

REVISTA DE OBRAS PÚBLICAS

PUBLICACION TECNICA DEL CUERPO DE INGENIEROS DE CAMINOS, CANALES Y PUERTOS

DIRECTOR

D. MANUEL MALUQUER Y SALVADOR

COLABORADORES

LOS INGENIEROS DE CAMINOS, CANALES Y PUERTOS

SE PUBLICA LOS JUEVES

Dirección y Administración: Plaza de Oriente, 6, primero derecha.

Apuntes sobre Mecánica social (1)

POR ANTONIO PORTUONDO Y BARCELÓ.

Ingeniero de Caminos, Canales y Puertos.

Cinemática.

Movimiento de modificación de un individuo.

Si en el estudio de los cambios ó modificaciones de carácter psíquico que se operan en los individuos al transcurrir el tiempo, se hace abstracción de las causas que los producen (fuerzas), mediante su acción, y nos fijamos solamente en los cambios mismos de la posición de un individuo en un determinado asunto, la primera noción que se nos presenta es la *velocidad* del movimiento de modificación (2).

Velocidad.—Movimiento uniforme.—En este tipo de movimiento de modificación de un individuo es en el que aparece primeramente la noción de *velocidad*. Simbolizada por un parámetro *la posición* del individuo en un instante, se dice que el movimiento ó cambio de posición es *uniforme*, cuando los incrementos numéricos que experimente el parámetro en intervalos de tiempos iguales, son iguales por pequeños que se tomen esos intervalos de tiempo (3).

Según dijimos en los *Preliminares*, todo cambio muy pequeño en la posición del individuo se realiza en una determinada dirección y sentido; y para ver más claramente todo el movimiento de modificación *uniforme* del individuo por ley de continuidad en el tiempo, conviene distinguir dos casos:

PRIMER CASO.—Movimiento uniforme de dirección constante.—Si los cambios de posición que realiza el individuo

son en todos los instantes en la misma dirección y sentido, esta dirección y sentido se atribuyen á la velocidad, que es entonces *constante en magnitud, dirección y sentido* para todo el movimiento del individuo; y ella sirve para definirlo de un modo completo. El movimiento del individuo en este primer caso, que es el más sencillo, se *simboliza* por el movimiento uniforme y rectilíneo de un punto en el espacio. La velocidad se representa geométricamente por un vector localizado en una línea recta—que es la trayectoria—y queda indeterminado su punto de aplicación en la línea recta, porque cualquiera que sea el punto que se tome en ésta, el vector es uno mismo. Reconocido el carácter vectorial de la velocidad, se puede aplicar á ella todas las proposiciones de los vectores.

SEGUNDO CASO.—Movimiento uniforme de dirección variable.—Cuando las direcciones sucesivas en que realiza el individuo sus cambios *elementales* varían de un instante á otro, el incremento del valor numérico del parámetro en cada unidad de tiempo, es decir, la velocidad en *magnitud* del movimiento uniforme, es una *constante* que no define de un modo completo el movimiento. Se requiere además el conocimiento de esas varias direcciones sucesivas en que se va realizando el cambio de posición. En este segundo caso, el movimiento del individuo se simboliza por el movimiento curvilíneo de un punto en el espacio; y la velocidad geométricamente se representa por un vector de magnitud constante, pero localizado en cada instante en la tangente á la trayectoria curvilínea en la posición que ocupe el punto *en ese instante*; porque esta tangente *representa* la dirección en la cual se verifica el movimiento elemental del individuo en ese instante.

Tanto en el movimiento de dirección constante, como en el de dirección variable, la velocidad que hemos definido *para el movimiento uniforme*, expresa la relación constante del incremento del parámetro al incremento de tiempo, cualquiera que sea este intervalo de tiempo. Por eso se escribe la ley del movimiento de modificación uniforme en la ecuación

$$p = p_0 + v \cdot t;$$

en la cual *p* es el valor del parámetro que corresponde á la posición del individuo en un instante cualquiera *t*; *p*₀ á la posición en el instante que se haya adoptado como inicial (*t* = 0); y *v* es la magnitud constante de la velocidad.

Se sabe que esa ley se representa gráficamente por una

(1) De la *Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales*.

(2) Se sabe que la noción de velocidad en el movimiento de un punto en el espacio es aplicable (cualquiera que sea la naturaleza de las cosas á que se aplique) á todo lo que cambie *por ley de continuidad* en el tiempo; ó—como se dice en el lenguaje matemático—á todo lo que sea *función continua* del tiempo. Prescindimos de las singularidades de algunas funciones continuas, que no tienen derivada, por ser asunto muy ajeno de este lugar.

(3) Aunque la unidad de tiempo es arbitraria, se comprende que en la práctica—cualquiera que sea el asunto social de que se trate—para que se pueda estimar un cambio apreciable (en la posición del individuo) que se haya operado en la unidad de tiempo, sería molesto adoptar una unidad muy pequeña: en un día ó en una semana, por ejemplo, el cambio en la posición sería sumamente pequeño y difícil de apreciar por su pequeñez.

línea recta, empleando el procedimiento usual de dos coordenadas cartesianas para las representaciones gráficas en Geometría plana.

Numéricamente, por medio de la ecuación—ó gráficamente por esa representación—se resuelven con suma facilidad los problemas sobre el movimiento uniforme. Así, el cambio ó modificación que se realizará en un transcurso dado t de tiempo, ó sea $(p - p_0)$, se obtiene multiplicando la velocidad por el tiempo: inversamente la velocidad se obtiene dividiendo el cambio operado por el tiempo empleado, etc. (1).

(1) Por la ecuación del movimiento uniforme, se resuelve el siguiente problema.

Si dos móviles A' y A parten en un mismo instante inicial de posiciones que disten entre sí a metros, y recorren la misma trayectoria rectilínea con movimientos uniformes en el mismo sentido de velocidades v' y v (siendo $v' > v$ si A' está detrás de A) ¿cuanto tiempo T tardará A' en alcanzar á A ? ¿En qué posición se encontrarán?

Basta plantear la ecuación $v'T = a + vT$, de la cual se deduce

$$T = \frac{a}{v' - v}.$$

Si S es el camino recorrido por A , y S' el recorrido por A' , se tiene:

$$S = \frac{av}{v' - v}; \text{ y } S' = \frac{av'}{v' - v}.$$

La famosa paradoja de que Aquiles (móvil A') no podría alcanzar nunca á una tortuga (móvil A), se funda en que cuando el primero acabe de recorrer la distancia a , la segunda se habría adelantado; y cuando el primero acabe de recorrer esta nueva distancia que le separa de la tortuga, ésta se habrá adelantado á su vez, y como esto se repetirá sucesiva é indefinidamente, habrá siempre una distancia—por pequeña que sea—que separa á los dos móviles.—Esta paradoja, sobre la cual tanto se ha escrito, ha motivado afirmaciones (como la de W. James) de que la lógica hace menos inteligible la realidad, y que hay que repudiar el intelectualismo.

Es sabido que se desvanece la paradoja, demostrando que los tres valores finitos y determinados que obtuvimos antes para T , S , S' están en perfecta armonía con el razonamiento del filósofo griego, puesto que son respectivamente las sumas de los términos indefinidamente decrecientes de las tres progresiones:

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{a}{v'} + \frac{v}{v'} \cdot \frac{a}{v'} + \frac{v^2}{v'^2} \cdot \frac{a}{v'} + \dots &= \frac{\frac{a}{v'}}{1 - \frac{v}{v'}} = \frac{a}{v' - v} = T \\ \frac{v}{v'} \cdot a + \frac{v^2}{v'^2} \cdot a + \dots &= \frac{\frac{v}{v'} a}{1 - \frac{v}{v'}} = \frac{av}{v' - v} = S \\ a + \frac{v}{v'} \cdot a + \frac{v^2}{v'^2} \cdot a + \dots &= \frac{a}{1 - \frac{v}{v'}} = \frac{av'}{v' - v} = S' \end{aligned} \right.$$

A los que no conocen las series convergentes, les sigue perturbando la paradoja, porque se limitan á concebir que Aquiles recorra primero la distancia a , y después $\frac{v}{v'} a$, y después $\frac{v^2}{v'^2} a$, etc., y que la tortuga va siempre delante, sin fijarse en que no es eso lo que Aquiles y la tortuga hacen real y efectivamente. Somos nosotros los que pensamos esos sumandos, y concebimos así S' como el límite de la suma de un número infinito de partes, sin que por eso deje de tener S' su valor finito y determinado, como no deja de tenerlo el área de un círculo, aunque yo pueda concebirla, como el límite de la suma de un cuadrado inscrito, y de cuatro triángulos y de ocho triángulos más, y de 16, y así indefinidamente.

