

REVISTA DE OBRAS PUBLICAS

PUBLICACIÓN TÉCNICA DEL CUERPO DE INGENIEROS DE CAMINOS CANALES Y PUERTOS

DIRECTOR

D. MANUEL MALUQUER Y SALVADOR

COLABORADORES

LOS INGENIEROS DE CAMINOS, CANALES Y PUERTOS

SE PUBLICA LOS JUEVES

Dirección y Administración: Plaza de Oriente, 6, primero derecha.

CÁLCULO DE VIGAS DE HORMIGÓN ARMADO

(CONCLUSIÓN)

Espesores del alma.—Los esfuerzos de compresión á 45° que se producen en el alma parecen suficientes para deducir el espesor de este elemento. Sus dimensiones resultan así pequeñas en general porque tienen que satisfacer á otras condiciones. En primer lugar, si las barras de la armadura inferior están en un mismo plano paralelo al de la fibra neutra, la transmisión del esfuerzo cortante que se ha de neutralizar con la adherencia de las caras inferiores de estas



Fig. 21.

barras exige que los espacios libres entre ellas sean por lo menos iguales á la suma de los semi-perímetros de las mismas, teniendo en cuenta que el coeficiente que se admite para el esfuerzo cortante es el mismo que para la adherencia. Esta consideración no da ventaja á la disposición de la cabeza inferior en barras superpuestas.

Además, en la mayor parte de los casos, como esta porción de alma forma la cabeza comprimida en el empotramiento de los extremos, esta consideración suele ser dominante y conduce á la determinación de los espesores.

La figura 22 da idea de una constitución de viga con arreglo á lo expuesto para el caso de una carga aislada tal como el cruce de una vigueta.

3.° *Carga constante y uniformemente repartida.*—Haremos como en caso de fuerzas aisladas, empezar por estudiar lo que sucede en la parte tendida, la mayor y más interesante..

$$M = \frac{plx}{2} - \frac{px^2}{2} - \mu \gg \frac{dM}{dx} = p \left(\frac{l}{2} - x \right) \gg \frac{d^2M}{dx^2} = -p$$

en que l es la luz ó longitud de la viga, p la carga por unidad de longitud y μ el momento de empotramiento si lo hay.

La ecuación (32), puesto que $(uR) = 0$ se reducirá á

$$\left(\frac{dy}{dx} \right)^2 - \frac{uQ}{uS} \left(\frac{dy}{dx} \right) - 1 = 0 \quad (32')$$

Sin entrar en desarrollos de cálculo que pueden hacerse fácilmente con las fórmulas (26) (26') (28') (28'') (28''') y (28'iv), teniendo en cuenta los signos del momento de la sección, é introduciendo el radio de giración de la cabeza

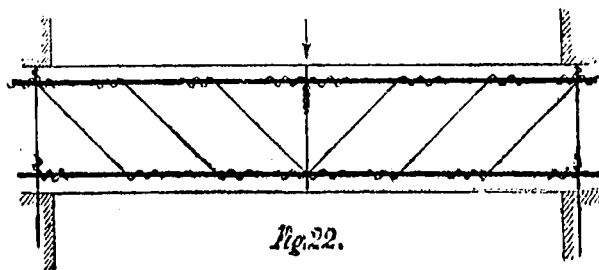


Fig. 22.

comprimida y la ordenada de su centro de gravedad, llegaríamos para el valor de $\frac{dQ}{dS}$ á una fracción cuyo numerador es de la forma $(y + a)$ y el denominador $\left(\frac{l}{2} - x \right)$.

Cambiando el origen de los ejes coordenados al centro de la viga y subiendo ó bajando el eje de las x , llegaríamos á la ecuación final:

$$\left(\frac{d\beta}{dx} \right)^2 + \frac{\beta}{\alpha} \left(\frac{d\beta}{dx} \right) - 1 = 0$$

en que α y β , nuevas coordenadas, tienen los siguientes valores.

$$\alpha = x \frac{l}{2}$$

$\beta = h - Y + y \gg M > 0$, cargas apoyadas sobre la viga.

$$\beta = y + Y_1 + \frac{p^2}{Y_1} \gg M < 0, \text{ ídem íd.}$$

$$\beta = y - Y_1 - \frac{p^2}{Y_1} \gg M > 0, \text{ cargas colgadas por la}$$

parte inferior.

$$\beta = y - (h + Y) \gg M < 0, \text{ ídem íd.}$$

equivale esto á trasladar el eje de las x ahora de las α , bien á la barra extendida, bien á punto ficticio de la cabeza com-

primida, que hemos encontrado ya al hallar los valores del esfuerzo cortante. La traslación es siempre en sentido tal, que el eje de las α se pone en la cabeza en que no insisten las cargas p .

