

REVISTA DE OBRAS PÚBLICAS

PUBLICACION TECNICA DEL CUERPO DE INGENIEROS DE CAMINOS, CANALES Y PUERTOS

DIRECTOR

D. MANUEL MALUQUER Y SALVADOR

COLABORADORES

LOS INGENIEROS DE CAMINOS, CANALES Y PUERTOS

SE PUBLICA LOS JUEVES

Dirección y Administración: Plaza de Oriente, 6, primero derecha.

CONSTRUCCIONES DE HORMIGÓN ARMADO

Volumen en 8.º, de 312 páginas, con 90 figuras intercaladas, gráficos y tablas numéricas, publicado por **D. Juan Manuel de Zafra**, Ingeniero del Cuerpo Nacional de Caminos, Canales y Puertos, Profesor de dicha asignatura y de la de Puertos y Señales marítimas en la Escuela especial del Cuerpo.—Precio de la obra, 12,50 posetas en Madrid y 18 en provincias.

El rapidísimo desarrollo del hormigón armado y su aplicación, cada vez más racional y feliz, á toda clase de construcciones, hacen que su conocimiento sea hoy verdaderamente imprescindible para los Ingenieros y Arquitectos.

Muchos desdeñan ese material, creyendo que su manejo es, como en un tiempo, puramente empírico y rutinario; otros, con mejor criterio, reconocen sus innegables ventajas, pero rehuyen su uso, por no satisfacerles los procedimientos de cálculo más divulgados y por falta de tiempo, ó de ánimo, para estudiar el problema á fondo.

Uno de los mayores inconvenientes del hormigón armado es su misma aparente sencillez. Los aficionados que en posesión de unas cuantas fórmulas recogidas aquí y allá, particularmente en algunos, desde este punto de vista dañosísimos, folletos de propaganda, se lanzan á construir, seducidos por esa sencillez (que realmente es una *difícil facilidad*), son, en general, los peores enemigos del hormigón armado.

Los que racionalmente repugnan seguir ese camino y tratan de estudiar bien el cálculo de ese material, retroceden las más de las veces. No existe, que sepamos, un libro tal, cual el Ingeniero ó el Arquitecto, hombres que disponen de poco tiempo, necesitan para aprender lo que *estrictamente* debe ser aprendido, lo que *inmediatamente* sirve para su aplicación, con plena confianza, sin titubeos, á los problemas constructivos que con premura tienen que resolver.

En la exposición de las constantes físicas, de las cualidades específicas del hormigón armado, la mayor parte de los autores se limitan á relatar series de experimentos, á citar numerosas evaluaciones numéricas, sin llegar á lo que el constructor necesita. *Lo que de un modo seguro ha de servir en la práctica.* Esto es lo que ó no aparece en absoluto en medio del cúmulo de hechos y números, muchas veces contradictorios, citados; ó aparece de un modo indeciso, sujeto á interpretaciones.

En los procedimientos de cálculo sucede cosa análoga.

En muchos libros se exponen varios métodos, y queda el lector, falto de tiempo y de ánimo para hacer un estudio crítico y decidirse racionalmente por alguno, sin saber cuál escoger. Otros autores desarrollan un solo método, pero con falta de unidad de criterio, de un modo en unas cosas minucioso y en otras descuidado; se pasa á la ligera, por ejemplo, sobre formas de trabajo tan importantes como la flexión compuesta ó como la acción de las cargas tangenciales.

Falta, además de la unidad de criterio, el carácter de *inmediata aplicabilidad* á la práctica; el aclarar y discutir con ejemplos las condiciones de indeterminación, generales en todo problema constructivo, y el dar la norma racional y práctica para salvarlas.

Si las obras didácticas no llenan, á menos de dedicarles largo tiempo y de completar unas con otras, las necesidades del Ingeniero, más le desorientan y confunden las Memorias, monografías, informes, que en número grandísimo, pero con variedad casi tan grande en criterio, notaciones, etc., existen.

Hay, esparcida en libros y revistas, una verdadera riqueza de estudios sobre el hormigón armado; se conocen, en suma, numerosos valores particulares, pero falta la *integral general*, precisamente la que interesa al Ingeniero.

Esa integral, una compilación sucinta, clara y precisa de cuanto hasta el día se sabe de un modo indiscutible, es la que el autor ha tratado de realizar, para reunir cuanto necesita el Ingeniero ó Arquitecto que en poco tiempo quiere adquirir un sólido conocimiento del hormigón armado y llegar á manejarlo con la misma seguridad que otro cualquier material constructivo.

Si malo es el puro empirismo, peor quizá es, para un constructor, la pura teoría. De las *fórmulas-recetas* de los primeros tiempos, y que aún conservan sus devotos, pasan algunos al extremo opuesto, sacando al análisis matemático de su verdadero papel de instrumento, preciosísimo, mas al fin *mero instrumento* para el Ingeniero, y olvidando, preocupados con el deseo de apreciar unidades de ínfimo orden, que la indecisión debida á las hipótesis fundamentales afecta á unidades de orden harto más importante.

De uno y otro extremo precisa huir para que el estudio del hormigón armado tenga un carácter verdaderamente ingenieril. Ese material es, hoy día, ni peor ni mejor conocido que los demás; su cálculo no es ni más ni menos

exacto que el de las maderas, metales y fábricas; su Mecánica adolece de los mismos defectos y necesita de los mismos postulados y de idénticas correcciones experimentales.

Los principios generales de Mecánica, como base racional; los resultados prácticos del Laboratorio y de las obras, como base experimental; el análisis, como medio de concordar una y otra, que mutuamente se completan y contrastan; deben estar en la justa ponderación necesaria para el fin perseguido; estudiar, proyectar y construir obras de hormigón armado tan fácil y seguramente como de otro material.