Para ver (con vista directa) cómo es que Aquiles llega á alcanzar á la tortuga; y para seguir, por decirlo así, los pasos por los cuales se va formando la realidad en el tiempo y en el espacio á partir del instante inicial $t = 0$, se debe de pensar (prescindiendo de consideraciones filosóficas sobre el tiempo y el espacio).

1.º Que durante el primer intervalo infinitamente pequeño dt , los mó-

Movimiento no uniforme.—Si las modificaciones sucesivas que experimenta la posición del individuo en un asunto se realizan en el tiempo por ley de continuidad, pero sin uniformidad, es de todo punto imposible precisar la noción vaga de rapidez ó *velocidad del movimiento en un instante* t , sin recurrir al método infinitesimal. Si se ve el cambio muy pequeño que experimenta la posición de un individuo en un intervalo muy pequeño de tiempo θ , á partir del instante t , y se divide ese incremento muy pequeño del parámetro por el intervalo de tiempo θ , se tiene una *velocidad media* para ese intervalo. El límite de esa velocidad media, si θ decrece indefinidamente, se llama *velocidad en el instante* t (1).

Por esta definición se ve que para obtener *aproximadamente* el cambio muy pequeño que se opere en la posición del individuo en un asunto cuando transcurra un intervalo muy pequeño de tiempo θ , se podrá multiplicar la velocidad v en el instante t por esa magnitud θ . Pero si se quiere calcular la magnitud del cambio que se operaría en un transcurso cualquiera de tiempo, no se puede ya proceder por simple multiplicación y hay que recurrir á la integración ó suma—en ese tiempo—de todos los incrementos sucesivos muy pequeños del parámetro, obteniendo *aproximadamente* cada uno de éstos por simple multiplicación, como acabamos de decir.

Sólo nos falta añadir que si el movimiento de modificación no uniforme del individuo es de dirección constante (simbolizado por el rectilíneo de un punto en el espacio), el procedimiento anterior sirve para determinar cuál sea la posición del individuo en un instante cualquiera t , toda vez que se conoce la dirección constante en que se ha movido; pero no basta si el movimiento es de dirección variable de

viles A y A' recorren en el mismo sentido espacios infinitamente pequeños $v dt$ y $v' dt$; y que la distancia que separaba á los móviles en el instante inicial disminuye por consiguiente en $v' dt - v dt = (v' - v) dt$. Esta es la realidad.

2.º Que fluyendo el tiempo de modo continuo, como simple variable independiente, y repitiéndose siempre el mismo hecho, la distancia ira disminuyendo sucesivamente á compás que transcurra el tiempo; y al llegar la suma de esas sucesivas disminuciones infinitesimales de distancia á ser exactamente igual á a , la distancia se anula. Esto se escribe así:

$$\int_0^T (v' - v) dt = (v' - v) T = a;$$

de donde

$$T = \frac{a}{v' - v}.$$

Para los que arguyan que — á pesar de todo — sigue siendo cierto que Aquiles recorre real y efectivamente los espacios

$$a; \frac{v}{v'} \cdot a; \frac{v^2}{v'^2} \cdot a; \dots$$

en los intervalos de tiempo

$$\frac{a}{v'}; \frac{v}{v'} \cdot \frac{a}{v'}; \frac{v^2}{v'^2} \cdot \frac{a}{v'}; \dots$$

y siempre queda detrás de la tortuga, digamos finalmente:

Que si la magnitud T (por ejemplo) se puede pensar formada por esa serie (como se podría pensar por otra), no es así como fluye la realidad, sino de modo continuo é igual.

Decir que una hora, por ejemplo, no se acaba nunca, porque transcurre la primera media hora y después la mitad de la otra media, y después la mitad de lo que falte, y así siempre, es sustituir la realidad fluyente continua é igual por un puro concepto artificial, que puede servir para fines matemáticos puros, pero no más.

(1) Es lo que se llamaría en el cálculo diferencial *coeficiente diferencial* del parámetro con respecto al tiempo.

un instante á otro (simbolizado por el curvilíneo de un punto en el espacio). En este caso hay que conocer la sucesión de direcciones en que el individuo se ha movido (la trayectoria del símbolo geométrico) para llegar á determinar cuál sea la posición del individuo en un instante cualquiera t .

En la práctica, las direcciones en las cuales se operan los cambios de posición de un individuo, no varían, generalmente, sino á intervalos de tiempo bastante largos, y, por tanto, su movimiento de modificación total es de ordinario una sucesión de movimientos de dirección constante (rectilíneos), de larga duración relativa.

* * *

Si se llegara á inventar procedimientos suficientemente aproximados de observación psíquica, que fueran aplicables á las varias notas que intervienen para la posición en un asunto de un individuo sometido á observación, de tal modo que fuera posible asignar en un instante dado un valor de observación al parámetro que definiera la posición en el asunto de ese individuo, se podría emplear para lo psíquico el método de las medias, que se usa como método práctico para lo físico-fisiológico, v. gr., la estatura, el peso, la fuerza muscular, la agudeza de los sentidos (vista, oído, etc.) de los diversos individuos.

Ya M. A. Quetelet procedió así en su *Ensayo de Física social* para investigar las leyes del desarrollo del *hombre medio*.

Si se clasifica á los individuos por edades, por ejemplo, y se verifican numerosas observaciones sobre individuos normales de un mismo país, en igualdad de circunstancias ordinarias de vida, se puede determinar las medias que corresponden al tipo normal.—Se compara después con estos patrones cualquier individuo de la edad correspondiente, que se somete á observación sobre una de esas cosas físico-fisiológicas y psíquicas (1).

Si sobre un asunto de carácter social fuera posible, decimos, concretar los conocimientos, sentimientos, temple de voluntad, etc., que tiene cada individuo sometido á observación, se podría quizá llegar á tener medias parciales referentes á cada una de esas notas, y quizá también llegar convencionalmente á valores medios del parámetro complejo definidor de la posición en el asunto, para los individuos de las diferentes edades en igualdad de circunstancias externas. Se debe de pensar que la nota menos difícil de concretar para hacer observaciones individuales, sería la de los conocimientos en un asunto. Se comprende que lo que se refiere á sentimientos, voliciones, etc., habría de ofrecer dificultades mucho más graves (2).

En las mediciones para las cuales se disponga de procedimientos de observación, si se hacen las observaciones sobre un gran número (m) de individuos de la misma edad,

que se encuentren en muy análogas condiciones, puede asimilarse el caso al de m observaciones que se hubieran hecho m veces repetidas sobre un mismo individuo, y que fueran discordantes por causas accidentales desconocidas. Para tener entonces el valor M más aceptable que haya de adoptarse como patrón, se aplica el *Postulado* de la *media aritmética*; es decir, que se suman los m valores de observación, y se divide la suma por el número m . Suponemos que las m observaciones merecen igual confianza en todos sentidos, y que las discrepancias son debidas tan sólo á *errores accidentales* é inevitables.

Recordando los resultados á que se llega en la *Teoría de los errores accidentales*, se sabe:

1.º Que si se representan por x las diferencias, por exceso ó por defecto, entre los valores de observación y su media aritmética M , el *error medio cuadrático de las observaciones* se calcula por la fórmula práctica $E = \sqrt{\frac{[x^2]}{m-1}}$, en la cual $[x^2]$ representa la suma de los cuadrados de todas las x , siguiendo la notación de *Gauss*.