Si el peso propio del alma no fuese despreciable, y su espesor constante, obtendríamos un resultado algo distinto en que aparecería el eje de las α algo más alejado de la fibra neutra y el valor de $\frac{\beta}{\alpha}$ multiplicado por una constante $(1 - n)$, siendo n la relación entre el peso del metro lineal del alma con una altura $\left(H + \frac{p^2}{|Y_1|}\right)$ y el peso p por metro lineal, carga total de la viga. El caso no tiene importancia y el método de cálculo sería idéntico; prescindimos de él por no complicar.

y sustituyendo en la última ecuación diferencial

$$\frac{d\alpha}{\alpha} = \frac{(4 + z^2)dz}{2z(2 - z^2)} = \frac{dz}{z} - \frac{3}{4} \cdot \frac{dz}{(z - \sqrt{2})} - \frac{3}{4} \cdot \frac{dz}{(z + \sqrt{2})}$$

integrando

$$\alpha = k \frac{z}{[\pm(z^2 - 2)]^{\frac{3}{4}}}$$

para poner la constante en forma más clara, llamemos α_0 el punto en que una de estas curvas corta al eje de las α , tendremos

$$y = 0 \gg t = 0 \gg z = \pm 2 \gg k = \pm \frac{\alpha_0}{2^{\frac{3}{4}}}$$

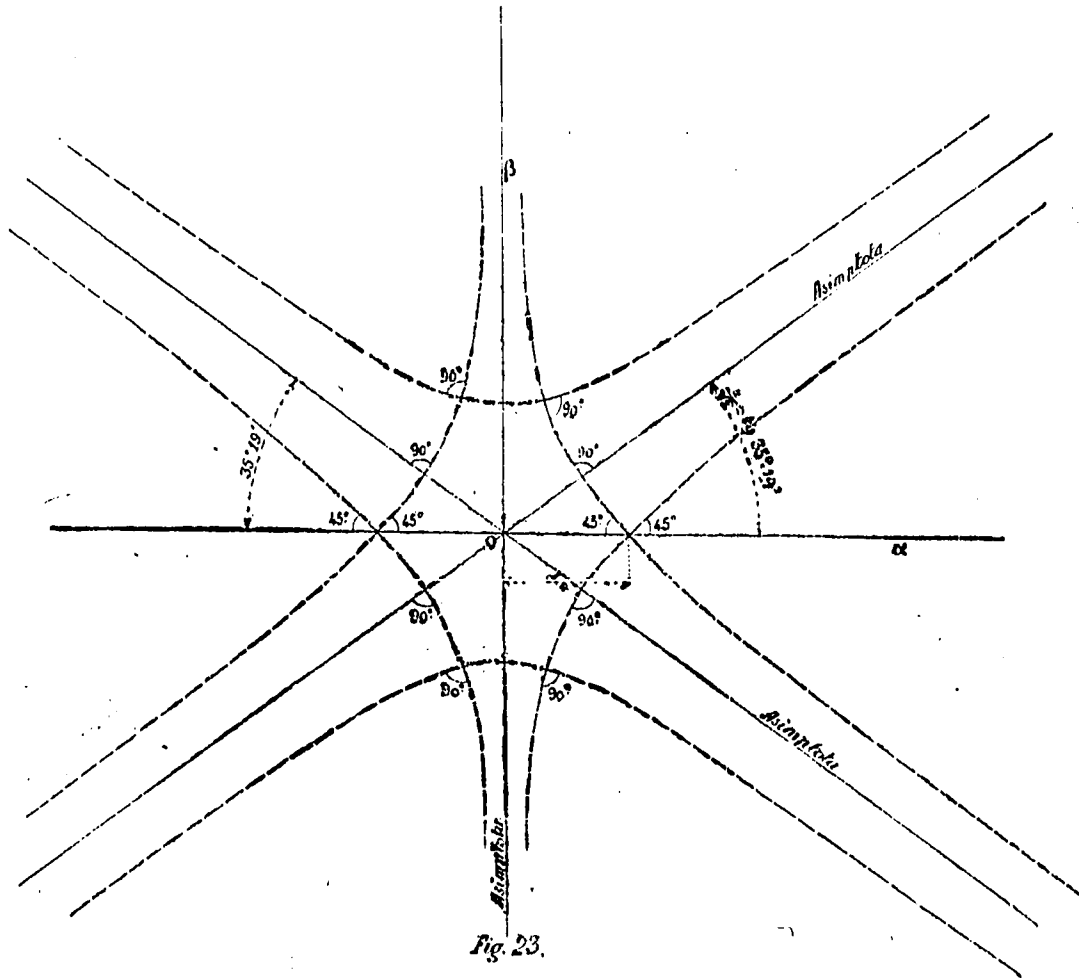


Fig. 23.

La ecuación últimamente obtenida es fácil de integrar. Hagamos

$$\beta = \alpha \gg \frac{d\beta}{d\alpha} = t + \alpha \frac{dt}{d\alpha}$$

y sustituyendo

$$\frac{dt}{d\alpha} = \frac{-3t \pm \sqrt{t^2 + 4}}{2\alpha}$$

ó sea

$$\frac{d\alpha}{\alpha} = \frac{2dt}{-3t \pm \sqrt{t^2 + 4}}$$

pongamos

$$z = -t \pm \sqrt{t^2 + 4} \gg z^2 + 2zt - 4 = 0 \gg$$

$$t = \frac{4 - z^2}{2z} \gg dt = -\frac{4 + z^2}{2z^2} dz$$

y sustituyendo

$$\alpha = \alpha_0 \frac{z}{2^{\frac{3}{4}} [\pm(z^2 - 2)]^{\frac{3}{4}}} \quad (34)$$