A tal norma se ha ajustado el autor, y, al caberle la honra de inaugurar en España la enseñanza oficial del hormigón armado, en asignatura independiente, su principal objetivo ha sido ahorrar á sus alumnos y, más en general, á los Ingenieros que hasta ahora no hayan conocido bien ese material, el penosísimo trabajo que representa llegar á formar un cuerpo de doctrina, aglomerado y eslabonado de un modo lógico, con unidad de criterio, contrastado por su experiencia personal, adquirida en obras de verdadero empeño.

Cuantos conocen la competencia y relevantes condiciones del autor, nuestro distinguido compañero D. Juan Manuel de Zafra, verán desde luego en su nombre una garantía de acierto por haber conseguido el objeto que se ha propuesto. Sus obras, descritas por distintas revistas técnicas, son conocidas asimismo del extranjero. Ha resumido en su libro, amoldándolo al programa ingenieril que hemos apuntado, sus vastos conocimientos en la materia; de ahí su gran utilidad, que merece nuestros más sinceros plácemes.

En el capítulo I se reseña á grandes rasgos la historia del hormigón armado; se definen las formas constructivas típicas, derivadas de las distintas formas de trabajo que un elemento de obra haya de realizar y se resumen concisamente las características cualidades, ventajosas y desfavorables, del nuevo material, en parangón con las de fábrica y metales.

El capítulo II se dedica al estudio de las constantes físicas del hormigón armado, empezando por definir los caracteres individuales de los materiales separados, las influencias que sobre sus cualidades mecánicas ejercen las calidades, proporciones, manipulación de los elementos componentes y los agentes exteriores, formas y demás variables que pueden intervenir. Se precisan y determinan las condiciones prácticas que dentro del hormigón armado se requieren.

Se estudian metódica y detalladamente todas las manifestaciones de la elasticidad longitudinal y transversal del hormigón sólo y del mismo asociado con las armaduras, el papel de éstas y el importantísimo de la mutua adherencia.

Se concretan y explican todos los fenómenos observados y se fijan, de una vez para siempre, los valores numéricos, expresión de las diversas constantes físicas, que con toda seguridad deben ser admitidos en la práctica.

El importantísimo fenómeno de las variaciones de volumen resultantes del fraguado y de las alteraciones de estados higrométrico y térmico, se analiza y detalla hasta

llegar á definir de qué modo ha de ser tenido en cuenta en la práctica.

El proceso de las deformaciones elásticas y permanentes; la adaptación del material á sucesivos estados de carga, se resumen razonadamente en las leyes de deformación, que constituyen importantes bases experimentales del cálculo. Y se termina el capítulo completando esas bases con la determinación de los coeficientes de seguridad lógicos y sancionados por la experiencia.

En el capítulo III se sientan las bases del cálculo desde el punto de vista racional, demostrando con rigor el principio de la identidad mecánica entre un sistema heterogéneo y un sólido virtual homogéneo.

Si de un estudio puramente especulativo se tratara, aquí debiera terminar la obra, pues sentadas todas las bases los procedimientos son los corrientes en resistencia de materiales, modificados sólo por determinadas restricciones.

Pero el criterio de inmediata aplicación á la práctica requiere el desarrollo metódico de dichos procedimientos con sus restricciones, para llegar á la finalidad siempre perseguida, definir de un modo preciso y terminante cómo se debe proceder en cada caso.

Se realiza dicho desarrollo paralelamente en dos formas: 1.º, cálculo *deductivo*, para el análisis y averiguación de las cargas que en una obra proyectada ó construída soporta el material; es el del Ingeniero que comprueba ó informa. 2.º, cálculo *inductivo*, para la fijación de todas las dimensiones de una obra que ha de resistir determinadas fuerzas sin que el material soporte cargas superiores á determinados límites; es el del Ingeniero que proyecta.

Dentro del mismo capítulo III se desarrolla, con arreglo al criterio ya sentado, el cálculo de piezas sujetas á cargas uniformes, tracción, ó compresión, detallando cuanto lo merece la importantísima influencia del pandeo.

Cuadros numéricos dan una sencillísima solución del problema inductivo, aclarada con ejemplos concretos.

El capítulo IV se consagra por entero á la flexión sencilla, y comienza por un detallado estudio experimental, del que resulta la comprobación práctica del postulado de Navier y de las leyes de deformación ya antes sentadas. Analizadas las importantes influencias de la cuantía, ó riqueza en armadura, de las sucesivas fases por que pasa la distribución de cargas en uno y otro elemento y de la relación de sus coeficientes de elasticidad, se precisan el valor de esa relación y la fase crítica que en la práctica han de ser considerados.

Planteadas las ecuaciones generales de la flexión y concretadas las fórmulas *deductivas* aplicables á los casos usuales, se completan por un procedimiento gráfico, tan sencillo como general, que permite el cálculo deductivo de las formas más complicadas.

Se aborda de frente el problema del cálculo *inductivo*, reduciendo á una forma única y sencillísima la expresión del momento resistente, cualquiera que sea la distribución de la armadura, forma que, reducida á tablas numéricas y también á un ábaco de líneas isopleas, permite hacer el tanteo, imprescindible por la indeterminación del problema, fácil y rápido.

Y primero en general, después sobre ejemplos numéricos, se razona sobre la influencia de los elementos indeterminados y sobre las condiciones más ventajosas para determinarlos.

De un modo análogo se estudia en el capítulo V la flexión compuesta en sus tres formas de compresión, ó tracción, variable y de compresión y tracción parciales dentro de una sección.

