

El cuadro se refiere a $k = 1$, es decir, a piezas articuladas en sus extremos. Para aplicarlo a cualquier otro caso, basta efectuar el cálculo para una longitud *virtual* (fig. 29), obtenida multiplicando la real por $\sqrt{\frac{1}{k}}$, puesto que para una misma presión crítica, $k \pi^2 \frac{EI}{l}$, l varía como $\sqrt{\frac{1}{k}}$. Así, para:

Un extremo libre, otro empotrado, $k = \frac{1}{4}$, $l_v = 2l$.

Los dos extremos articulados, $k = 1$, $l_v = l$.

Un extremo empotrado, otro guiado, $k = 2$, $l_v = \frac{l}{\sqrt{2}}$
 $= 0,707 l$.

Los dos extremos empotrados, $k = 4$, $l_v = 0,50 l$.

Ejemplo: Pilar de 10 metros de altura, empotrado en la base, guiado en la coronación y cargado con 100 toneladas.

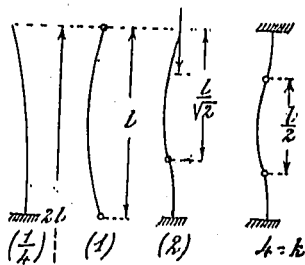


Fig. 29.

Tomaremos, en general, como unidades el centímetro y el kilogramo. La longitud virtual será 707 centímetros, y su cuadrado 500.000. El número $0,91 \frac{P}{l_v^2}$ es 0,182. Si empleamos hormigón de 300 kilogramos por metro cúbico, la esbeltez 14 y la carga 36,2 kilogramos por centímetro cuadrado, corresponden, exactamente casi, con 0,182. Si el hormigón es de 400 kilogramos por metro cúbico, la interpolación da $\frac{l}{e} = 15,50$, y $H_{cp} = 43,3$ kilogramos por centímetro cuadrado.

Resultan así respectivamente:

$e = 50$ cm.	$e = 46$ cm.
$e^2 = 2.500$ cm ² .	$e^2 = 2.116$ cm ² .
$\alpha' = 12,50$ cm ² .	$\alpha' = 10,58$ cm ² .
$d \leq 2,5$ cm.	$d \leq 2,3$ cm.
$4 \bullet$ de $2,0 = 12,56$ cm ² .	$4 \bullet$ de $1,8 = 10,20$ cm ² .
$\alpha'' = 0,28$ cm ² .	$\alpha'' = 0,23$ cm ² .
$1 \bullet$ de $0,6 = 0,28$ cm ² .	$1 \bullet$ de $0,55 = 0,24$ cm ² .
$s = 16,7$ cm.	$s = 15,3$ cm.
$m = 6$ cercos en m. 1.	$m = 6,5$ cercos en m. 1.
$\frac{P}{h} = 40,0$ kg./cm ² .	$\frac{P}{h} = 47,2$ kg./cm ² .
$H = 36,4$ »	$H = 42,9$ »
$A = 582$ »	$A = 686$ »
$V = 0,2500$ m ³ .	$V = 0,2116$ m ³ .
$v = 0,0015$ »	$v = 0,0013$ »
$p = 12,0$ kg.	$p = 10,4$ kg.

Los valores H y siguientes están deducidos suponiendo $q' = 0,005$ y $q'' = 0,001$, porque las secciones calculadas coinciden prácticamente con las correspondientes a las barras y alambre escogidos. Muchas veces, por no tener en una obra demasiados tipos de barras, hay que adoptar secciones efectivas mayores que α' y α'' ; si se quiere apurar la exactitud, hay que calcular las q' y q'' que efectivamente resulten y el factor de amplificación $(1 + r' q') (1 + r'' q'')$. v y p se refieren al total de armaduras en un metro lineal. La disminución de V y de p , empleando el hormigón de 400 kilogramos por metro cúbico, compensa con

creces el aumento de coste debido a la mayor riqueza en cemento. A 80 pesetas la tonelada de éste y con los precios ya indicados, de 100 y 0,40 el metro lineal de pilar cuesta 29,80 y 27,01 pesetas. Conviene, económicamente, el hormigón de más resistencia, con el mínimo de armaduras.