Se le puede dar una forma más cómoda para el cálculo sin hacerla explícita con relación á α y β haciendo $z^2 = 4 - 2zt$ y resulta

$$\alpha = \alpha_0 \frac{z}{2[\pm(1 - tz)]^{\frac{3}{4}}} \quad (35)$$

Como se ve fácilmente por la ecuación que liga z y t , después de hacer desaparecer el radical, z es el doble del coeficiente angular de la tangente en el punto considerado.

Las curvas de las ecuaciones (34) y (35) tienen las siguientes propiedades. Asíntotas: el eje de las β y dos rectas, cuyo coeficiente angular es

$$\pm \frac{1}{\sqrt{2}}$$

ó sea inclinadas $35^{\circ} 19'$ con relación al eje de las x . Todas las de la familia tienen un centro de semejanza que es el origen, de tal modo, que obtenida una se pueden hallar las que se deseen dilatando las ordenadas y abscisas en la misma proporción. Cortan al eje de las x con una inclinación de 45° . Véase figura 23, la forma de una de ellas. Las curvas son simétricas con relación á los dos ejes coordenados.

La ecuación (30), cambiando $\frac{dy}{dx}$ por $-\frac{dx}{dy}$, como hemos dicho atrás, para pasar de la dirección del elemento que sufre la presión á la de la línea de acción, da el valor de (uP)

$$uP = + uS \cdot \frac{d\beta}{d\alpha} = \frac{-pa}{H + \frac{\rho^2}{Y_1}} \cdot \frac{d\beta}{d\alpha} \quad (36)$$

El primer factor es constante con y , el segundo indica que á medida que las curvas de acción se aproximan á la horizontal decrece la tensión.

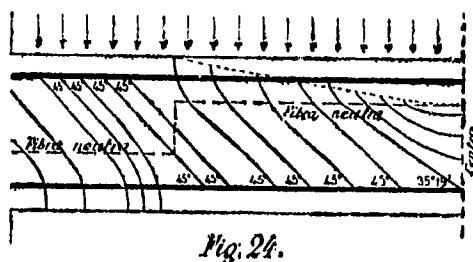


Fig. 24.

La figura 24 corresponde al caso de una viga empotrada con carga uniformemente repartida aplicada en forma de presión sobre la cara superior de la viga.

La figura 25 corresponde al caso de cargas colgadas de su cara inferior.

