

ha verificado en época anterior á la de la fecha de la *ley de Puertos* vigente de 7 de Mayo de 1880.

Hasta dicha fecha no fueron declarados de *interés general* los *trece puertos* de que antes nos ocupamos á cargo de Juntas, de los cuales lo fueron de *primer orden* los de Valencia, Barcelona, Bilbao, Sevilla, Santander, Cartagena, Málaga, Tarragona y Palmas (Baleares); y de *segundo orden* los de Almería, Coruña, Huelva y Gijón, los cuales figuran con tal denominación en el *art.* 16 de la citada ley.

Además, se comprenden en dicho artículo, como de *primer orden*, los puertos de Vigo y Cádiz, en los cuales se han creado Juntas posteriormente á la fecha de la ley, y el del *Ferrol*, que aún no la tiene, á pesar de haberse solicitado hace tiempo.

Entre los puertos de *segundo orden* se cita en la ley al de *Ceuta*, que tampoco ha tenido *Junta de Obras* hasta bastante después, y entre los marcados en el *art.* 16 de la misma como puerto de refugio (y, por tanto, de *interés general* también, según el *art.* 15 de la ley) se *citan* á los de *Algeciras* y del *Musel*, que actualmente cuentan con *Juntas de Obras* para su administración y servicios.

En el *art.* 26 de la ley de Puertos se faculta al Gobierno para organizar *Juntas de Obras de puertos* encargadas de la administración ó inversión de los fondos y de la ejecución de los trabajos bajo la inspección y vigilancia del Ministerio de Fomento,

El *art.* 27 de la misma ley prescribe que el Ministerio de Fomento formará un Reglamento para la organización y régimen de las Juntas de Obras de puertos existentes (en la fecha de la ley), y dispuso que el nombramiento y separación del Ingeniero Director de las obras sería de *libre disposición del Gobierno*, el cual podrá también *nombrar delegados especiales* cerca de las mismas Juntas cuando lo considere conveniente.

En el citado *art.* 26 de la ley de Puertos se autoriza asimismo al Gobierno para *costear las obras* de los puertos estableciendo *impuestos especiales* en la respectiva localidad, con exclusiva aplicación á las propias obras ó *independientes* del presupuesto general del Estado.

Con las precedentes indicaciones de carácter legal, relacionadas con las *Juntas de Obras de puertos* en general y con las particularmente citadas, así como con los servicios encomendados á dichos organismos, terminaremos el presente artículo, dejando para el siguiente el ocuparnos de las demás Juntas restantes y de las circunstancias de su creación.

B. DONNET.

17 Agosto 1910.

LA ESTADÍSTICA MATEMÁTICA EN INGLATERRA ⁽¹⁾

(CONCLUSIÓN)

III

La ley de Gauss se ha formulado para aplicarla á errores accidentales de observación de una cantidad generalmente concreta.

¿Cómo ha llegado á extenderse á la estadística, es decir, á comparar *varias* cantidades reales como si fueran errores de observación de una sola cantidad abstracta ó ideal?

En este proceso conviene recordar que ya Bernoulli había pensado en aplicar el cálculo de probabilidades á otras materias diferentes de los juegos de azar. En su *Ars Conjectandi* (1), los tres primeros capítulos los dedica á comentar el tratado de Huyghens y al estudio de las combinaciones y permutaciones aplicado á los juegos de azar; pero el cuarto se titula: «Empleo y aplicación de la doctrina precedente á materias civiles, morales y económicas».

En esta obra ha hecho la separación bien determinada entre la probabilidad *à priori* y la *à posteriori*, y ha planteado el problema, del que ha deducido la demostración de su famoso teorema. El problema lo planteó del siguiente modo: «Demostrar que se pueden hacer tantas pruebas que, siendo repetidas tantas veces cuantas se quiera, resulte más probable que el número de *observaciones* favorables esté comprendido entre límites determinados.»

Como se observará, el término *observaciones* se emplea en general.