2.º Las m observaciones tienen un *módulo de precisión* h , que es $h = \frac{1}{E\sqrt{2}}$.

Se dice también que el *el peso* p de esas observaciones es $p = h^2 = \frac{1}{2E^2}$.

Se ve—como es natural—que el módulo de precisión h ó el peso p de las observaciones es tanto mayor, cuanto más pequeño sea el error medio E . Esto último es indicio de que las diferencias x entre los valores de observación y su media son pequeñas, lo cual hace pensar que las observaciones han sido hechas todas ellas con esmero. Por eso se dice que son de gran precisión ó de mucho peso.

3.º Que el *error probable* r de las observaciones se calcula por la fórmula

$$r = 0,6745 \times E,$$

y nos indica que hay la *probabilidad* $\frac{1}{2}$ de que en una nueva observación que se hiciera del mismo modo que las m hechas, el valor que se encontrara, estuviera comprendido entre $M - r$ y $M + r$.

Añadiremos, como recuerdo de la *Teoría de los errores*:

1.º Que si se concibiera como valores *verdaderos* de lo que se quiere medir, todos los valores posibles alrededor de la media M , á ésta le corresponderían errores posibles respecto del verdadero, y la media cuadrática E_1 de estos errores, que se llama *error medio cuadrático de M* , se calcula por la fórmula $E_1 = \frac{E}{\sqrt{m}}$.

2.º El *módulo de precisión de la media M* es $h_1 = h\sqrt{m}$; y el *peso de la media* es $P = mp$.

Y se ve, como es natural, que la precisión h_1 de la media M —ó el peso P de ésta, depende no sólo de la precisión h ó del peso p de las observaciones, sino también del número m de éstas.—La precisión de la media crece proporcionalmente á la raíz cuadrada del número de observaciones á igual precisión de éstas. El peso de la media crece proporcionalmente al número de observaciones á igual peso de éstas.

En la precisión ó el peso de la media M (como valor de lo que se quiere medir), las fórmulas indican que el número de observaciones puede compensar su poca precisión ó su

(1) Así se procede en muchos laboratorios, como el de Mr. Binet, en París.

(2) Mr. A. Quetelet, apoyado en numerosos datos estadísticos, ha hecho, sin embargo, muy curiosas deducciones sobre los sentimientos estimados por sus efectos. Así, por ejemplo, comparando el *tipo medio* (en Francia, según los datos de cuatro años) de los hombres de edad comprendida entre veintiuno y veinticinco años, con el *tipo medio* de los de edad entre treinta y cinco y cuarenta, calculó que para la inclinación al robo (en aquella época) esos dos tipos medios estaban en la relación de 5 á 3.

Se podría poner muchos reparos á estas apreciaciones numéricas, como el mismo Quetelet indica.

poco peso. Claro es que conviene que sean de mucho peso las observaciones (ó de mucha precisión), y además en gran número.

3.º El error probable de la media M que es

$$R = 0,6745 \times E_1 \text{ ó } R = \frac{r}{\sqrt{m}}$$

(siendo r , como dijimos antes, el error probable de las observaciones), indica que hay la *probabilidad* $\frac{1}{2}$ de que el valor verdadero de lo que se mide esté comprendido entre $M - R$ y $M + R$.

Y se ve también—como es natural—que el error probable R de la media M varía en razón inversa de la raíz cuadrada del número de observaciones, á igual error probable de éstas (1).

*
* *

Cuando se dispone de muchas medias $M_1, M_2, \dots$ (en número N , por ejemplo), obtenidas por diferentes observadores, y sólo se sabe que han sido obtenidas respectivamente como resultado de $m_1, m_2, \dots$, observaciones, pero sin conocer el detalle de cada carpeta de observaciones, no pudiendo distinguir, por tanto, el peso de las observaciones de un grupo del peso de las de otro, y no habiendo, por tanto, motivo fundado para tener más confianza en unas que en otras (caso que se presenta con frecuencia), lo más sencillo es atribuir el mismo peso á todas las observaciones, y adoptar como unidad de peso ese peso común de cada observación simple, de las que hayan concurrido á formar $M_1, M_2, M_3, \dots$.

Así el peso de M_1 sería m_1
 — — de M_2 — m_2
 — — de M_3 — m_3

y se adopta como valor más aceptable de lo que se quiere medir

$$M = \frac{M_1 \times m_1 + M_2 \times m_2 + M_3 \times m_3 + \dots}{m_1 + m_2 + m_3 + \dots};$$

porque esto equivale á la media aritmética, si hubiera

m_1 observaciones, todas iguales entre sí, de valor M_1
 m_2 — — — — — M_2

La regla práctica es:

Multiplicar cada media conocida por el número de observaciones de que provino, y dividir la suma de estos productos por la suma de los números de observaciones.

Es claro que el peso P de esa M , adoptando como uni-

(1) Todos los resultados que preceden son deducidos en la Teoría de los errores accidentales, partiendo de la función de Gauss

$$\psi(x) = \frac{h}{\sqrt{\pi}} \cdot e^{-h^2 x^2};$$

como se puede ver en mis *Apuntes sobre Cálculo de Probabilidades. Teoría de los errores y Método de los mínimos cuadrados.*

dad el peso de una observación simple, es la suma de los pesos de las medias conocidas

$$P = m_1 + m_2 + m_3 + m_4 + \dots = [m],$$

es decir, el número total de observaciones simples.

Si se piensa sólo en una de las medias conocidas, la M_1 , por ejemplo, de peso m_1 , y se llama x_1 , su diferencia (por exceso ó por defecto) con M , se ve que á cada una de las observaciones simples de peso unidad de que provino M_1 le corresponde un error medio z_1 , dado para la proporción $\frac{1}{m_1} = \frac{x_1^2}{z_1^2}$, porque los pesos son inversamente proporcionales á los cuadrados de los errores medios.

Así, pues, $z_1^2 = m_1 x_1^2$.

Aplicando á cada una de las N medias conocidas este razonamiento, el error medio *en conjunto* E , para cada unidad de peso, será dado por la fórmula $E^2 = \frac{[mx^2]}{N-1}$.

Y de aquí que el error medio E_1 para la media final M se calcule por la fórmula $E_1^2 = \frac{E^2}{[m]}$.

El error probable de la M es $R = 0,6745 \cdot E_1$.

*
* *

Se puede afirmar más; es decir, que se puede hacer el cálculo con mayor aproximación, cuando se conoce el detalle de todas y cada una de las carpetas de observaciones. Supongamos que además de tener la media que arroja cada carpeta y el número de observaciones de que proviene, se ha calculado el error medio, ó, mejor, el peso de sus observaciones.

Sean, por ejemplo,

- | | |
|--------------|--|
| | $\left\{ \begin{array}{l} M_1 \text{ la media aritmética de sus observaciones.} \\ m_1 \text{ el número de sus observaciones.} \\ p_1 \text{ el peso de sus observaciones.} \end{array} \right.$ |
| 1.ª carpeta. | |
| | $\left\{ \begin{array}{l} M_2 \text{ la media aritmética de sus observaciones.} \\ m_2 \text{ el número de sus observaciones.} \\ p_2 \text{ el peso de sus observaciones.} \end{array} \right.$ |
| 2.ª carpeta. | |

y así sucesivamente hasta N carpetas.

Se sabe que

el peso de M_1 es $m_1 p_1$
 el peso de M_2 es $m_2 p_2$
 el peso de M_3 es $m_3 p_3$

y que el valor más aceptable de lo que se trata de medir será

$$M = \frac{M_1 \times m_1 p_1 + M_2 \times m_2 p_2 + \dots}{m_1 p_1 + m_2 p_2 + \dots};$$

y que tendrá un peso $P = m_1 p_1 + m_2 p_2 + m_3 p_3 + \dots$.