Como se ve, en una y otra difiere poco la dirección de las ligaduras de rectas inclinadas á 45° en la parte tendida, excepto hacia el centro de la viga; pero en esta parte las tensiones son pequeñas y en muchos casos se deja que las resista el mismo cemento. Sin embargo, es prudente tenerlas en cuenta si las cargas están colgadas como en la figura 25.

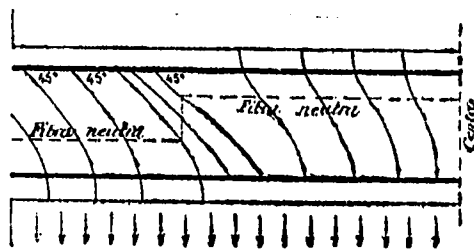


Fig. 25.

Si además de la carga uniformemente repartida hubiese cargas aisladas, obtendríamos las mismas curvas conservándose en todos los casos la posición del eje de las x ; pero el origen de coordenadas estaría más alejado del punto medio de la viga, en sentido tal de acercar el trazado de las ligaduras á rectas á 45° . La posición es fácil de hallar partiendo del valor de $\frac{dM}{dx}$.

En casi todos los casos, por tanto, se pueden emplear ligeramente variadas las reglas y disposiciones que hemos estudiado en el caso anterior de cargas aisladas, cuidando de poner en cada sección las ligaduras correspondientes,

variando, ya su número, ya su sección, porque aquí no es constante con x el esfuerzo cortante.

Vemos que en la porción tendida, tanto la dirección de las ligaduras como la tensión en cada una de ellas se conserva casi constante á lo largo de cada una de estas líneas. En la cabeza comprimida esta tensión decrece rápidamente y la dirección se aproxima á la vertical, pero no siempre del mismo modo. Si las cargas están apoyadas (fig. 24), la tensión continúa decreciendo en esta cabeza en la parte media de la viga hasta tropezar con la curva que anula el último término de la ecuación (33), ó sea:

$$(uR)(uQ) = (uS)^2.$$

Esta ecuación da $x = 0$ ó $y = 0$, para el centro de la viga, ó $y = Y$ para la sección en que el momento es nulo. Se ha dibujado de trazos en la figura 24. Continuando más allá la línea de la ligadura veríamos que el esfuerzo principal correspondiente es una compresión. En esta misma viga, en la parte en que influye el empotramiento, decrece la tensión en la cabeza comprimida inferior, hasta anularse en la cara terminal.

Si las cargas están colgadas (fig. 20) en la cabeza superior comprimida, se anulan las tensiones en la cara terminal. En las regiones con momento negativo no se anularían, sino que en la cara terminal inferior tomarían el valor correspondiente á la carga p por metro lineal.

En definitiva, no se tienen en cuenta estos esfuerzos en la parte comprimida; se prolongan las ligaduras y se atan á una armadura superior.

Respecto á la distribución y demás detalles, es aplicable lo que hemos dicho en el caso de cargas aisladas, procurando que todo plano normal á las ligaduras tropiece cuando menos con dos á uno y otro lado de su punto medio.

Resultados que se obtendrían con diferentes hipótesis acerca de la manera como acciona el hormigón del alma en la parte extendida.—La hipótesis que hasta aquí hemos seguido de no admitir tensiones soportadas por el hormigón en la parte extendida, es un caso límite que equivale á suponer el alma poblada de grietas que sigan las líneas que hemos encontrado para las tensiones, de tal modo que permitan en direcciones normales á ellas las compresiones, pero no tensiones.

Podemos examinar lo que resultaría de admitir otras hipótesis. Supongamos, como hacen algunos al aplicar los resultados de las experiencias de Considère relativas á la resistencia á la tracción del hormigón armado, que en esta porción del alma (uR) en vez de ser cero tuviese un valor constante en todas las secciones y no dependiente de x ni de y . La celosía á 45° que hemos obtenido para el caso de cargas aisladas se convertiría en otra de rectas todavía más inclinadas con relación á la fibra neutra, es decir, formando con ella un ángulo inferior á 45° .

Si en esta hipótesis las cargas fuesen uniformemente repartidas encontraríamos, como es fácil ver, las mismas curvas de la ecuación (34); pero el eje de las x estaría en otra posición más alejada de la fibra neutra en uno ú otro sentido; dando por resultado que las curvas encontrarían á las varillas tendidas con ángulos inferiores á 45° y tendiendo á $35^{\circ} 20'$.