Solamente cuando circunstancias especiales exijan reducir todo lo posible las dimensiones de un pilar ó cuando antes de sufrir compresión esté la pieza expuesta a trabajar por flexión, un pilote, por ejemplo, convendrá forzar las cuantías. Entonces precisa limitar la carga aparente $\frac{P}{h}$ a $0,60 H_{rc}$, ó, lo que es

igual, la amplificación $(1 + r' q') (1 + r'' q'')$ a $\frac{0,60}{0,28} = 2,14$, para que el hormigón exterior a los cercos, y que no está protegido por ellos, no se fisure. Pero es muy raro llegar a $q' = 0,04$ y $q'' = 0,01$, que dan una amplificación, al máximo, de 1,90.

Un pilar de hormigón armado, entre dos suelos con nervios cruzados, está teóricamente en el caso de doble empotramiento ($k = 4$); si en uno de aquéllos hay un solo orden de nervios, en el tercero ($k = 2$); si en los dos hay nervios en un solo sentido en el segundo ($k = 1$) y si está sentado sobre una basa y con una sola fila de nervios en la coronación en el primero ($k = \frac{1}{4}$).

Todo lo dicho supone la presión exactamente aplicada según el eje. En las obras no hay esa exactitud, y es prudente precaverse contra las desigualdades de peso y de sobrecarga, particularmente de ésta, rebajando la presión admisible a 0,80, 0,70, 0,60 de la calculada, según que la pieza esté bajo nervios simétricos, en línea de fachada, ó en ángulo de ésta; ó lo que es igual, mayorar la presión total a 1,25, 1,43, 1,67, ó $\frac{5}{4}$, $\frac{10}{7}$, $\frac{5}{3}$, de la real, números adoptados por la Comisión francesa que experimentó, al efecto, numerosas piezas.

La fórmula de Rankine, recomendada por dicha Comisión:

$$H_{cp} = \frac{0,28 H_{rc}}{1 + \frac{c}{10.000} \frac{l^2}{e^2}}$$

en la que c vale en los cuatro casos, $4, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}$, resulta idéntica a la que directamente hemos deducido, partiendo de la de Euler,

$$H_{cp} = \frac{0,28 H_{rc}}{1 + \frac{1}{10.000 k} \frac{l^2}{e^2}}$$

con los coeficientes k , $\frac{1}{4}, 1, 2, 4$, es decir, $k = \frac{1}{c}$. Llegamos, por tanto, a lo establecido experimentalmente, de perfecto acuerdo la práctica con la teoría (1).

Cuando la excentricidad pueda tener un valor apreciable, la pieza está sujeta a flexión compuesta, y como tal hay que calcularla. Aplicar lo aquí expuesto, constituiría un *grave error*.

Una simplificación de la fórmula de Simpson

La fórmula, gratuitamente atribuida a Simpson, para determinar de modo aproximado el área de una superficie plana, limitada por un contorno curvilíneo cualquiera, es susceptible de multitud de aplicaciones prácticas; y lo fue-

(1) Comprobación de lo antes afirmado. La fórmula de Euler es exacta siempre que el valor de E , que en ella interviene, sea precisamente el relativo a la carga crítica de iniciación del pandeo.

ra aún más, de no ser un tanto difícil de recordar y algo enfadosas las operaciones á que obliga.

Sabido es, en efecto, que exige la división en un número par ($2n$) de partes iguales de la recta que sirve de base ó eje de abscisas (A), y hace además preciso tener en cuenta

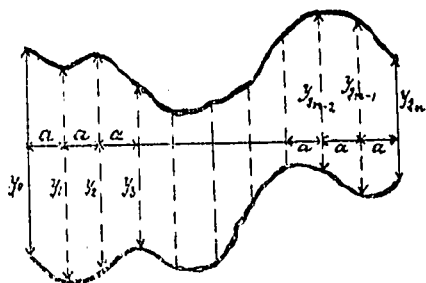


Fig. 1.ª

la situación de las ordenadas (y), que según ocupen lugar par ó impar, entran por el duplo ó por el cuádruplo de su longitud en la expresión del área. Esta es en general (figura 1.ª)

$$S = \frac{a}{3} \left[(y_0 + y_{2n}) + 4(y_1 + y_3 + \dots + y_{2n-1}) + 2(y_2 + y_4 + \dots + y_{2n-2}) \right]$$

