pequeños sería igual á la impulsión elemental de la resultante motriz, *estimada en la dirección de la velocidad en cada instante*, siempre sobre el supuesto de que las fuerzas actúan de modo continuo en todo el transcurso de tiempo que se considera. (Véase la fig. 3.^a)

Tanto el teorema de la energía como el segundo teorema sobre las cantidades de movimiento serían de muy fácil aplicación en los movimientos parciales de dirección constante del individuo (rectilíneos), en que la resultante motriz F tiene constantemente la dirección misma del movimiento, si se supusiera que la intensidad de F fuera *constante*, porque:

1.º Para el *teorema de la energía*, el trabajo total hecho por F se mediría entonces simplemente por el producto de su intensidad F (constante) por el camino que hubiera recorrido el individuo en la dirección misma de la fuerza (1) y este producto expresaría el incremento de energía cinética, obtenido durante el movimiento parcial en esa dirección.

2.º Para el *segundo teorema de las cantidades de movimiento*, la impulsión total de F se mediría simplemente por el producto de su intensidad F (constante) por el tiempo de su acción, y este producto expresaría el incremento de la cantidad de movimiento, obtenido en el movimiento parcial que se considera.

Es claro que para que hubiera en este caso *conservación* de la energía cinética ($\frac{1}{2} mv^2$) ó *conservación* de la cantidad de movimiento (mv), se requeriría que la resultante F fuera constantemente nula, lo cual era evidente *a priori*, porque el movimiento sería, en virtud del *Principio de la inercia*, rectilíneo uniforme.

Los individuos que en sus movimientos parciales en cada dirección conservan una energía cinética constante—ó una cantidad de movimiento constante—son aquéllos que por su temperamento fisiológico y su temple psíquico, resisten las fuerzas ó sollicitaciones exteriores ó interiores, que unas veces tienden á apresurarle, otras á retardarle. Y para lograr la uniformidad en estos movimientos parciales de dirección constante, es decir, para que la resultante motriz F sea *constantemente nula*, á pesar de aquellas sollicitaciones que emanan del medio ambiente externo ó interno, han de brotar del interior del individuo natural (consciente ó inconscientemente) otras fuerzas que las contrarresten en todos y cada uno de los instantes.

3.º—Teorema de la menor acción.

Se llamará *cantidad elemental de acción* de un individuo en un intervalo muy pequeño θ de tiempo, á partir de un instante t , el producto de la magnitud de su cantidad de movimiento en el instante t (mv), por el pequeño cambio de

(1) Lo que cabe estudiar son las leyes infinitesimales de decrecimiento. Aquí, por ejemplo, habría, en rigor, que concebir θ como una variable que decrece indefinidamente. No puedo detenerme ahora en estos rigores.

(1) Este camino recorrido se mediría por el incremento del parámetro definidor de la posición.