Finalmente, pasando al otro extremo de suponer que toda ó una parte notable de las cargas es resistida por el hormigón á la tensión, siguiendo la misma ley lineal que

regula las compresiones, las líneas de tensión son otras, pero según la ecuación (32), con $(uR) < 0$ se inclinan todavía más y tienden á encontrar á las varillas con ángulos que se aproximan á la horizontal.

En todos los casos examinados, por tanto, se encontraría para las ligaduras direcciones más tendidas que la de 45° hallada como conveniente en el caso límite cuyo estudio acabamos de hacer; se confirma así lo que al principio hacíamos notar de no ser conveniente la dirección vertical para los estribos.

Claro está que cualquier elemento que se ponga en el alma que impida la formación de grietas contribuye á su solidez y resistencia, pero el material no se puede considerar como bien aplicado y utilizadas sus propiedades si no se pone en la dirección de los esfuerzos principales.

Damos aquí por terminado este trabajo, ya un poco largo, creyendo cumplido el propósito que nos habíamos formado de hacer fijar la atención sobre las condiciones de resistencia de las almas de las vigas, señalando un modo racional de concebir el trabajo de sus elementos, y con ello indicando la marcha del cálculo para elegir su disposición y dimensiones.

FERMÍN CASARES BESCANSÁ.
Ingeniero de Caminos.

NOTAS

Construcción de los ábacos. Abaco núm. 1.—La fórmula que da el coeficiente de reducción del momento flector para el cálculo de los forjados.

$$n = \frac{1}{1 + 2 \left(\frac{l}{l'} \right)^4}$$

se puede transformar en

$$4 \log \frac{l}{l'} = \log \frac{1-n}{2n}$$

para reducirla á ábaco basta tomar sobre un eje los valores de los dos miembros á uno y otro lado.

El primer miembro es una escala logarítmica, cuya unidad de longitud es en el ábaco construido 28 centímetros. Para el segundo miembro la unidad de longitud adoptada es de 7 centímetros. Los valores de esta escala, tomando por origen el punto que corresponde á $\frac{l}{l'} = 1$ se consignan en el siguiente cuadro:

La segunda columna da los valores numéricos referidos á la unidad logarítmica que se adopte para las n .

n	$\log \frac{1-n}{2n}$	n	$\log \frac{1-n}{2n}$
0,01	1,695	0,35	— 0,092
0,02	1,839	0,40	— 0,125
0,03	1,209	0,45	— 0,211
0,04	1,179	0,50	— 0,301
0,05	0,978	0,55	— 0,387
0,06	0,895	0,60	— 0,467
0,07	0,822	0,65	— 0,570
0,08	0,760	0,70	— 0,669
0,09	0,704	0,75	— 0,778
0,10	0,653	0,80	— 0,903
0,15	0,052	0,85	— 1,051
0,20	0,301	0,90	— 1,255
0,25	0,176	0,95	— 1,580
0,30	0,067		

Abacos números 2 y 3 (*).—Las fórmulas (11) y (12) se han

(*) Las láminas ó ábacos que en el número 1326 de esta Revista figuran con los números 2 y 3 deben completarse con un eje medio ó paralela central á los dos ejes graduados.

transformado cada una en un doble ábaco de puntos alineados del sistema de Maurice d'Ocagne, tomando logaritmos, lo que da

$$(11') \log \frac{6r(r+1)^2}{8r+2} + \log \frac{mM}{Ra} = \log a + 2 \log h$$

$$(12') \log [2r(r+1)] + \log ms = \log a + \log h$$

Tomando sobre dos ejes paralelos los valores de los dos términos del primer miembro y enlazándolos por una recta y por otra los orígenes, la longitud que abarcan las dos transversales en la paralela media será la semisuma de los dos términos.

Si otra transversal cruza á la paralela media en el mismo punto, determinará en los ejes los valores correspondientes á los términos del segundo miembro.

En el ábaco núm. 3 (fórmula 12') se adoptó como unidad de longitud logarítmica 10 centímetros.

En el núm. 2 (fórmula 11'), la unidad es de 7,5 centímetros, excepto para los valores de h en que corresponde el doble, ó sea 15 centímetros.