Pero si se trata de un perímetro cerrado (fig. 2.ª), algunos Ingenieros preconizan con Colombo la siguiente:

$$S = \frac{2}{3} a (y_1 + y_{2n-1}) + \frac{a}{3} \left[4(y_2 + y_4 + \dots + y_{2n-2}) + 2(y_3 + y_5 + \dots + y_{2n-3}) \right]$$

que equivale á suponer la superficie limitada por las normales y_1 é y_{2n-1} , añadiendo á esta área la de las lúnulas extremas, computadas por los $4/3$ de los triángulos de igual base y altura.

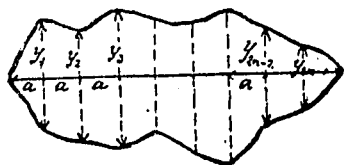


Fig. 2.ª

Sin embargo, la deducción de la fórmula general de Simpson fundada en que la superficie de un trapecio es el tercio de su semialtura multiplicada por la suma de sus bases y del cuádruplo de la mediana $\frac{a}{3} (b + 4\beta + B)$ siendo $2a$ la altura, B y b las bases y β la mediana $\beta = \frac{B+b}{2}$ permite aplicarle al caso de que se trata, puesto que, sus-

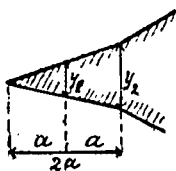


Fig. 3.ª

tituidos los trozos curvos del perímetro por los rectilíneos que unen los extremos de las ordenadas, el área de los triángulos terminales también puede ponerse bajo la for-

ma de producto del tercio de su semialtura por la suma de su base con el cuádruplo de la del triángulo de altura mitad (fig. 3.ª)

$$\frac{a}{3} (y_1 + 4y_2) \quad \frac{a}{3} (y_{2n-2} + 4y_{2n-1})$$

y de consiguiente el área total S viene expresada por

$$S = \frac{a}{3} \left[4(y_1 + y_3 + \dots + y_{2n-1}) + 2(y_2 + y_4 + \dots + y_{2n-2}) \right]$$

que es la misma fórmula general, haciendo en ella nulos los valores de las ordenadas extremas, $y_0 = 0$ $y_{2n} = 0$.

Precisamente este caso de perímetro cerrado es el que con más frecuencia surge en la práctica, presentándose por ejemplo en el aforo indirecto de ríos de alguna importancia (1), cuyas secciones es preciso calcular con rapidez, en diversos perfiles del trozo elegido para efectuar la operación.

No siendo visible el fondo del cauce para revelar con su forma el proceso más adecuado, y teniendo una base tan indicada como la cara de aguas del río, sobre la que es fácil medir perpendiculares sondando el calado en tantos puntos como se desee, es un caso en que las circunstancias todas inducen á una cuadratura aproximada de la índole de las que nos ocupan.

Mas en realidad, y quizá por las razones expuestas, nunca es corriente emplear la fórmula de Simpson, ni tampoco la de Poncelet, mucho más ingeniosa, pero que también exige la división en número par de partes, sino que por lo común suele señalarse sobre la anchura del río y á contar desde una de sus orillas, tramos iguales de un cierto número entero de metros cada uno, mayor ó menor, según sea la amplitud fluvial y la relativa exactitud requerida por el trabajo. Y como en general la abscisa a elegida no será justamente un divisor de la latitud del cauce A , quedará en el borde opuesto un cierto último tramo menor que sus precedentes y á menudo fraccionario (fig. 4.ª).

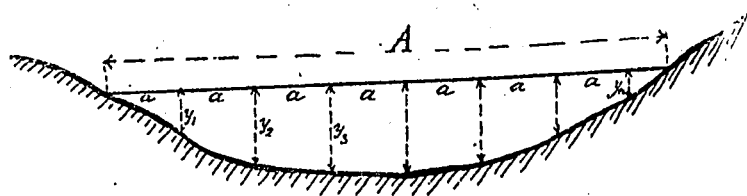


Fig. 4.ª

Calcúlase ordinariamente la superficie del perfil, sumando al área del primer triángulo la de los sucesivos trapecios, considerados como rectilíneos, y añadiendo luego por último el triángulo final.