Planteadas las ecuaciones generales y detalladas para el caso usual de la simetría de armaduras, unos gráficos de tercer grado resuelven facilísimamente el de otro modo complicado cálculo deductivo. Y más sencillamente aún, y con la ventaja de ser aplicable á cualquier sección, lo hace un procedimiento gráfico que se desarrolla.

Estudiadas, con las ecuaciones generales, las influencias de la riqueza de armaduras y de la excentricidad de la fuerza actuante, con el paso gradual de las formas de trabajo desde la compresión ó tracción uniformes hasta la flexión sencilla, se plantea y resuelve el cálculo inductivo, aclarado con ejemplos.

La acción de las cargas transversales, poco detallada en la mayor parte de los libros á pesar de su capital importancia en el hormigón armado, se estudia extensamente en el capítulo VI.

Se analiza racional y experimentalmente la manera de actuar y de componerse dichas cargas con las normales para manifestarse en fases sucesivas por las roturas oblicuas del hormigón, obra directa de las cargas moleculares principales.

De la consideración de éstas se deriva el cálculo de las armaduras llamadas secundarias, aunque tan esenciales como las primarias, bien en forma de montantes, bien en la de diagonales, así como los límites de espesor de alma y cabeza en las piezas en T y los de perímetro de las barras primarias.

Demostrada la perfecta asimilación del trabajo del alma al de un sistema en celosía, de la misma consideración de las cargas principales se deriva la racional disposición del alma en los puentes de gran altura en forma calada, celosía en N, Δ y X. El cálculo de la influencia de la torsión y varios ejemplos numéricos, deductivos é inductivos, completan esta parte.

En el capítulo VII se agrupan, después de estudiar las deformaciones, fisuras y evitación de éstas, una porción de asuntos apenas tratados en la mayoría de los libros, derivados de la participación de deformaciones y consecuente repartición de sobrecargas concentradas, por efecto de la cualidad más saliente del hormigón armado, la solidaridad. Se precisan racional y prácticamente las condiciones y cálculo de esa repartición, de la cooperación de forjados y nervios, del trabajo de las placas, y se termina por una serie de observaciones generales respecto al modo de desarrollar los cálculos, á la atención que merece el estudio de los enlaces de los diversos elementos de una obra, y á los límites que, según esos enlaces, deben adoptarse para los valores máximos, base del cálculo.

El hormigón zunchado, forma especial del armado, tiene cualidades individuales singularísimas é importancia sobrada para merecer un capítulo especial, el VIII, en el que se reseñan aquéllas, puestas en parangón con las del material en la forma ya conocida; y después de resumir la detallada experimentación ya existente, se razona su método de cálculo, se establecen fórmulas y cuadros numéricos que con gran sencillez permiten resolver el problema inductivo y se completa con ejemplos.

Tal es, á grandes rasgos, el plan de la primera parte, titulada «Mecánica del hormigón armado». En ella tiene el In-

geniero ó Arquitecto lo necesario y suficiente para estudiar cualquier obra, por complicada que sea, de hormigón armado.

Complemento, muy útil, será la segunda parte, que con el título de «Aplicaciones del hormigón armado» publicará dentro de pocos meses, según nuestras noticias, el Sr. Zafra, y que será, realmente, un manual muy extenso y detallado, en el que metódicamente se irán estudiando todos los tipos de obras y elementos de éstas hasta ahora ejecutados, ó realizables, con ese material. En cada tipo se estudiarán sus condiciones generales, influencias de las diversas dimensiones y proporciones más convenientes para éstas, cálculo detallado en general y aclarado con un ejemplo numérico y con figuras en proyecciones, con todo el detalle necesario para poder servir de modelo.

Los tipos estudiados serán los siguientes:

Placas de cimentación. Pilotes. Pilonos. Pozos. Cajones de cimentación. Cajones flotantes. Barcazas.

Pilares. Muros. Suelos. Cubiertas. Bóvedas. Cúpulas. Escaleras. Voladizos.

Muros de sostenimiento. Estribos. Pilas. Puentes de pórtico. Puentes rectos. Puentes de celosía. Puentes de arco.

Muelles. Defensa de márgenes. Esclusas. Diques. Cargaderos. Depósitos. Silos.

Canalizaciones. Túneles. Presas. Depósitos.

Postes. Chimeneas. Torres. Faros.

Traviesas. Consolidación de obras metálicas. Fábricas armadas y metal hormigonado.

Un capítulo especial resumirá detalladamente los siguientes conceptos:

Redacción de proyectos. Materiales. Medios auxiliares. Mano de obra. Organización. Decoración del hormigón armado. Conservación y reparación.

La edición de la obra reseñada nada deja que desear; impresión clara, tipo nuevo, buen papel y esmerada corrección.

* *

A continuación publicamos una parte de uno de los capítulos de la obra, y en otro número lo haremos de otros dos para que nuestros lectores puedan apreciar mejor el verdadero carácter que tiene.

El escogido hoy es el capítulo III en su epígrafe 2.º, que trata del cálculo de piezas sujetas á compresión uniforme.

En él se empieza por estudiar la influencia de las armaduras transversal y longitudinal, por separado, primero racional, después experimentalmente y se formulan los coeficientes de amplificación virtual que en la práctica corresponden á aquéllas.

Se plantea el estudio del pandeo y se concreta la expresión general de la resistencia, habidas en cuenta todas las influencias favorables y desfavorables. Dos cuadros numéricos, resumen de lo ya razonado, resuelven completamente el cálculo deductivo é inductivo.