Las escalas logarítmicas se construyen fácilmente con una tabla de logaritmos, y en cuanto á las que corresponden á los valores de r , el siguiente cuadro da el cálculo hecho; los números se refieren á la unidad logarítmica que se adopte.

r	$\log [2r(r+1)]$	$\log \left[6 \frac{r(r+1)^2}{8r+2} \right]$
0,6	0,2838	0,8847
0,7	0,3766	0,4714
0,8	0,4594	0,5488
0,9	0,5340	0,6178
1,0	0,6021	0,6812
1,5	0,8751	0,9872
2,0	1,0792	1,1908
2,5	1,2430	1,2865
3,0	1,3802	1,4180
3,5	1,4988	1,5317
4,0	1,6021	1,6320
4,5	1,6946	1,7218
5	1,7782	1,8030
6	1,9248	1,9455
7	2,0192	2,0677
8	2,1534	2,1748
9	2,2553	2,2700
10	2,3424	2,3558
11	2,4216	2,4388
12	2,4912	2,5054
13	2,5611	2,5716
14	2,6233	2,6330
15	2,6812	2,6904

Respecto á la disposición de las escalas y correspondencia de valores, los mismos ábacos dan indicaciones suficientes.

Abaco núm. 4.—Para traducir á ábaco de puntos alineados la fórmula (18).

$$\frac{mM}{Ra} \times H = msH^3 + I_c \frac{S' + ms}{S'}$$

sean u y v las longitudes tomadas en dos ejes paralelos separados la distancia $2b$. Hagamos:

$$\left. \begin{aligned} u &= ams \\ v &= bI_c \frac{S' + ms}{S'} \end{aligned} \right\}$$

la fórmula se transforma en

$$\frac{H^3}{a} u + \frac{v}{b} = \frac{mM}{Ra} H$$

Se demuestra fácilmente que cuando u y v satisfacen á una ecuación lineal como la que acabamos de obtener, las rectas que enlazan los puntos correspondientes á u y v pasan por un punto fijo. Las coordenadas cartesianas referidas á dos ejes cuyo origen es el punto medio de la recta que une los de los ejes u y v ,

el eje de las x está recta, y el de las y paralelo á los ejes de u y v , son en este caso:

$$x = -\delta \frac{1}{\frac{1}{b} + \frac{H^2}{a}} = -\delta \frac{a - bH^2}{a + bH^2}$$

$$y = \frac{\frac{mM}{R_a} H}{\frac{1}{b} + \frac{H^2}{a}} = \frac{abH}{a + bH^2} \cdot \frac{mM}{R_a}$$

El valor de x , independiente de $\frac{mM}{R_a}$, nos dice que á cada valor de H corresponde una recta paralela á los ejes de las u y v .
Eliminando H entre las dos ecuaciones, resulta

$$\delta^2 y^2 = ab(\delta^2 - x^2) \left(\frac{mM}{R_a} \right)^2, \text{ ó sea}$$

$$\frac{4y^2}{ab \left(\frac{mM}{R_a} \right)^2} + \frac{x^2}{\delta^2} = 1$$

ecuación de las curvas que corresponden á los valores de $\frac{mM}{R_a}$.
Son elipses uno de cuyos ejes tiene sus extremos en los puntos de intersección de los ejes de las u y v con el eje de las x y el otro semieje es $\frac{mM}{R_a} \sqrt{ab}$.

El valor de y nos dice, además, que para cada valor de H la ordenada es proporcional á $\frac{mM}{R_a}$, de modo que construída una elipse se dibujan con facilidad las demás, y haciendo corresponder las curvas á incrementos iguales de $\frac{mM}{R_a}$, resultarán las ordenadas divididas en partes iguales.

Para dibujar la figura se tomó:

$$a = 7,5 \text{ metros} \gg b = 75 \text{ metros.}$$

Los valores de u y v se han anotado sirviendo de unidad el centímetro para evitar el uso de decimales, expuestos á equivocaciones.

Así, para metros = 400 centímetros cuadrados, la longitud del eje de la derecha es de 30 centímetros.

La misma longitud de 30 centímetros corresponde en el eje de la izquierda á un valor

$$I_c \frac{S' + ms}{S'} = 400.000$$

tomando también el centímetro como unidad de longitud.