Por un razonamiento análogo al que se hizo anteriormente, se ve que á cada unidad de peso le correspondería, por el primer grupo de observaciones (1.ª carpeta), un error medio z_1 dado por la expresión $z_1^2 = m_1 p_1 \times x_1^2$, si se llama x_1 el error de M_1 respecto á M .

Aplicando el mismo razonamiento á las N medias, se ve

que el error medio E en todo el conjunto, para unidad de peso, se tendrá por la fórmula $E^2 = \frac{[m p \cdot x^2]}{N-1}$.

Después el error medio E_1 para la M final se calculará por la fórmula $E_1^2 = \frac{E^2}{[m p]}$, y el error probable R por la fórmula $R = 0,6745 \times E_1$.

*
* *

Todo lo dicho es aplicable á las observaciones físicas y fisiológicas, y quizá podría serlo también algún día á las de carácter social. Si recordamos las fórmulas del error medio

$$E_1 = \frac{E}{\sqrt{m}}, \text{ y del error probable } R = \frac{r}{\sqrt{m}} \text{ de una media}$$

cualquiera (1), se ve, como dijimos, que el error con que el número de medida M expresa el valor de lo que se haya sometido á observación, será tanto menor cuanto menor sea

$$E = \sqrt{\frac{[x^2]}{m-1}},$$

es decir, cuanto más perfecto haya sido el procedimiento de observación empleado, y mayor esmero en todo haya habido por parte de los observadores; y, además, cuanto más grande haya sido el número m de observaciones por medio de las cuales se obtuvo el número M de medida.

Ya se ve aquí la influencia de los *grandes números*. Para ponerla de relieve en un asunto de carácter social, supongamos que en un país se hicieran observaciones sistematizadas sobre niños de seis años de edad, por ejemplo, que empezaran á aprender la lectura, y que estuvieran colocados en igualdad de condiciones, hasta donde esto sea posible y hacedero; siguiendo el mismo método de enseñanza, con las mismas reglas pedagógicas dentro y fuera de la escuela, etc. Supongamos, para simplificar el ejemplo, que se trata de medir solamente la *velocidad media* con que hace un individuo el total aprendizaje por ese procedimiento y mediante esas reglas y condiciones, empezando á la edad dicha de seis años (2). Admitiendo que sea fácil hacer la observación del instante en que pueda decirse aproximadamente que cada individuo *ya sabe leer*, es decir, que ya ha terminado el aprendizaje, se tendría por la observación la duración total T de su aprendizaje, desde el instante en que empezó á los seis años de edad. Y si se representa por un número H constante el valor del camino recorrido por el individuo para pasar de la *posición* en que no sabía leer á la *posición* en que ya sabe, se ve que la *velocidad media* V del movimiento variado por el cual ese individuo ha pasado de una á otra posición, se expresa por $V = \frac{H}{T}$ (3).

Pues bien; si se someten á observación 100 niños en las condiciones de igualdad que decíamos, las diferencias que

(1) Se sabe que R es próximamente los dos tercios de E_1 , así como r lo es de E .

(2) En el Laboratorio de Mr. Binet se hacen observaciones de este género con cuidado, dividiendo el tiempo total empleado en el aprendizaje en cuatro períodos. A cada uno de estos períodos, de desigual duración, habría de aplicarse lo que decimos del tiempo total para simplificar el ejemplo.

(3) Nos limitamos exclusivamente al conocimiento adquirido de la lectura prescindiendo de todas las demás notas psíquicas que hay en el individuo, porque la observación de éstas ofrecería, como antes dijimos, dificultades gravísimas.

entre sí tengan los 100 valores de observación de V , serán pequeños (con relación á los valores mismos) si se trata de niños normales y se cumplen con rigor aquellas condiciones de igualdad en todos sentidos, que dependan de nosotros. Aplicando los resultados de la teoría de la compensación de errores accidentales que hemos expuesto minuciosamente, se tendría por la media aritmética entre los 100 valores discordantes (de observación) de V , el número de medida más aceptable para ésta. Llamémoslo V_M . Si las diferencias x entre V_M y los 100 valores de observación de V son muy pequeños, el error medio E de las observaciones será muy pequeño, y también lo será el error probable r de dichas observaciones.

Es evidente que V_M expresará con mucha mayor aproximación que cada una de las observaciones lo que se quiere medir, puesto que su error medio E_1 vale $\frac{E}{\sqrt{m}}$

(siendo $m = 100$);

y su error probable R vale $\frac{r}{\sqrt{m}}$, que es tan sólo los dos tercios de E_1 , ó poco más.

Poniendo la atención en estos errores muy pequeños, se puede decir que probablemente la velocidad V con que aprendería á leer cualquier otro niño normal, en iguales condiciones que los observados, estaría comprendida entre $V_M - E_1$ y $V_M + E_1$; y que es igualmente probable que V resulte comprendida entre $V_M - R$ y $V_M + R$, ó comprendida entre estos límites y los anteriores más amplios.

Se comprende la influencia que decíamos de los *grandes números*; porque á igualdad de esmero en todo, si en vez de 100, se hicieran 1.000, 10.000, 100.000, observaciones, los límites se irían estrechando cada vez más, y el *peso* del valor que se adoptara para la velocidad media V que se quiere medir, sería cada vez mayor.

*
* *

Expuesto lo que precede, y aplicando los principios del *Cálculo de probabilidades*, si se llama q la *probabilidad* de que la velocidad con que un niño (escogido al azar entre los normales) aprenda á leer en las condiciones dichas *esté comprendida* entre $V_M - E_1$ y $V_M + E_1$, es claro que la probabilidad de que *no resulte así* será $(1 - q)$.

Y se puede decir por el *Teorema de Bernoulli* que si se someten á esa prueba n niños normales cualesquiera, la *más probable* entre todas las combinaciones posibles de niños que resulten en el primer caso, y niños que estén en el segundo caso, será: que haya nq individuos en el primero y $n(1 - q) = n - nq$ en el segundo. Como q será en general bastante grande, es decir, mucho mayor que $\frac{1}{2}$, el número nq será probablemente mucho más de la mitad de los sometidos á la prueba, y mientras mayor sea q , más predominará nq sobre $n - nq$. Lo que decimos suele expresarse de otro modo diciendo: que en las n pruebas repetidas la relación del número de individuos que resulten en el primer caso al número total de pruebas será muy probablemente q , es decir, la probabilidad simple de que un individuo escogido al azar esté en el primer caso.

Pero nótese bien que decimos que esto es *lo más probable*, y nada más, porque puede resultar que en vez de nq individuos que estén en el primer caso, no haya más, al reali-

zar la prueba, que $nq - h$ individuos ó, por el contrario, $nq + h$ en ese caso. Diríamos entonces que en la experiencia ha habido una *desviación* h respecto de lo normal (1).

Bernoulli ha demostrado que esta desviación h respecto de lo normal, obedece á una ley (2), que suele llamarse *la ley de los grandes números*, y es la siguiente:

Que si se señala un número k (tan pequeño como se quiera) como límite máximo de la *desviación* por defecto ó por exceso, y se dispone del número n de pruebas, mientras más grande se adopte este número n , mayor será la *probabilidad* P de que la desviación h que pueda resultar en la experiencia sea menor que el número dado k , y si n creciera indefinidamente, el límite de la probabilidad P sería 1, es decir, la *certeza*. Lo cual indica que se podría concebir (y determinar por las tablas que hay construídas) un valor para n suficientemente grande, para tener una *probabilidad tan cercana como se quiera á la certeza* de que la desviación no puede llegar á valer k , pudiendo ser este número dado tan pequeño como se quiera.

Esta ley (matemática, no física) de los grandes números no puede darnos nunca la certeza, que no cabe en este género de cálculos sobre errores accidentales ó—como se dice vulgarmente—debidos al azar.