Se elimina la indeterminación del problema por la condición de economía, lo que se corrobora con el cálculo numérico de dos pilares de la misma altura y presión, proyectados con hormigones de 300 y 400 kilos de cemento por metro cúbico.

Se completa el estudio práctico por la fijación de los coeficientes de seguridad especiales que involucran los posibles descentramientos de la presión axial. Por último, se

pone en evidencia la identidad absoluta de las expresiones racional y experimental de la influencia del pandeo.

He aquí el texto:

COMPRESIÓN UNIFORME

Las piezas destinadas á soportar presión dirigida según su eje, tienen, generalmente, dos planos de simetría, tanto en el hormigón como en la armadura, distribuyéndose ésta en dos órdenes de barras: primarias, longitudinales, y secundarias, transversales.

Las primeras forman el sólido heterogéneo con el hormigón, cuya elasticidad y resistencia no modifican; suman, como hemos visto, sus secciones, amplificadas en la relación $\frac{E_a}{E_h}$, á la de aquél.

Las armaduras transversales contrarrestan el henchimiento lateral del hormigón y aumentan su resistencia, haciéndole susceptible de soportar, á igual deformación longitudinal, mayor carga; amplifican, virtualmente, su E_h .

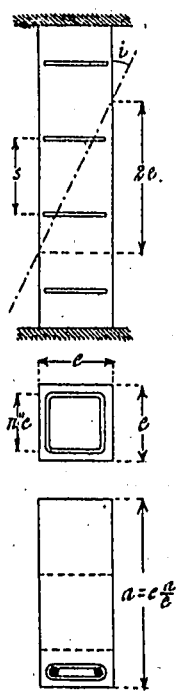


Fig. 28.

La rotura de un prisma vertical de hormigón solo, de escasa altura, de ancho a y espesor $e < a$, tiene lugar siempre según superficies, prácticamente planas, inclinadas un ángulo i con las caras a (fig. 28). El estudio de la sección rectangular, ae , se reduce, por tanto, al de la cuadrada, e^2 , bajo una presión total, $P \times \frac{e}{a}$, puesto que la mínima dimensión, e , es la que determina la orientación de la rotura.

La inclinación i es debida á que por el henchimiento transversal y por el rozamiento de las bases del prisma sobre los platillos de la máquina, los esfuerzos principales de tensión resultan oblicuos á la pieza, formando con la horizontal el ángulo i , cuya tangente viene á ser en general 0,50. El prisma se rompe *por tensión*.

Si se suprime aquel rozamiento, dichos esfuerzos son horizontales, y el prisma se rompe según planos verticales, siempre *por tensión*.

En el momento de la rotura, las fuerzas que actúan en el plano son: la componente $P \cos i$, de una parte; la cohesión ó resistencia al desgarramiento según el plano, $H_{ra} \times \frac{e^2}{\sin i}$, y el rozamiento provocado por la componente normal, $P \sin i \times \rho$, de otra; luego

$$P \cos i = H_{ra} \frac{e^2}{\sin i} + P \sin i \times \rho;$$

que, para el mínimo de P , conduce á

$$\operatorname{tg} i = -\rho + \sqrt{1 + \rho^2};$$

valor independiente de H_{ra} . Para el valor experimental del rozamiento, $\rho = 0,75$, resulta:

$$\operatorname{tg} i = 0,50; H_{ra} = \frac{1}{4} \frac{P}{e^2} = \frac{H_r}{4}$$

H_r es la carga unitaria para la que los prismas de regular altura se rompen, distinta de H_{ra} , carga de rotura en cubos.

Armamos ese prisma de hormigón con cercos metálicos, espaciados s y de sección α'' cada uno. El plano de rotura cortará $\frac{2e}{s}$ zunchos, y la suma de secciones será, en total, $2 \times \frac{2e}{s} \times \frac{\alpha''}{\cos i}$. Como su carga de rotura transversal A_d , es muy grande, aun seccionado el hormigón no se producirá el rozamiento en el plano de rotura y el equilibrio estricto, á punto de producirse ésta, da:

$$P \cos i = \frac{H_r}{4} \times \frac{e}{\sin i} + A_d \times 2 \times \frac{2e}{s} \frac{\alpha''}{\cos i} = \\ = \frac{H_r}{4} \times \frac{e^2}{\sin i} + 4 A_d \frac{e}{s} \frac{\alpha''}{\cos i}.$$

Prescindiendo del rozamiento en el prisma sin armar, para que haya paridad, resulta que los cercos amplifican la componente de rotura, $P \cos i$, en:

$$1 + \frac{4 A_d e \alpha''}{s \cos i \frac{H_r e^2}{\sin i}} = 1 + 16 \operatorname{tg} i \times \frac{A_d e \alpha''}{H_r s e^2} = \\ = 1 + 16 \frac{A_d}{H_r} \frac{\alpha''}{s e} \operatorname{tg} i.$$

Si el lado de los cercos es $n''e$, ($n'' < 1$), su volumen, en 100 centímetros de pieza, resulta:

$$v = 4 \alpha'' \times n'' e \times \frac{100}{s} = 400 \alpha'' \times n'' \frac{e}{s};$$

y su relación al volumen de hormigón, $V = 100 e^2$, es lo que llamaremos siempre *cuantía*,

$$q'' = \frac{v}{V} = 4 n'' \times \frac{\alpha''}{s e}. \quad (26)$$

La ampliación de resistencia en función de la cuantía y para $\operatorname{tg} i = 0,50$, resulta expresada por:

$$1 + 8 \frac{A_d}{H_r} \times \frac{q''}{4 n''} = 1 + 2 \frac{A_d}{n'' H_r} \times q'' = 1 + r'' q''. \quad (27)$$

La experimentación confirma plenamente el análisis anterior. El coeficiente, r'' , de refuerzo debido á la armadura secundaria, es tanto mayor, dentro de ciertos límites, cuanto menor es la separación s , entre cercos. Lo que es lógico, pues cuanto más uniformemente se reparta el metal, más uniforme será su beneficiosa acción de contrarrestar el henchimiento lateral, causa de los esfuerzos principales de tracción.