Desde un principio observamos, al verificar estas operaciones, que la suma de las áreas parciales que tienen la misma dimensión a dé por resultado

$$S' = a \left(y_1 + y_2 + \dots + y_{n-1} + \frac{y_n}{2} \right) = a \frac{y_1}{2} + a \frac{y_1 + y_2}{2} + \dots + a \frac{y_{n-1} + y_n}{2}$$

(1) En los aforos directos es más exacto determinar el caudal que pasa por cada tramo del perfil.

de modo que si el último triángulo tuviese idéntica base a que los tramos anteriores, la fórmula de la integración sería sencillamente

$$S = a (y_1 + y_2 + \dots + y_n)$$

ó bien llamando H la suma de las cotas de agua

$$S = a H$$

fuese cualquiera el número de partes iguales.

De consiguiente, lo más indicado es dividir el ancho del río en el número exacto que convenga de tramos de idéntica longitud, aunque cada uno de ellos no resulte cantidad entera de metros, y así se obtiene simplemente, mediante una suma y un producto, siempre breve, el área deseada.

Quizá á primera vista este procedimiento parezca menos fácil y rápido que el usual; pero en la práctica resulta más sencillo y cómodo que él y permite asimismo resolver el problema de medición de un terreno de linde curvo irregular (para lo que no existe procedimiento directo) con tanta aproximación como se quiera, sin precisión de dibujar su plano, ni perjuicio de quedar falto de los datos suficientes para hacerlo, á todo esto, no requiriendo más que una cinta métrica, sin necesidad de instrumento topográfico alguno (1).

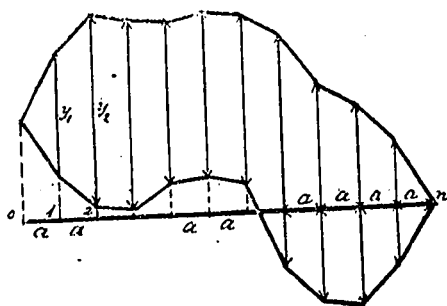


Fig. 5.ª

Entonces, como la base es siempre arbitraria, se puede adoptar para tal la secante del contorno que más convenga (fig. 5.ª), no sólo por su dirección, sino también si es posible, porque su longitud sea un múltiplo sencillo del espaciamiento más oportuno entre las ordenadas; de modo que, deducida la suma de éstas, se obtenga inmediatamente la superficie buscada.

En la práctica basta que sean sensiblemente rectilíneas, las partes del perímetro comprendidas entre dos ordenadas consecutivas, sin que una sola pueda dejarse de considerar como recta.

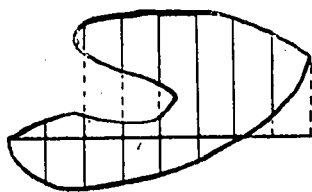


Fig. 6.ª

La libertad para escoger la base es tal que nada importa sea interior ó externa á la figura, ó que quede alternativamente dentro y fuera de aquélla, ni aun tampoco que

(1) También permite superficial pronto y sin planímetro, un perfil transversal dibujado en papel cuadrulado.

una misma ordenada tenga dos trozos en la superficie propuestas (siquiera deba evitarse), conforme indica el esquema adjunto (fig. 6.ª).

La fórmula nunca se altera,

$$S = a (y_1 + y_2 + \dots + y_n)$$

y en definitiva este método que corresponde á la integración por diferencias finitas de la conocida expresión

$$\int y dx$$

equivale á sustituir la línea curva continua del perímetro por un escalonado (fig. 7.ª) que, cuanto más numeroso sea, mayor aproximación ofrece con el contorno real y verdadero.