Acabamos de aplicarla á una cuestión cinemática, cual es la velocidad con que los individuos normales aprenden á leer en igualdad de circunstancias; pero debe notarse que esa ley de los grandes números—ó sea el *Teorema de Bernoulli*—se puede aplicar igualmente á todos los hechos sociales. Así, por ejemplo, si por estadísticas demográficas, cuidadosamente hechas durante muchos años en una gran población en que las circunstancias no hayan cambiado sensiblemente, se calcula el valor medio m del número anual de nacimientos, y se toma su relación al número p de habitantes de la población, la relación media $\frac{m}{p}$ se adoptará como el tipo de natalidad en dicha población, mientras no cambien las circunstancias. Si E , es el error medio de esa relación $\frac{m}{p}$, y se llama q la probabilidad de que al siguiente año la relación oscilara entre $\frac{m}{p} - E$, y $\frac{m}{p} + E$, pensando en los n años venideros, lo normal sería que hubiese nq de ellos en que la relación oscilara entre $\frac{m}{p} - E$, y $\frac{m}{p} + E$, y $(n - nq)$ en que no fuera así. Si esto no se cumpliera exactamente cuando llegue la realidad, diríamos que ha habido una *desviación* respecto de lo normal; y podríamos añadir que mientras mayor fuera el número n de años en que se pensase, mayor sería la probabilidad de que la desviación que pudiera aparecer fuera menor que un número dado tan pequeño como se quiera. Se sobreentiende en lo dicho que prescindimos—para simplificar—de los cambios que se hayan ido operando en las circunstancias.

*
* *

Cuando hayamos de hacer más adelante el estudio *dinámico* del movimiento de un individuo, á partir de un instante cualquiera que consideremos como inicial, necesitaremos

(1) Usamos la palabra *desviación* en el sentido que se da en francés á la palabra *écart*.

(2) Damos á la palabra ley un sentido puramente matemático que no debe de confundirse con el sentido de las leyes físicas.

como dato el *estado inicial* del individuo (1), que comprenderá:

- 1.º La posición inicial del individuo en el asunto; y
- 2.º Su velocidad inicial en magnitud, dirección y sentido.

Este estado proviene naturalmente de todas las variadísimas influencias que, en relación al asunto, haya recibido el individuo desde antes de su nacimiento hasta el instante que hemos llamado inicial para el estudio. La herencia recibida directamente de sus padres desde el instante de ser concebido, es un primer eslabón complicadísimo. Después de su nacimiento, la herencia fisiológica acompañada de una determinada predisposición psíquica, también heredada, se va complicando gradualmente por las acciones que todo lo que le rodea en el medio ambiente, físico y psíquico-social, ejerce sobre el individuo. Todas estas fuerzas que han ido influyendo en su movimiento de modificación habrán producido *como efecto*, aquella posición y aquella velocidad que juntas constituyen el *determinado estado*, que llamamos inicial, para el estudio de las subsiguientes modificaciones.

Análogamente, cuando hayamos de intentar el estudio dinámico del movimiento en un asunto de una agrupación social—á partir de un instante inicial—habremos de tener como dato el *estado inicial de la agrupación*, que comprenderá:

- 1.º El conjunto de las posiciones sociales de todos los individuos y elementos de la agrupación; y
- 2.º Las velocidades iniciales de todos los individuos y elementos.

Este estado inicial ha provenido de las acciones anteriormente ejercidas—sean interiores ó exteriores—que han influido en los individuos y elementos de la agrupación, y han determinado en general un efecto doble:

- 1.º Los conjuntos de conocimientos, sentimientos, creencias, hábitos, etc., que constituyen las posiciones en el instante inicial; y
- 2.º Las direcciones, magnitudes y sentidos de las velocidades con que se encuentran individuos y elementos sociales en el instante inicial.

Todo eso ha llegado como herencia á la agrupación social de que se trate; y ya se ve que, en general, la herencia debe de ser considerada para la Mecánica bajo un doble aspecto. Se concibe, sin embargo, que se herede una cierta posición *sin velocidades*; entonces el estado inicial es *de reposo* en el asunto.

James Mark Baldwin examina detalladamente el contenido de ese caudal que se transmite como herencia de unas generaciones á otras de la misma agrupación social, y trata de determinar á qué individuos de ella se transmite, y quiénes son los desheredados. Examina también cómo se transmite por aprendizaje—mediante la imitación—bajo la influencia de las condiciones que rodean á los individuos y elementos de la agrupación, y que forman lo que suele llamarse la atmósfera social.

Creemos que á la *Mecánica social* nada de eso lo interesa. Nos parece que en ella—á semejanza de la Mecánica de los sistemas materiales—sólo ha de ser considerada la herencia social como un *estado inicial* de que partir como dato.

*
* *

(1) La palabra *estado*, tiene aquí en Cinemática significación enteramente distinta de la que tiene en Física ó en Fisiología.

Aceleración.—Después de haber tratado de lo que se refiere á la velocidad del movimiento de modificación del individuo en un asunto, pensemos que si la velocidad es *variable* por ley de continuidad—ya sea solamente en magnitud (movimiento de dirección constante), ya sea en magnitud y dirección á la vez—aparece la noción de *aceleración*, porque siendo la velocidad *algo*, que cambia de algún modo en el tiempo por ley de continuidad, le será aplicable á su vez el concepto de velocidad, y á esta velocidad de la velocidad se le llama aceleración. Es innecesario justificar que en un movimiento uniforme de dirección constante, la noción de aceleración no aparece, puesto que la velocidad no cambia en nada.

Recordemos estas primeras sencillas ideas de Mecánica racional (como lo hemos hecho al tratar de la velocidad) empezando por el caso en que la velocidad en el movimiento de modificación del individuo varíe solamente *en magnitud*, porque el individuo se mueva siempre en la misma dirección y tendencia (trayectoria rectilínea).

Si esta variación de magnitud de la velocidad fuera tal que los incrementos—positivos ó negativos—que experimente en intervalos de tiempo iguales sean iguales, por pequeños que se tomen esos intervalos, se dice que el movimiento es *uniformemente variado*, y se llama aceleración al incremento j de la magnitud de la velocidad en la unidad de tiempo. En el caso del movimiento que se simboliza en la trayectoria rectilínea, la dirección de la aceleración es la de la velocidad, que es la de la trayectoria. Se ve que en el movimiento rectilíneo uniformemente variado, la aceleración se puede representar por un vector (como se hizo con la velocidad) localizado en la recta de la misma trayectoria. Y como esta j expresa la relación constante del incremento de la velocidad al incremento de tiempo—cualquiera que sea este intervalo—se escribe la ecuación conocida

$$v = v_0 + j \cdot t$$

en la cual v es la velocidad en un instante cualquiera t ; v_0 la que corresponde al instante inicial $t = 0$; y j es la aceleración.

Sobre la representación gráfica de esta ecuación y sobre la resolución numérica ó gráfica de los problemas, se repetirá lo que se dijo al hablar de la velocidad en un movimiento uniforme, porque la ley es la misma. Que por una simple multiplicación se calcula el incremento $(v - v_0)$ de la velocidad; y que por simple división se calcula j .

Pasando al caso en que las velocidades no varíen proporcionalmente á los tiempos, es decir, en que las variaciones de la magnitud de la velocidad se realicen *sin uniformidad*, se precisa la noción de *aceleración en un instante* por el mismo método infinitesimal que se indicó al precisar la noción de *velocidad en un instante*. Así la aceleración en un instante del movimiento de modificación del individuo, *cundo es de dirección constante*, es el coeficiente diferencial en un instante, de la velocidad respecto del tiempo $\left(\frac{dv}{dt}\right)$.