Las verticales interiores indican los valores de H que se han anotado al pie en metros.

Las cotas de las curvas indican el valor de $\frac{mM}{R_a}$, tomando M en metros-kilogramos, y R_a coeficiente de resistencia de la armadura tendida en kilogramos por centímetro cuadrado.

δ — Lo hemos tomado igual á 10 centímetros, ó sea la separación de ejes $2\delta = 20$ centímetros.

El cuadro siguiente, que facilita la construcción del ábaco, da los valores correspondientes de las abscisas y los de las ordenadas para $\frac{mM}{R_a} = 100$.

H metros.	x δ	y metros.
0,10	— 0,8182	0,06816
0,15	— 0,6326	0,09180
0,20	— 0,4286	0,10710
0,25	— 0,2307	0,11512
0,30	— 0,0526	0,11941
0,35	+ 0,1011	0,11797

H metros.	x δ	y metros.
0,40	+ 0,2315	0,11542
0,45	+ 0,3388	0,11152
0,50	+ 0,4286	0,10710
0,55	+ 0,5031	0,10245
0,60	+ 0,5650	0,09780
0,65	+ 0,6172	0,09330
0,70	+ 0,6610	0,08895
0,75	+ 0,6980	0,08490
0,80	+ 0,7297	0,08107
0,85	+ 0,7570	0,07747
0,90	+ 0,7800	0,07417
0,95	+ 0,8005	0,07110
1,00	+ 0,8182	0,06816

Curva tipo de las ligaduras para cargas uniformemente repartidas.—El siguiente estado da los valores numéricos necesarios para la construcción de la fórmula (35), ó sea la figura 23.

t	$\frac{d\beta}{d\alpha} = \frac{z}{2}$	α	$\frac{d\beta}{d\alpha} = \frac{z}{2}$	α
0,0	1,0000	1,000	1,0000	1000
0,1	0,9513	1,114	1,0513	0,911
0,2	0,9050	1,268	1,1050	0,9397
0,3	0,8612	1,485	1,1612	0,7812
0,4	0,8186	1,817	1,2186	0,7315
0,5	0,7808	2,436	1,2808	0,6902
0,6	0,7440	3,973	1,3440	0,6390
0,7	0,7095	30,220	1,4095	0,6240
0,8	0,6770	4,359	1,4770	0,5947
0,9	0,6466	2,510	1,5466	0,5700
1,00	0,6180	1,825	1,6180	0,5480
10/9	0,5884	1,425	1,6995	0,5260
10/8	0,5542	1,132	1,8042	0,5017
10/7	0,5146	0,906	1,9432	0,4747
10/6	0,4683	0,722	2,1350	0,4440
10/5	0,4142	0,5675	2,4142	0,4092
10/4	0,3507	0,4335	2,8507	0,3691
10/3	0,2769	0,3142	3,6103	0,3223
10/2	0,1925	0,2041	5,1925	0,2646
10/1	0,0990	0,1005	10,099	0,1883

Tracciones.

Compresiones.

LA EVOLUCIÓN ACTUAL DE LAS CIENCIAS ⁽¹⁾

(CONCLUSIÓN)

En suma, y perdonadme esta especie de *ritornelo*, que una vez y otra, repito con ritmo irresistible, pero que á la lógica de mi pensamiento me obliga, la evolución en todas las ciencias tiende á la destrucción del individuo; por lo menos del «individuo clásico», hasta aquí respetado por Sociedades políticas, por sabios de todas las Naciones y aun por los métodos experimentales.

Destrucción del hombre como individuo hasta convertir sus restos insubstanciales en átomos de la unidad del Estado; destrucción de especies animales y vegetales, convirtiéndolas con el pensamiento, ya que en la realidad no puede ser en elementos del protoplasma único.

Destrucción de los átomos de los cuerpos simples en la Química hasta deshacerlos en átomos eléctricos; en electrones.

Aniquilamiento de todos los individuos tradicionales en todas las esferas y tendencia á una igualdad niveladora, que al fin de esta serie de evoluciones se perderá en el éter que puebla el espacio infinito; si es que es infinito y no es la retórica la que nos obliga á emplear dicha palabra que,

(1) Del discurso inaugural del Congreso de Valencia, por D. José Echegaray.