La muerte de Bernoulli no le permitió terminar esta obra, y no es posible saber cómo pensaba aplicar su teoría á los fenómenos económicos con los escasos elementos que le podían dar las combinaciones y permutaciones.

Han sido necesarios los trabajos realizados por De Moivre (2), Stirling (3), Mac Laurin (4) y Euler (5), para hacer posible que Laplace diese al teorema de Bernoulli la forma analítica en que se ha condensado para una fácil aplicación.

De este modo se ha hecho posible asimilar á errores de observación las variaciones ó diferencias de un valor cualquiera que se agrupan alrededor de una media. Esto es lo que hizo Poisson dando el nombre de «Ley de los grandes números», y aplicando el teorema de Bernoulli al caso en que las probabilidades cambian de una á otra prueba. Entonces se confirmó la ley de los errores de Gauss, comprobándose la práctica, ya seguida, de repetir el número de medidas y tomar la media cuando quería obtenerse una gran exactitud.

Ahora bien; en los coeficientes estadísticos, más ó menos constantes, como la relación del número de nacimientos masculinos y femeninos, la relación de los muertos y supervivientes de una edad determinada y otros análogos, se tiene una magnitud de que otras se separan más ó menos simétricamente alrededor de una media del mismo modo que en los errores de observación. Además, se comprueba que el coeficiente es tanto más fijo cuanto mayor es el número de observaciones. La asimilación parece razonable, y se tomaron los datos estadísticos como base para numerosas aplicaciones, aun cuando hay diferencias notables en ambos casos.

Cuando se trata de determinar una magnitud medida, se quiere saber el valor verdadero ó probable de una magnitud real. En el caso de un coeficiente estadístico fijo, lo verdadero ó real son los datos, es decir, las diferencias y el valor buscados es enteramente ideal ó teórico.

(1) *Ars Conjectandi opus posthumum*, Basileae impensis Thurnisiorum traictum, 1715.

(2) *Miscellanea Analytica de Seriebus et Quadraturis*, London, 1730.

(3) *Methodus differentialis*, London, 180.

(4) *Treatise of Fluxions*, Elmhurst, 1712.

(5) *Institutiones calculi differentialis*, Petrop, 1755.

(1) Véase el número 1810.

De aquí la asimilación de Quetelet, que considera la naturaleza como una urna, cuyo contenido desconocemos y de la que extrajésemos bolas que son los fenómenos observados; otras veces considera la naturaleza como un tirador que apunta á un blanco y cuyos tiros representan individuos que tienden á aproximarse á un tipo.

Claro está que estas comparaciones no son exactas, pero sí muy aproximadas á lo cierto, como lo prueba el gran número de casos en que se han obtenido resultados de una exactitud incontestable, como en los seguros, en las medidas antropométricas, etc.

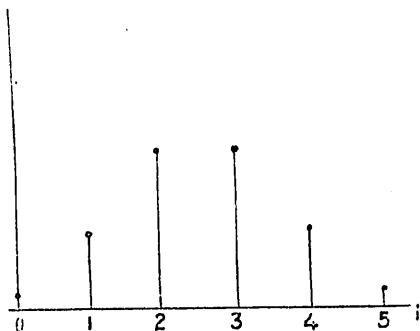


Fig. 1.ª

Lo mismo sucede en la Física. Maxwell admite que en un sistema gaseoso aislado las moléculas están animadas de velocidades diferentes en todos sentidos, repartidas con arreglo á la ley de Gauss. Esta hipótesis no puede comprobarse por observaciones directas, pero una vez admitida, se obtienen notables confirmaciones en las leyes de Mariotte y de Gay-Lussac y otras que se deducen como corolarios. Los movimientos de Brown, tan misteriosos todavía, pero ya algo perceptibles por medio del microscopio, satisfacen también la ley de Gauss. Quedan, no obstante, gran número de fenómenos á los cuales no ha podido aplicarse. Son todos aquellos cuyas curvas representativas no tienen un eje vertical de simetría.