La Comisión francesa fija, como resultado de su prolija experimentación, los valores límites de r'' . Modificándolos ligeramente para darles forma más práctica, admitiremos, para diversos valores de la separación s , ó del número de cercos por metro lineal, $\frac{100}{s} = m$, para:

$s =$	e	$\frac{5}{6} e$	$\frac{2}{3} e$	$\frac{1}{2} e$	$\frac{1}{3} e$
$m =$	$\frac{100}{e}$	$\frac{120}{e}$	$\frac{150}{e}$	$\frac{200}{e}$	$\frac{300}{e}$
$r'' =$	8	10	12	14	16

(28)

suponiendo la relación, n'' , del lado del cerco al del cuadrado, de 0,70 á 0,80.

A partir de la separación $s = \frac{1}{3} e$, el efecto de la armadura secundaria es cada vez mayor, sobre todo, si los cercos se hacen circulares: se entra en el *hormigón zunchado*, de propiedades muy características, que oportunamente estudiaremos.

Por suma de un número, $\frac{a}{e}$, de cuadrados, e^2 , se aplica lo dicho á las secciones rectangulares, ae . Como el peligro de rotura se presenta mucho antes en el sentido e , la disposición más económica de los cercos, α'' , es la indicada en la parte inferior (fig. 28), correspondiendo á cada cuadrado elemental dos cercos. La cuantía está expresada entonces por

$$q'' = \frac{2 \frac{a}{e} \times 4 \alpha'' \times n'' e \times \frac{100 s}{e}}{100 a e} = 8 n'' \times \frac{\alpha''}{se} \quad (29)$$

En realidad, la cuantía total es mayor, pues se necesitan barras paralelas á a para la buena trabazón del esqueleto, pero pueden estar más espaciadas que las verdaderamente eficaces.

Introduzcamos ahora una armadura longitudinal, de sección total α' y cuantía $\frac{\alpha'}{h} = q'$. La sección del sólido virtual, equivalente á las dos piezas h y α' , es:

$$l = h + \frac{E_a}{E_h} \alpha' = h + r \times q' h = h (1 + r q'). \quad (30)$$

Rigurosamente, h debe ser la sección estricta del hormigón y q' la relación $\frac{\alpha'}{h + \alpha'}$. Como ésta es siempre muy pequeña, se toma prácticamente h como la sección total de la pieza, y $q' = \frac{\alpha'}{h}$.

La experimentación confirma en general la fórmula anterior, racionalmente establecida, pero la corrige, haciendo palpable la influencia de la distribución de una misma área, α' , en pocas ó muchas barras, gruesas ó delgadas, cuya soldadura con el hormigón reparta menos ó más uniformemente su acción de refuerzo. La teoría no tiene en cuenta ese elemento, y de aquí la necesidad de sustituir al número r , que siempre significará la relación de coeficientes de elasticidad; otro número, r' , experimental, que englobe la influencia de $\frac{E_a}{E_h}$, mas la del modo de repartición de α' .

Sobre los resultados obtenidos por la Comisión francesa, admitiremos, con distintos diámetros, d , de las barras, para

$$\frac{e}{d} = 10 \text{ ó menos, } 12,5, 15, 17,5, 20 \text{ ó más;}$$

$$r' = 8, 10, 12, 14, 16. \quad (31)$$

Si la carga admisible, prácticamente, en el hormigón aislado es H_c , en la pieza con armadura secundaria de cuantía q'' admitiremos una *carga virtual* $H_c (1 + r'' q'')$. Su efecto, habida en cuenta la mejora de resistencia por el contrarresto del henchimiento lateral, es idéntico al de H_c .

Análogamente á la sección geométrica, h , sustituiremos una *sección virtual*, $h (1 + r' q')$, cuyo trabajo molecular será idéntico al de h .

La presión total admisible sobre la pieza será, por tanto,

$$P = H_c (1 + r'' q'') \times h (1 + r' q'),$$

producto de la carga virtual por la sección virtual.

La carga $\frac{P}{h}$ será la *aparente* de la pieza; las real y efectivamente sufridas serán:

$$H = \frac{P}{h} \times \frac{1}{(1 + r'' q'') (1 + r' q')} \quad (33)$$

$$A = \frac{P}{h} \times \frac{r'}{(1 + r'' q'') (1 + r' q')} \quad (34)$$

Estas dos ecuaciones, con el cuadro resumen (35), que á continuación define los coeficientes r' r'' , suponiendo á n'' el valor 0,75, permiten deducir, en cualquier pieza, conocidos P , h , q' , q'' , d , los valores de H y A , cargas reales del hormigón y de la armadura.

(35)

s	d	r'	r''	q''	α''
1,000 e	0,100 e	8	8	3,000 $\frac{\alpha''}{e^2}$	0,333 $q'' e^2$
0,817 »	0,080 »	10	10	3,600 »	0,278 »
0,667 »	0,067 »	12	12	4,500 »	0,222 »
0,500 »	0,057 »	14	14	6,000 »	0,167 »
0,333 »	0,050 »	16	16	9,000 »	0,111 »

La flexión lateral ó pandeo se presenta en dos formas: parcial, en las barras primarias, y total, en el conjunto de la pieza. Sobreviene la primera, ó por insuficiencia de armaduras secundarias ó por efecto de una percusión muy violenta; la segunda, cuando la presión excede de un cierto límite dependiente de la *esbeltez mecánica* de la pieza $\frac{l}{\rho}$, ó lo que es igual, de la *esbeltez geométrica* $\frac{l}{e}$.