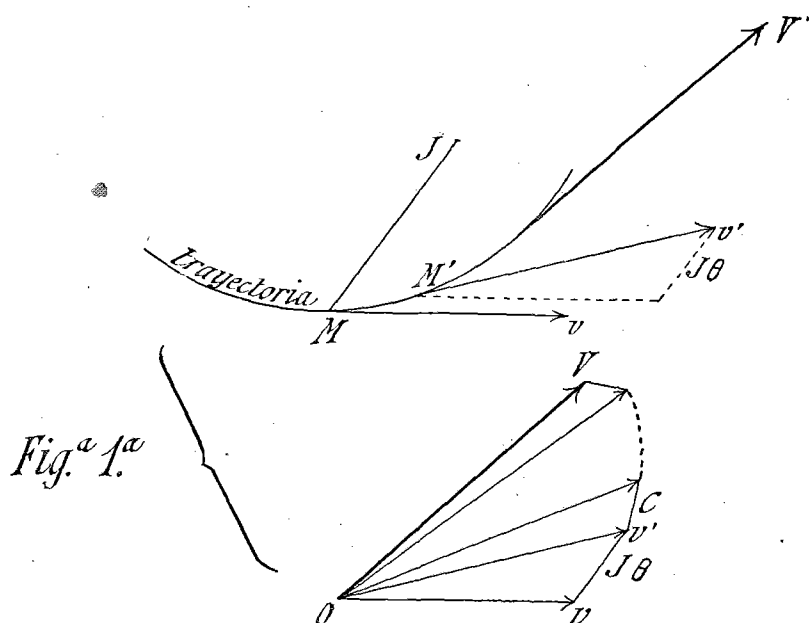
Y por esto, para obtener *aproximadamente* el cambio muy pequeño de la velocidad en un intervalo muy pequeño θ de tiempo, á partir de un instante t , se podrá multiplicar la aceleración en este instante por el intervalo θ . Pero si se ha de calcular la magnitud del cambio de la velocidad en un intervalo cualquiera (por medio de la aceleración variable de un

instante á otro) hay que recurrir á la integración durante ese intervalo, como ya dijimos para el cambio en la posición por medio de la velocidad variable.

* *

En el caso general de un movimiento de modificación del individuo en que éste va cambiando, continúa y sucesivamente la dirección en el mismo asunto, y con velocidades que varían también en magnitud de un instante á otro, hemos de pensar que esta variación ó cambio *total* hace nacer el concepto más general de aceleración en un instante dado, que es el de *aceleración total*.

El procedimiento para llegar á esta noción es el mismo infinitesimal ya dicho; pero es, en este caso, más complejo, porque afecta simultáneamente á la magnitud y á la dirección y sentido de la velocidad, es decir, á todos los atributos del vector-velocidad. Al transcurrir un intervalo muy pequeño de tiempo θ , á partir de un instante t , la velocidad v en este instante recibe un *incremento total* muy pequeño con cierta magnitud, dirección y sentido que, compuesto con v , determina la velocidad v' en el instante $t + \theta$. En el límite del decrecimiento indefinido de θ , la relación á θ de ese incremento total de la velocidad es la *aceleración total* J en el instante t . (Véase la fig. 1.^a simbólica.)



Y se ve que esta aceleración corresponde exactamente á la velocidad en el mismo instante de un punto que recorriera la curva hodógrafa C , construída á partir de un punto cualquiera O . Por ser total, es decir, por referirse á *todo* lo que constituye la velocidad, esta aceleración permite pasar aproximadamente de la velocidad v en el instante t á la velocidad v' en el instante $t + \theta$, componiendo aquélla con la $J \cdot \theta$, que se obtiene por simple multiplicación.

Y es claro que para conocer (en un todo) la velocidad V al cabo de un transcurso cualquiera de tiempo, hay que recurrir á la integración en este tiempo de los cambios totales muy pequeños $J \cdot \theta$ de la velocidad. Y el vector V que se obtenga en el símbolo geométrico por la composición de la velocidad inicial v con todas las $J \cdot \theta$ sucesivas (véase la figura) deberá de localizarse (para el instante final del transcurso de tiempo) en la tangente á la trayectoria trazada en la posición correspondiente del móvil.

Hemos recordado con excesiva prolijidad de detalles estas primeras ideas vulgares de la Cinemática sobre veloci-

dades y aceleraciones, con el propósito de que se vea que serían aplicables sin modificación alguna al movimiento de un individuo en un asunto cualquiera, si admitiéramos (como decíamos en los *Preliminares*) que el paso de una posición del individuo en el asunto á otra posición muy próxima durante un intervalo de tiempo muy pequeño θ , quedara determinado en *magnitud, dirección y sentido* por el incremento muy pequeño que experimentara un parámetro complejo que sirviera para definir aquella posición psíquica.

Es claro que en la práctica—ya lo dijimos—los cambios de dirección en el movimiento de un individuo sólo ocurren á intervalos de tiempo suficientemente grandes, para que el movimiento deba de ser mirado como una sucesión de movimientos de dirección constante y de mucha duración, cada uno de los cuales puede ser uniforme ó puede ser de velocidad variable en magnitud. En este segundo caso es cuando se presenta prácticamente la aceleración.

Pero como nuestro propósito ha sido seguir la exposición de la Mecánica racional con el carácter general científico y puramente teórico que ella tiene, sin preocuparnos aquí de las aplicaciones, hemos tratado del movimiento más general posible de un individuo en el cual la dirección de su movimiento fuera incesantemente cambiante (representación curvilínea), y la magnitud de su velocidad fuera también cambiando de un instante á otro, para que se viera en este caso general la *aceleración total* en cada instante, que es muy interesante para la Dinámica, como veremos.

*
*
*

En las indicaciones cinemáticas hechas anteriormente sobre el movimiento de modificación de un individuo, se nos ha impuesto (como indispensable) la noción de *dirección y sentido* del movimiento en un instante dado. Ya dijimos en los *Preliminares* que supondríamos afectado al individuo de un parámetro simbólico que—por su valor en cada instante—definiera la posición en el asunto, y que fuera además susceptible de marcar—por su incremento en un transcurso muy pequeño de tiempo θ —, no sólo la magnitud muy pequeña del *cambio de posición* en ese intervalo θ , sino también la *dirección y el sentido* de ese cambio de posición (1). Esta suposición responde á la idea que tenemos de que todo cambio psíquico muy pequeño que experimente un individuo en el conjunto de sus ideas, sentimientos, etc., sobre un asunto, ha de ser—así me parece—en una cierta y determinada dirección y sentido psíquicos.

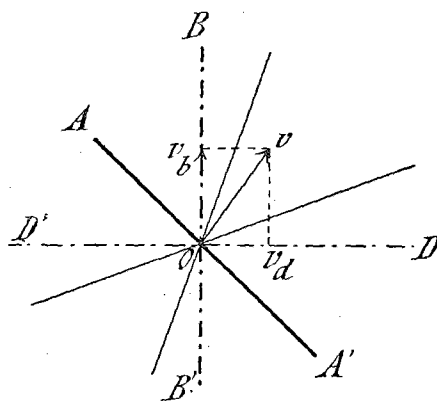
En el intrincado campo de lo psíquico—y á partir de una determinada posición del individuo en un asunto—concibamos toda la infinidad de direcciones posibles que se distinguen unas de otras por la orientación psíquica que cada una señale en el asunto. En relación á todas ellas, veamos el determinado cambio muy pequeño de posición del individuo, con su determinada dirección y sentido, que corresponden á su velocidad v en ese instante.

Sé puede notar que este movimiento será *enteramente ajeno* á algunas de aquellas direcciones, pero que—generalmente hablando—participará en algo de las demás direcciones: participará en mayor grado, naturalmente—de aquellas que se aparten menos de la dirección de la velocidad. Se podría apreciar el cuánto de la velocidad v en una direc-

ción dada D (véase la figura 2.^a), concibiendo la v como compuesta de una parte v_d en la dirección D , y de otra v_b , ajena por completo á esta dirección D . La componente v_d es lo que se llama *la velocidad v estimada en la dirección D* .

La representación *esquemática* de lo que decimos se vería figurando en ov (fig. 2.^a) la velocidad en magnitud, dirección y sentido. Se ve que en algunas de estas direcciones la v no tiene componente alguna, pero que en cualquiera de las otras, en la D , por ejemplo, hay una componente v_d de la velocidad v , si se concibe ésta como resultante de v_d y de otra v_b situada en el plano BB' perpendicular á D , en el cual están representadas las direcciones por completo ajenas á la D .