Dos métodos se han intentado para obviar esta dificultad. El primero es sencillo y consiste en tomar los datos empíricos como abscisas y ordenadas de una curva especial en cada caso, y por medio de la teoría de la interpolación obtener la fórmula correspondiente. La representación puede hacerse tan exacta como se desee; pero los fenómenos representados no tienen más que enlace particular, careciendo de valor general, y toda medida común, ó aplicación en este sentido, se hace imposible.

El segundo método es menos sencillo, pero más científico. Consiste en considerar la curva simétrica como un caso particular de otra más general.

Sea

$$y_0 = Ae - mx^2$$

la representación analítica de la ley normal, la ley general será una serie de la forma

$$y = y_0 + y_1 + y_2 + \dots$$

en la cual y_0 será una primera aproximación. En este sentido ha investigado desde hace muchos años Mr. Edgeworth.

Desde 1883 ha publicado artículos en el *Philosophical Magazine*, en que sostiene que la ley del error se puede aplicar á mucho mayor número de fenómenos de los que generalmente se cree. En 1902 determinó la expresión de varias aproximaciones de la ley que podrán aplicarse á fenó-

menos representados por una curva desimétrica. Por último, en 1905 expuso en las *Cambridge Philosophical Transactions*, con el título de «The law of Error» (la ley del Error) la teoría que daba una fórmula general de esta ley que él define del siguiente modo:

«Una expresión aproximada de la frecuencia, con la cual, á la larga, diferentes valores son tomados en vez de una magnitud que depende de un número de elementos variables.»

Laplace, en la teoría analítica de las probabilidades, dió una primera aproximación. Poisson estableció una segunda aproximación con auxilio del método de los menores cuadrados; y, por último, Mr. Edgeworth indica, sin demostrarla, una tercera aproximación. Además, trata de probar que todas estas expresiones son casos particulares de una fórmula general, que puede dar aproximaciones sucesivas cada vez más exactas. Mr. Edgeworth toma como punto de partida un caso típico, es decir, aquel en que se cumplen todas las condiciones para que la ley pueda aplicarse mejor. Estas condiciones son once; pero en la vida real no se encuentra este caso típico, que sólo ha servido como procedimiento administrativo, y una vez conseguido este objeto, Mr. Edgeworth prescinde de tres condiciones, y sólo aplica en parte otras cinco ó seis para acercarse más á los casos que realmente se presentan en la experiencia diaria.

Mr. Edgeworth hace comprobaciones para hacer ver que los métodos propuestos son aplicables á casos muy varios, siempre más sencillos que el típico. Las condiciones que deben subsistir pueden resumirse como sigue:

- 1.ª Es preciso que la magnitud compleja que se trata de expresar analíticamente esté formada por una suma (ó bien otra función que pueda considerarse aproximadamente como una suma) de varios elementos (m).
- 2.ª Estos elementos deben formar grupos que tengan por sí mismos valores tomados al azar, según una ley de frecuencia.
- 3.ª Las curvas de frecuencia deben tener sus momentos de orden sucesivo inferiores á

$$m - \frac{1}{2}, \quad m - 1, \quad m - \frac{3}{2}$$

Es decir, que las potencias medias sucesivas de las diferencias (contadas á partir del centro de gravedad como origen) deben formar una serie descendente.

- 4.ª Al formar los grupos, los elementos deben ser independientes unos de otros, pero no es indispensable que esta independencia sea absoluta.

Supongamos, para fijar las ideas, que se trata de buscar la ley de frecuencia de una cantidad compleja en que la media de los valores sea A . Una observación particular estará representada por su diferencia con relación á esta media:

$$A + x$$

El valor particular de la observación p será

$$A + p^2$$

Es el que se ha considerado como un grupo, porque A es función de varios elementos, cuyos valores medios pueden representarse por a , de donde

$$A = a_1 + a_2 + \dots + a_m$$

Llamando á las variaciones con relación á las últimas medias, se tendrá para la primera observación

$$A + p^x = (a_1 + \lambda_1 \bar{z}_1) + (a_2 + \lambda_2 \bar{z}_2) + \dots + (a_n + \lambda_n \bar{z}_n)$$

Se supone que los valores del mismo elemento en las diferentes observaciones estén tomados al azar, independientemente unos de otros. Debe no obstante, observarse que este azar puede no ser *perfecto*, y es compatible con una cierta correlación entre los elementos y los grupos.