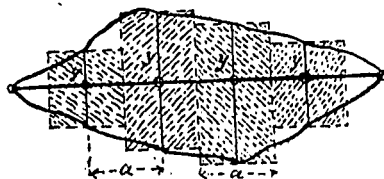


Fig. 7.ª

Como demuestra la propia figura 7.ª, la verdadera causa de error consiste en la pequeña porción de la superficie total que á cada extremo de la base se despreja, puesto que en las restantes áreas parciales existe bastante compensación entre las efectivas y las calculadas. Pero fácilmente es esto subsanable teniendo cuidado de dejar media división ($\frac{a}{2}$) al principio y al fin del eje de las abscisas, según indica la figura 8.ª

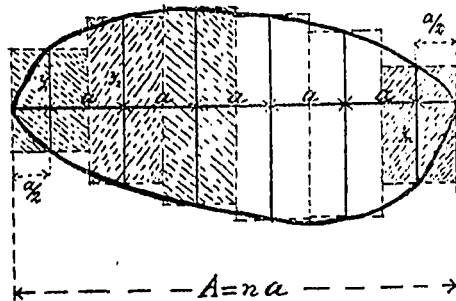


Fig. 8.ª

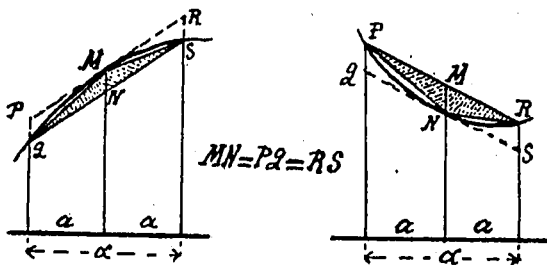
Se observará que entonces es cuando verdaderamente entrarán n ordenadas en la fórmula del área, si se ha adoptado para separación entre ellas la n ésima parte de la longitud de la base A .

El error podrá así ser por exceso, pero resultará desde luego menor que antes, siempre que se trate de contornos convexos.

Para el mecanismo y organización del trabajo de campo es ventajoso hacer que una vez estacados los extremos de las normales, se midan éstas á continuación unas de otras, como en las mediciones á partir de un origen y no por longitudes parciales, con el fin de evitar errores sucesivos y hasta la adición de las ordenadas, y otra regla práctica es forzar la última cifra decimal en el cociente de dividir la base por el número conveniente de partes que en ella sea oportuno hacer, cuando no sea posible que resulte entero, teniendo en cuenta que lo más frecuente es ob-

tener el área aproximada por defecto, cuando no se deja en los extremos las semiabscisas $\frac{a}{2}$.

Es fácil hallar un límite del error que con este sistema puede cometerse. Para buscarlo es suficiente considerar los adjuntos croquis (fig. 9.^a), los cuales revelan que si después de obtenida una primera aproximación del área mediante una abscisa a un tanto grande, repetimos la operación duplicando el número de ordenadas, la diferencia entre el resultado de ambas cuadraturas, es muy superior al límite máximo del error cometido aceptando el área dada por la segunda, que es naturalmente la más exacta de ellas.

Fig. 9.^a

Aunque se comprende que el método indicado sólo es aplicable al caso de una figura irregular y curvilínea, en donde cualquiera otro que se emplee, nunca ha de dar resultados más exactos, presentaremos como ejemplo la determinación del área limitada por una recta normal y tangente respectivamente á dos cuadrantes de circunferencia, uno cóncavo y otro convexo.

Supondremos que sea de 10 metros el radio de estas curvas circulares y que se acepta, como aproximación, dividir la base en partes de un metro.

Los valores de las ordenadas son:

$$\begin{array}{llll} y_1 = 4^m36 & y_2 = 5^m99 & y_3 = 7^m13 & y_4 = 8^m00 \\ y_5 = 8^m66 & y_6 = 9^m16 & y_7 = 9^m54 & y_8 = 9^m80 \\ y_9 = 9^m95 & y_{10} = 10^m00 & y_{11} = 5^m64 & y_{12} = 4^m01 \\ y_{13} = 2^m87 & y_{14} = 2^m00 & y_{15} = 1^m34 & y_{16} = 0^m84 \\ y_{17} = 0^m46 & y_{18} = 0^m20 & y_{19} = 0^m05; & a = 1^m00 \end{array}$$

y de consiguiente el área

$$S = a (y_1 + y_2 + \dots + y_{19}) = 1^m00 \times 100^m00 = 100^m00.$$

Si en lugar de medir las ordenadas hubiésemos calculado la superficie geoméricamente, se tendría.

$$S = \frac{\pi r^2}{4} + r^2 - \frac{\pi r^2}{4} = r^2 = (10)^2 = 100^m00,$$

conforme se vislumbra á primera vista, que equivale al cuadrado de 10 metros de lado.