La fórmula de Euler

$$(P_p = H_p l) = k \pi^2 \frac{E I}{l^2} \quad (36)$$

en la que k vale $\frac{1}{4}$, 1, 2, 4, según las cuatro formas de empujamiento ó apoyo de los extremos, es rigurosa, siempre que los valores de E sean los correlativos á H , al iniciarse el pandeo. P_p , H_p , son la presión y carga críticas en ese momento.

La ley de Ritter:

$$H = H_{rc} (1 - e - 1.000 \lambda) \quad (37)$$

da:

$$E_h = \frac{d H}{d \lambda} = 1.000 (H_{rc} - H). \quad (37)$$

La carga unitaria crítica es:

$$H_p = k \pi^2 \frac{E_h I}{l^2 l}, \quad (39)$$

en la que podemos sustituir, exagerando en sentido desfavorable $\frac{I}{l}$, cuyo valor medio, para $r' = 12$, $n'' = 0,8$, es:

$$\rho^2 = \frac{e^2}{12} \times \frac{1 + 23,04 q'}{1 + 12 q'} \quad (40)$$

por $\frac{I_h}{h} = \rho^2 = \frac{e^2}{12}$, siempre menor, 1,052 veces para $q' = 0,005$ y 1,099 para 0,010. Resulta así:

$$H_p = k \times 9.869 \times 1.000 (H_{rc} - H_p) \frac{\rho^2 h}{l}$$

que se reduce á:

$$H_p \left(1 + k \times 9.869 \frac{\rho^2 h}{l^2} \right) = k \times 9.869 \frac{\rho^2 h}{l^2} H_{rc}$$

$$H_p = \frac{H_{rc}}{1 + k \times 9.869 \frac{\rho^2 h}{l^2}};$$

ó bien:

$$H_p = \frac{H_{rc}}{1 + \frac{1}{10.000 h} \frac{l^2}{\rho^2 h}} = \frac{H_{rc}}{1 + f \frac{l^2}{\rho^2 h}} \quad (41)$$

en la que el factor f es, para las cuatro formas de apoyo ó empo-tramiento 0,000 40, 0,000 10, 0,000 05 y 0,000 025.

Tal es la carga unitaria crítica, para la que se inicia el pandeo; la práctica es lógico hacerla 0,28 de aquélla, con el mismo coeficiente de seguridad, ó sea

$$H_{cp} = \frac{0,28 H_{rc}}{1 + f \frac{l^2}{\rho^2 h}} = \frac{H_c}{1 + f \frac{l^2}{\rho^2 h}} \quad (42)$$

La presión total admisible será, en definitiva, contando con todas las influencias favorables y desfavorables:

$$H_{cp} (1 + r'' q'') \times (1 + r' q') h = H_c \frac{(1 + r'' q'') (1 + r' q')}{1 + f \frac{l^2}{\rho^2 h}} h = P \quad (43)$$

La amplificación de H_{cp} es legítima, porque si el cálculo se refiere al hormigón solo, es por razón de sencillez, sustituyendo el radio de giro total, ρ , por ρ_h , lo que implica una minoración de H_{cp} , bastante mayor que la mayoración correspondiente á $(1 + r'' q'') (1 + r' q')$.

La tabla siguiente (44) da para distintos valores de

$$\frac{l}{e} = \frac{l}{\rho \sqrt{12}}, \text{ los de } f = \frac{1}{10.000 h} \times \frac{l^2}{\rho^2} \text{ para } h = 1;$$

las reducciones:

$$\frac{0,28}{1 + f \frac{l^2}{\rho^2}};$$

y las cargas, H_{cp} , relativas á hormigones de 300 y 400 kilogramos por metro cúbico.

$$h = 1$$

$\frac{l}{e}$	$\frac{l^2}{\rho^2}$	$1 + f \frac{l^2}{\rho^2}$	$\frac{0,28}{1 + f \frac{l^2}{\rho^2}}$	H_{cp}		$H_{cp} \times \frac{e^2}{l^2}$	
				(300)	(400)	(300)	(400)
8	768	1,08	0,259	41,4	51,8	0,6471	0,8096
10	1.200	1,12	0,250	40,0	50,0	0,4000	0,5000
12	1.728	1,17	0,239	38,2	47,8	0,2652	0,3317
14	2.352	1,24	0,226	36,2	45,2	0,1846	0,2305
16	3.072	1,31	0,214	34,2	42,8	0,1337	0,1673
18	3.888	1,39	0,201	32,2	40,2	0,0995	0,1242
20	4.800	1,48	0,189	30,2	37,8	0,0755	0,0945
25	7.500	1,75	0,160	25,6	32,0	0,0410	0,0512
30	10.800	2,08	0,135	21,6	27,0	0,0240	0,0300
35	14.700	2,47	0,113	18,1	22,6	0,0147	0,0183
40	19.200	2,92	0,096	15,4	19,2	0,0096	0,0120

En una comprobación es fácil deducir la carga aparente,

$$\frac{P}{h}, \text{ y la real, } \frac{P}{h} \times \frac{1}{(1 + r' q') \times (1 + r'' q'')};$$

y comprobar si esta última es

$$\leq \frac{H_c}{1 + f \frac{l^2}{\rho^2}} = H_{cp}.$$

La carga real de la armadura primaria será r' veces mayor que la del hormigón; es decir, como límite, $16 \times 45 = 720$, ó $16 \times 56 = 896$ kilogramos por centímetro cuadrado, en hormigones de 300 y 400 kilogramos por metro cúbico.