Fig.^a 2.^a



Así se concibe simbolizada en v_d *la velocidad estimada en la dirección D* , porque expresa (por su magnitud y su sentido) *cuánto* tiene la v , y *en qué sentido* de esa dirección D .

Si se piensa—por ejemplo—en la posición o como símbolo de la que tiene un individuo en un asunto económico, y su estado es de movimiento en el asunto con una velocidad conocida v , cabe estimar ésta en aquellas direcciones que no sean enteramente ajenas á la dirección del movimiento. Si, por ejemplo, se supone que ese movimiento en el asunto económico de que se trate se relaciona en algo con el cambio internacional de productos (dirección D), al *estimar su velocidad v en esta dirección*, se vería *cuánto* hay (en el movimiento elemental) de *sentido* librecambista ó prohibicionista, y esto se vería *por la magnitud de v_d y por su sentido*.

Consideremos otro ejemplo. Si tratando de un asunto del género político se considera en éste una dirección D —á partir de la posición o —, que simbolice la participación del pueblo el asunto político, y se supone que el movimiento del individuo es en una dirección política v , que no sea ajena por completo á la dirección D , se ve que la velocidad v , estimada en la dirección D , nos indicará *cuánto* hay de *sentido* democrático ó antidemocrático (que son los dos sentidos diametralmente opuestos oD y oD' en la dirección D) en el movimiento elemental de que se trata.

Todo lo que decimos sobre la velocidad podría decirse sobre la aceleración de un movimiento en un instante, que se podría *estimar* también *en una dirección dada D* . Nos ayudaríamos para esta concepción simbólica de las representaciones geométricas que usamos al definir anteriormente la aceleración total J en un instante, en magnitud, dirección y sentido,

(1) He de repetir aquí que me parece sumamente difícil—por no decir imposible—señalar hoy un procedimiento por virtud del cual se pueda hallar, para cada individuo y en cada asunto, ese parámetro,

COMPOSICIÓN DE MOVIMIENTOS. MOVIMIENTO RELATIVO

Composición de dos movimientos—En el estudio de los movimientos de modificación de los individuos, habremos de considerar á éstos más adelante como están en la realidad, es decir, formando parte siempre de una agrupación social; con lo cual queremos significar que *participan*—como por vía de arrastre—del movimiento de conjunto de la agrupación en el asunto social de que se trate, cualquiera que éste sea, puesto que supondremos que los individuos están ligados á ella. Este movimiento de conjunto de una agrupación es muy difícil de definir y precisar, tal como se da en la realidad, y por esto nos limitaremos al caso teórico de que fuera posible conocer en magnitud, dirección y sentido la *velocidad de arrastre* que corresponda en un instante dado á cada individuo por el hecho de participar del movimiento de conjunto de la agrupación, en virtud de los enlaces que tenga en ella. Esta velocidad de arrastre no será en general la misma en un instante dado para todos los individuos de la agrupación. á no ser en casos muy especiales (1).

Ahora bien: si concebimos que un individuo tenga en un instante dado una velocidad propia con relación á la agrupación á que pertenece, esta velocidad no sería la real y efectiva del individuo, sino en el supuesto de que la agrupación estuviera en reposo. Pero si suponemos que ésta á su vez se halla en movimiento, el individuo (á quien suponemos participe de este movimiento), tendrá, además de su velocidad propia *relativa*, otra velocidad de *arrastre*, y el movimiento de modificación del individuo en el asunto será—en el instante que se considera—el que corresponda á la velocidad resultante de las dos, y que se representaría en la dirección y con el sentido de la diagonal del paralelogramo formado con las magnitudes, direcciones y sentidos de las dos velocidades componentes. Además, la magnitud de la velocidad resultante estará representada (con arreglo á escala) por la longitud de la diagonal.—Es evidente que la velocidad real y efectiva se acercará más á la que en magnitud predomine entre las dos componentes.

La operación de determinar por la regla del paralelogramo, la velocidad absoluta como resultante de la relativa y la de arrastre, es la que suele llamarse *composición de velocidades*.

El problema de la determinación de la velocidad relativa es el inverso, á saber: conocida la velocidad real y efectiva que el individuo en un instante dado tiene en su movimiento absoluto en un asunto—digámoslo así—, y conocida también su velocidad de arrastre en el asunto, por su enlace con la agrupación de que forma parte, hallar la velocidad que podría decirse tiene con relación á la agrupación, es decir, su velocidad relativa.—Este problema se llama de la *descomposición*, y queda resuelto evidentemente, llevándolo al de la composición de la velocidad absoluta con una igual y opuesta á la de arrastre, para reducir al reposo á la agrupación, y que no quede (de la velocidad efectiva) más que la velocidad relativamente á la agrupación.

(1) En un asunto religioso de importancia se dará á veas (no siempre) el caso de que todos los que formen parte de la colectividad social constituida por los individuos de una misma confesión religiosa, reciban de la colectividad una misma, idéntica velocidad de arrastre para un determinado movimiento en aquel asunto. Entonces se podría decir con toda propiedad que esa es la *velocidad de la colectividad*, y el movimiento de ésta se podría representar perfectamente por el de simple *traslación* de un sólido invariable de los que estudia la *Mecánica racional*.

Para evitar confusiones en que muy á menudo se incurre, conviene llamar la atención (como lo hace Bour en su excelente *Tratado de Mecánica racional*) sobre las frases anteriores. Nótese bien que un individuo, en un instante dado, no puede tener varias velocidades *distintas*, en su determinado movimiento en un asunto, porque eso es inconcebible. No tiene ni puede tener, en el instante considerado, más que *una* única velocidad *real y efectiva*, y es la que hemos llamado velocidad absoluta (para darle un nombre como si pudiera ser contemplada desde algún punto de vista absolutamente fijo (1)).

Si esta misma velocidad efectiva del individuo no es mirada aisladamente, sino en relación con la agrupación que está toda ella en movimiento, puede concebirse al individuo de que tratamos como teniendo una velocidad relativa, pero ésta *no es más* que la misma velocidad absoluta contemplada desde un punto de vista que fuera arrastrado por la agrupación en su movimiento de conjunto. Quizá podría decirse también que la velocidad de arrastre que hemos dicho que tiene el individuo, no es más que la misma velocidad absoluta de la cual imaginamos que se descuenta (si vale la frase) lo que hubiera en ella de individual é independiente del movimiento de la agrupación; es decir, mirando la velocidad absoluta desde un punto de vista colocado idealmente en el interior de un individuo que conservara su movimiento propio individual, y se sustrajera al movimiento de la agrupación (2).

Antes de pasar á la composición de muchos movimientos, presentemos algún ejemplo de lo dicho sobre la composición de dos. Pensemos en la agrupación social más sencilla, que es la familia, como la vemos hoy en nuestras Sociedades, y consideremos un individuo de ella en un asunto religioso—por ejemplo—. En un instante dado, el individuo que consideramos está en una cierta determinada posición en ese asunto. Dejando aparte las diversas influencias que hayan tendido anteriormente á modificar su posición religiosa, ejerciendo su acción como fuerzas en muy varias direcciones y sentidos, y con varias intensidades (3), supongamos el hecho escueto de que el individuo, en el instante en que lo vemos, tenga una velocidad propia, individual, suya, de movimiento en ese asunto religioso, y que sea conocida en magnitud, dirección y sentido, venga de donde viniere. Si además suponemos que la familia á que pertenece (por causas que aquí tampoco nos interesan), se halla en ese mismo instante en estado de movimiento de modificación religiosa en el asunto, y admitimos que sea conocida en magnitud, dirección y sentido también, la velocidad de arrastre para ese individuo de la familia vemos que, en *dirección y sentido*, así como en *magnitud*, la velocidad efectiva en ese instante del movimiento de modificación religiosa del individuo, será la resultante de las dos componentes, y se representaría geométricamente por la diagonal del paralelogramo que se construyera sobre las representaciones geométricas de las dos velocidades conocidas (4).

(1) Se sabe que esto del punto de vista absolutamente fijo es una mera concepción abstracta sin realidad; pero este modo de pensar en un punto de referencia absolutamente fijo, es útil al pensamiento puramente especulativo.