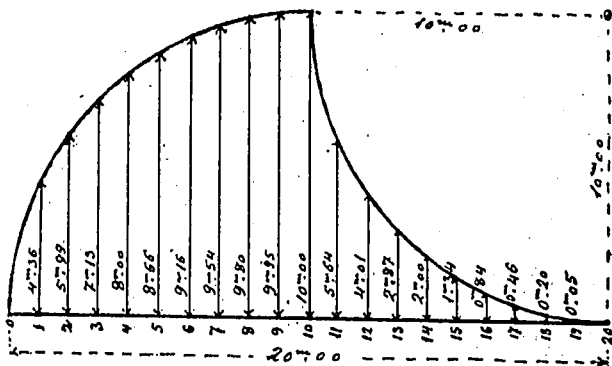


Fig. 10.

Claro es que en este caso el método da un resultado exacto, por compensación de los errores en la parte convexa y cóncava del perfil; anulación del error que no ocurriría de tener el perímetro su curvatura en idéntico sentido en la mayoría de su contorno. En semejante hipótesis, lo más indicado es el procedimiento de dividir la base de modo que quede una semifración de ella $\frac{a}{2}$ en cada uno de sus extremos. Y conste que la mencionada subdivisión en partes iguales, sobre todo adoptando un número par, es sencillísima de realizar sobre el terreno por los dobleces de un hilo fuerte.

Para final de esta nota, sobrado larga relativamente á su escasa importancia, debe advertirse que tratándose de cuestión tan elemental, no se pretende haber expuesto sistema alguno nuevo de superficiar, sino llamar la atención sobre un mero detalle curioso, quizá aprovechable en determinadas ocasiones.

ENRIQUE G. GRANDA.

Revista de las principales publicaciones técnicas.

La Exposición universal de 1911 en Turín y en Roma.

En el mes de Abril próximo se abrirá en Turín y en Roma una Exposición universal, cuya fecha se ha fijado en conmemoración del cincuentenario de la declaración de la unidad italiana. Las secciones relativas á la industria, á las artes mecánicas y á las ciencias se reunirán en Turín, en tanto que la Exposición de Bellas Artes y de Arqueología se verificará en Roma.

La Exposición de Turín tendrá una importancia excepcional. Mientras que la última Exposición de Milán, verificada en 1906 para celebrar la apertura del túnel del Simplón, fué más especialmente consagrada á los medios de transporte, la nueva Exposición de Turín y de Roma será verdaderamente universal y agrupará todas las industrias. Tiene por objeto, como la de Milán, poner de manifiesto los progresos realizados desde hace algunos años por la industria italiana y comparada con la de otros países.

Le Génie Civil, del 25 de Febrero, publica un artículo sobre este asunto y de él hacemos un resumen en el presente.

La idea primera de la Exposición se debe á las Municipalidades de Turín y de Roma, que la han colocado bajo el alto patronato del Rey de Italia. Una Comisión ejecutiva, cuyo Presidente honorario es el Duque de Aosta y el efectivo el Sr. Tomaso Villa, está encargada de la organización de la Exposición de Turín. Los fondos necesarios para la construcción de la Exposición, que llegan á la suma de 20 millones de liras, han sido suministrados: por suscripción de bonos reembolsables sobre los fondos disponibles después de la liquidación de la Exposición, por el producto de una lotería autorizada desde 1908, y, en fin, por subvenciones del Estado, de la Municipalidad de Turín, de la Comisión de la Exposición de Turín de 1898, de la provincia de Turín, etc.

La Exposición comprende 26 grupos, divididos cada uno en varias secciones. En todas partes, donde sea posible, estarán en movimiento las máquinas expuestas. Una estación central de gran