Suponer, como Hennebique, $H = 25$ y $A = 1.000$ kilogramos por centímetro cuadrado, simultáneamente, y que la influencia del pandeo es nula en la práctica, es completamente irracional. A es r' veces mayor que H , á lo sumo 16, nunca 40, como sería preciso para que tales valores fueran los supuestos.

El problema inverso, proyectar una pieza de longitud l y presión total P , es, como todos sus análogos, indeterminado; se desconocen h y, por tanto, e y H_{cp} ; q' y q'' , y, por tanto, d , r' , r'' .

Las condiciones del problema fijan la forma de la sección; si ha de ser rectangular, determinan también, por lo menos, aproximadamente, la relación $\frac{a}{e}$ de sus lados, y queda todo reducido, en general, á proyectar una pieza cuadrada para presión total $(P \frac{e}{a})$.

Cualquiera que sea la carga admisible, una sección h equivale en resistencia á otra $a' = \frac{h}{r'}$. La primera cuesta, por metro lineal:

$$\frac{h \text{ (cm)} \times 100}{1.000.000} \times P_h \text{ (ptas./m}^2\text{)} = 0,0001 h P_h;$$

la segunda:

$$a' \text{ (cm)} \times 100 \times 0,0078 \times P_a \text{ (ptas./kg.)} = 0,78 \frac{h}{r'} \times P_a.$$

Para el promedio de r' , 12, la relación de una á otra es

$$\frac{0,78 P_a}{12 \times 0,0001 P_h} 650 = \frac{P_a}{P_h}$$

ó 2,6 para $P_a = 0,40$ y $P_h = 100$.

Las armaduras primarias no resisten económicamente. Conviene reducir q' á lo necesario para la buena ejecución y para dar un cierto aumento de I á la pieza, para lo cual basta 0,005. Análogamente podemos establecer un mínimo económico para $q'' = 0,001$. Podemos fijar también los valores de r' , r'' , con tal de cumplir las condiciones relativas á d y s , definidas por (35) y es lógico imponerse las que dan sus valores máximos, 16. La relación entre la carga aparente y la real, será entonces:

$$\frac{1}{(1 + r' q') (1 + r'' q'')} = \frac{1}{1,080 \times 1,016} = \frac{1}{1,097} = 0,9116.$$

$$e^2 = 0,9116 \frac{P}{H_{cp}}; e = 0,954 \sqrt{\frac{P}{H_{cp}}} \quad (45)$$

Como H_{cp} es desconocida mientras no se determinen e y $\frac{l}{e}$, sería preciso ir tanteando y comprobando por medio del cuadro (44), hasta obtener un e tal que la presión admisible por pandeo, H_{cp} , fuera igual ó algo inferior á la supuesta. Un sencillo artificio evita esos tanteos. Puesto que

$$P = 1,097 H_{cp} \times e^2,$$

$$\frac{P}{l^2} = 1,097 H_{cp} \times \frac{e^2}{l^2}, \quad \text{ó:} \quad H_{cp} \times \frac{e}{l^2} = 0,91 \frac{P}{l}.$$

En el cuadro (44) figuran en las dos últimas columnas los valores de $H_{cp} \times \frac{e^2}{l^2}$ para los hormigones de 300 y 400 kilogramos por metro cúbico y para todos los valores usuales de $\frac{l}{e}$.

Basta calcular $0,91 \frac{P}{l^2}$ (ó en general $\frac{1}{(1 + r' q') (1 + r'' q'')} \times \frac{P}{l^2}$) y buscar, por interpolación, si es preciso, un número $H_{cp} \frac{e}{l^2}$ igual; le corresponderán, directamente, ó interpolando, un valor de H_{cp} y otro de $\frac{l}{e}$, que serán los estrictamente aplicables.

El cuadro se refiere a $k = 1$, es decir, a piezas articuladas en sus extremos. Para aplicarlo a cualquier otro caso, basta efectuar el cálculo para una longitud *virtual* (fig. 29), obtenida multiplicando la real por $\sqrt{\frac{1}{k}}$, puesto que para una misma presión crítica, $k \pi^2 \frac{EI}{l}$, l varía como $\sqrt{\frac{1}{k}}$. Así, para:

Un extremo libre, otro empotrado, $k = \frac{1}{4}$, $l_v = 2l$.

Los dos extremos articulados, $k = 1$, $l_v = l$.

Un extremo empotrado, otro guiado, $k = 2$, $l_v = \frac{l}{\sqrt{2}}$ = 0,707 l .

Los dos extremos empotrados, $k = 4$, $l_v = 0,50 \cdot l$.

Ejemplo: Pilar de 10 metros de altura, empotrado en la base, guiado en la coronación y cargado con 100 toneladas.

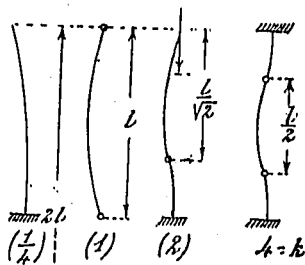


Fig. 29.

Tomaremos, en general, como unidades el centímetro y el kilogramo. La longitud virtual será 707 centímetros, y su cuadrado 500.000. El número $0,91 \frac{P}{l_v^2}$ es 0,182. Si empleamos hormigón de 300 kilogramos por metro cúbico, la esbeltez 14 y la carga 36,2 kilogramos por centímetro cuadrado, corresponden, exactamente casi, con 0,182. Si el hormigón es de 400 kilogramos por metro cúbico, la interpolación da $\frac{l}{e} = 15,50$, y $H_{cp} = 43,3$ kilogramos por centímetro cuadrado.