(2) Esta concepción es algún tanto violenta. Quizá Bour tiene razón al decir que bajo ningún pretexto se puede (en ningún caso) considerar el movimiento de arrastre como perteneciendo al punto.

(3) Esta cuestión es de Dinámica, de que ahora no tratamos.

(4) Claro es que si se considera un individuo de tal manera desligado de su familia (por lo que toca á su posición en este asunto) que la velocidad

Composición de varios movimientos.—Para tratar el caso en que la agrupación primera (la familia, por ejemplo), forme parte á su vez de una segunda agrupación más comprensiva (el Municipio en que vive, por ejemplo), y que aquella primera agrupación participe del movimiento de conjunto de la segunda, hemos de partir del supuesto de que (así como antes suponíamos que era conocida la velocidad de arrastre para el individuo por el enlace con su familia) sea también conocida en el mismo instante la segunda velocidad de arrastre (la del Municipio, por ejemplo), para el mismo individuo en el mismo asunto. Es claro que al participar la familia—como por vía de arrastre—(en este asunto) del movimiento del pueblo, de este participará en general el individuo que pertenece á la familia (1).

La regla de composición de velocidades será siempre la del paralelogramo, porque después de compuesta la propia individual (relativa á la familia) con la primera de arrastre, la resultante habrá de ser tratada como una velocidad relativa con respecto al municipio, para componerla á su vez con la segunda de arrastre (la del municipio), que hemos supuesto conocida también. La resultante de esta segunda composición será la velocidad efectiva del individuo en el asunto—en magnitud, dirección y sentido.

Con toda generalidad podemos decir: que si el municipio participa del movimiento de conjunto que pueda tener la provincia ó región á que pertenece; y ésta á su vez del movimiento de la nación, y ésta del movimiento de su raza; y, finalmente, su raza del movimiento total de la humanidad; cada individuo tendrá en un instante dado (para cada asunto) una velocidad en su movimiento de modificación que estará determinada por la resultante de su velocidad propia individual y de todas las simultáneas de arrastre que hemos enumerado. Es claro que alguna de estas componentes no existiría si el enlace ó la conexión correspondiente no existiera; como, por ejemplo, si un individuo y su familia estuvieran completamente separados de la corriente de movimiento del municipio en que vive, ó una nación estuviera aislada del movimiento general de las de su raza, etc.

Si ponemos la atención en un asunto económico—un asunto de agricultura, por ejemplo—y escogemos un individuo que en un instante dado dedique á este asunto su actividad, y pensamos en lo que hemos llamado su posición en el asunto en ese instante, diríamos primeramente que está *en reposo*, si no está en vías de introducir modificación de ninguna especie en su modo de llevar ese asunto como agricultor, y no hace más que conservar la posición heredada ó adquirida anteriormente. Si, por el contrario, suponemos que está animado de una velocidad propia de modificación en determinada dirección y sentido, y que ese agricultor no

de arrastre fuera para él *nula*, no habría entonces composición de velocidades, pues se trataría de un individuo absolutamente libre de las sugestiones de la agrupación familiar en este asunto.

(1) No nos incumbe á nosotros entrar aquí á examinar si para cada individuo—en la generalidad de los asuntos de carácter social—esas dos velocidades de arrastre, á saber: la que proviene de la familia y la que proviene del pueblo, tienen direcciones y sentidos que se separen poco ó mucho la una de la otra. Hay quienes creen que—generalmente hablando—hay antagonismo; es decir, que (en la misma dirección) es frecuente que los sentidos sean diametralmente opuestos. Esto nada interesa en la Cinemática pura y abstracta de que aquí tratamos.

Ya dijimos al principio que en la Cinemática se hace siempre abstracción completa de las fuerzas que producen los movimientos, pero en una Cinemática aplicada sería muy interesante el examen y determinación de los movimientos que (proviendo de los intereses, concordantes ó discordantes, de las simpatías ó antipatías, etc.) determinan las velocidades de arrastre de los individuos en una ú otra dirección y sentido.

Dentro de una nación—por ejemplo—habrían de ser consideradas las familias, los Municipios y las regiones—para esa consideración cinemática.

está aislado, sino que forma parte de una corporación agraria, y que ésta tiene un movimiento general de modificación en el asunto de que tratamos, el individuo recibirá, como partícipe de este movimiento de la corporación, una primera velocidad de arrastre.

Si á su vez la corporación participara de un movimiento general de la región ó del país, que se relacione con aquella especie de modificación, el individuo recibiría una tercera componente de velocidad; y la resultante de las tres velocidades dichas sería en el instante que consideramos la velocidad real y efectiva del individuo, y ella señalaría la dirección y el sentido de su movimiento efectivo de modificación.

Parece innecesario decir que sería difícilísima, por no decir imposible, la determinación de cada una de las velocidades componentes que se requieren como datos para aplicar el procedimiento expuesto de composición que habría de conducirnos á la velocidad resultante para cada individuo. Es primeramente difícil conocer con precisión la dirección, sentido y magnitud de la velocidad propia individual, relativamente á la primera agrupación social á que pertenece; pero la dificultad es mucho mayor para las demás componentes, que son velocidades de arrastre del individuo por las distintas agrupaciones sociales más y más comprensivas que envuelven, por decirlo así, al individuo. Y son mucho más difíciles de terminar con precisión estas componentes, porque habría que conocer, no ya una dirección y sentido general de velocidad como dirección media con su magnitud media, sino la que particularmente correspondiera al individuo de que se trate. Se comprende que esta última varíe de un individuo á otro, según su enlace (para el asunto), con la familia, con el Municipio y la región, etc., para ser arrastrado en una ú otra dirección y sentido, y con más ó menos intensidad.

Entraría por mucho en estas determinaciones un complicadísimo y casi inextricable, conjunto de circunstancias de carácter psíquico social (1).

ADVERTENCIA. — Tengo ahora conocimiento de un libro del Profesor SP. C. Haret, de Bucarest, titulado *Mecánica social*, y publicado á fines de 1910. Veo que ese trabajo es enteramente distinto del mío, aunque en ambos se aplique á los individuos y á las agrupaciones sociales los Principios y Teoremas de la Mecánica racional; porque se hace la aplicación desde puntos de vista diferentes y con muy diverso criterio, como podrá apreciar quien leyere uno y otro trabajo. Mi estudio es predominantemente psicológico (como base de lo social), y además puramente abstracto y teórico. Mientras que Mr. Haret aspira en el suyo á hacer una Mecánica social aplicada (al menos como primera aproximación), habiendo sido la aplicación á la política el móvil que le ha impulsado á hacer su trabajo.

Así, en toda la segunda mitad del libro, se trata de cosas que no tienen analogía alguna con lo tratado por mí en estos *Apuntes*; y termina con reflexiones sobre la marcha de la civilización.

En la Mecánica social propiamente dicha, veo que Mr. Haret había estudiado ya alguna de las cuestiones que yo he abordado en este trabajo; pero lo había hecho de manera muy diferente. Es de notar, sin embargo, que yo haya llegado—aunque por distinto camino—á un modo de extender el principio de la inercia que en algún punto coincide con el de Mr. Haret; y que yo haya llegado también á concepciones algo análogas á las suyas sobre la noción de masa, para poder mirar ésta como constante.

(Continuad).

(1) A los sociólogos corresponde el estudio de estas difíciles cuestiones sobre las velocidades de arrastre y las velocidades propias individuales, según sean los tipos de las agrupaciones sociales, y según sean las circunstancias en que se encuentren. Con el tema de la composición de velocidades, guardan cierta conexión las observaciones del Profesor Durkheim acerca de la debilitación progresiva de la conciencia común ó colectiva, por la cual, las velocidades propias individuales van predominando más y más.

Las velocidades propias individuales dependen sin duda de todo lo que hay en el interior de cada individuo, en lo que denominaremos más adelante su medio interno; pero esta consideración es de orden dinámico, y trataremos de ella más adelante.