Resultan así respectivamente:

$e = 50$ cm.
 $e^2 = 2.500$ cm².
 $\alpha' = 12,50$ cm².
 $d \leq 2,5$ cm.
 $4 \bullet$ de 2,0 = 12,56 cm².
 $\alpha'' = 0,28$ cm².
 $1 \bullet$ de 0,6 = 0,28 cm².
 $s = 16,7$ cm.
 $m = 6$ cercos en m. 1.
 $\frac{P}{h} = 40,0$ kg./cm².
 $H = 36,4$ »
 $A = 582$ »
 $V = 0,2500$ m³.
 $v = 0,0015$ »
 $p = 12,0$ kg.

$e = 46$ cm.
 $e^2 = 2.116$ cm².
 $\alpha' = 10,58$ cm².
 $d \leq 2,3$ cm.
 $4 \bullet$ de 1,8 = 10,20 cm².
 $\alpha'' = 0,23$ cm².
 $1 \bullet$ de 0,55 = 0,24 cm².
 $s = 15,3$ cm.
 $m = 6,5$ cercos en m. 1.
 $\frac{P}{h} = 47,2$ kg /cm².
 $H = 42,9$ »
 $A = 686$ »
 $V = 0,2116$ m³.
 $v = 0,0013$ »
 $p = 10,4$ kg.

Los valores H y siguientes están deducidos suponiendo $q' = 0,005$ y $q'' = 0,001$, porque las secciones calculadas coinciden prácticamente con las correspondientes a las barras y alambre escogidos. Muchas veces, por no tener en una obra demasiados tipos de barras, hay que adoptar secciones efectivas mayores que α' y α'' ; si se quiere apurar la exactitud, hay que calcular las q' y q'' que efectivamente resulten y el factor de amplificación $(1 + r' q') (1 + r'' q'')$. v y p se refieren al total de armaduras en un metro lineal. La disminución de V y de p , empleando el hormigón de 400 kilogramos por metro cúbico, compensa con

creces el aumento de coste debido a la mayor riqueza en cemento. A 80 pesetas la tonelada de éste y con los precios ya indicados, de 100 y 0,40 el metro lineal de pilar cuesta 29,80 y 27,01 pesetas. Conviene, económicamente, el hormigón de más resistencia, con el mínimo de armaduras.

Solamente cuando circunstancias especiales exijan reducir todo lo posible las dimensiones de un pilar ó cuando antes de sufrir compresión esté la pieza expuesta a trabajar por flexión, un pilote, por ejemplo, convendrá forzar las cuantías. Entonces precisa limitar la carga aparente $\frac{P}{h}$ a 0,60 H_{rc} , ó, lo que es

igual, la amplificación $(1 + r' q') \times (1 + r'' q'')$ a $\frac{0,60}{0,28} = 2,14$, para que el hormigón exterior a los cercos, y que no está protegido por ellos, no se fisure. Pero es muy raro llegar a $q' = 0,04$ y $q'' = 0,01$, que dan una amplificación, al máximo, de 1,90.

Un pilar de hormigón armado, entre dos suelos con nervios cruzados, está teóricamente en el caso de doble empotramiento ($k = 4$); si en uno de aquéllos hay un solo orden de nervios, en el tercero ($k = 2$); si en los dos hay nervios en un solo sentido en el segundo ($k = 1$) y si está sentado sobre una basa y con una sola fila de nervios en la coronación en el primero ($k = \frac{1}{4}$).

Todo lo dicho supone la presión exactamente aplicada según el eje. En las obras no hay esa exactitud, y es prudente precaverse contra las desigualdades de peso y de sobrecarga, particularmente de ésta, rebajando la presión admisible a 0,80, 0,70, 0,60 de la calculada, según que la pieza esté bajo nervios simétricos, en línea de fachada, ó en ángulo de ésta; ó lo que es igual, mayorar la presión total a 1,25, 1,43, 1,67, ó $\frac{5}{4}$, $\frac{10}{7}$, $\frac{5}{3}$, de la real, números adoptados por la Comisión francesa que experimentó, al efecto, numerosas piezas.

La fórmula de Rankine, recomendada por dicha Comisión:

$$H_{cp} = \frac{0,28 H_{rc}}{1 + \frac{c}{10.000} \frac{l^2}{e^2}}$$

en la que c vale en los cuatro casos, 4, 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, resulta idéntica a la que directamente hemos deducido, partiendo de la de Euler,

$$H_{cp} = \frac{0,28 H_{rc}}{1 + \frac{1}{10.000 k} \frac{l^2}{e^2}}$$

con los coeficientes k , $\frac{1}{4}$, 1, 2, 4, es decir, $k = \frac{1}{c}$. Llegamos, por tanto, a lo establecido experimentalmente, de perfecto acuerdo la práctica con la teoría (1).

Cuando la excentricidad pueda tener un valor apreciable, la pieza está sujeta a flexión compuesta, y como tal hay que calcularla. Aplicar lo aquí expuesto, constituiría un *grave error*.

Una simplificación de la fórmula de Simpson

La fórmula, gratuitamente atribuida a Simpson, para determinar de modo aproximado el área de una superficie plana, limitada por un contorno curvilíneo cualquiera, es susceptible de multitud de aplicaciones prácticas; y lo fue-

(1) Comprobación de lo antes afirmado. La fórmula de Euler es exacta siempre que el valor de E , que en ella interviene, sea precisamente el relativo a la carga crítica de iniciación del pandeo.