Si aplicamos estos símbolos á un ejemplo concreto, tal como la investigación de la frecuencia de los salarios, la cantidad compleja es el salario, cuyo valor medio es A . El salario de un individuo p será $A + p^x$, y será función, supuesta adictiva, de un gran número de elementos, tales como su inteligencia, duración de su trabajo, localidad en que trabaja, condiciones de la industria en que se emplea, número de competidores, número de patronos, etc. Para constituir el salario individual estos elementos, toman valores al azar, y se admite que $a_1 + \lambda_1 \bar{z}_1$ la influencia del factor inteligente del obrero p no dependa de otro alguno; por lo tanto, cada uno de estos elementos tiene valores propios que no se relacionan entre sí. En cuanto á la condición relativa á los momentos de las curvas de frecuencia, se ve que las variaciones de los diferentes elementos y de los diferentes grupos son del mismo género en este sentido, que sus diferencias, medidas por los momentos sucesivos no exceden de una determinada dependiente del número (m) de elementos.

Mr. Edgeworth indica como sujetas á la ley general del error el tanto de mortalidad á diferentes edades, los salarios, los caracteres biológicos susceptibles de medida, como la estatura, etc. La ha aplicado también á estadísticas relativas á observaciones de alturas barométricas.

Expresa además el convencimiento de que, en su opinión, del mismo modo que la *línea recta*, el *círculo*, la *elipse* y otras figuras matemáticas se reproducen continuamente bajo la acción de determinadas fuerzas, ya sea en la naturaleza, ya sea en el arte; de igual suerte esa variación esporádica que parece prevalecer en el Universo toma constantemente la forma exponencial que caracteriza la ley de error.

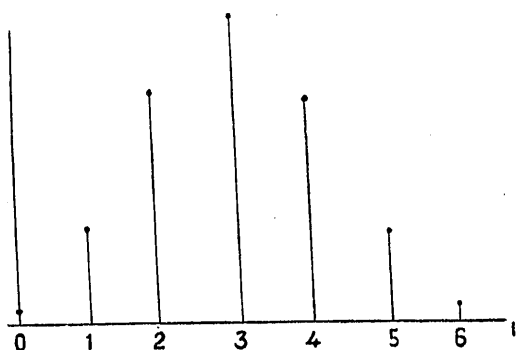


Fig. 2.ª

El interés de estas investigaciones estriba en que, al presente, puede decirse que se tiene una definición matemática de las condiciones que regulan lo que se ha llamado ley del azar.

La dificultad consiste en reconocer si los datos estadísticos realizan esas condiciones. Si tenemos la repartición de los salarios de un gran número de obreros, ¿estaremos seguros de que contienen un número suficiente de *elementos*? ¿Son bastante independientes unos de otros? Esto no puede determinarse *a priori*. Pero cuando se aplica la ley de error,

se comprueba si una causa preponderante ha producido perturbaciones, que han venido á alterar la repartición normal, que se hubiera realizado por sí misma si todas las condiciones esenciales se hubieran cumplido.

Pueden aplicarse los anteriores principios á diversos ejemplos.

En general, el problema que se trata de resolver es el siguiente: se tienen los datos estadísticos relativos á un fenómeno susceptible de medidas, es decir, el valor de la frecuencia y en función de los valores ó medidas de una característica x del fenómeno que se estudia. Los valores de x se supone que varían de un modo *discontinuo*, por saltos bruscos, pero iguales, y se trata de determinar la función $y = f(x)$ que liga las variaciones de y á las variaciones *continuas* de x .

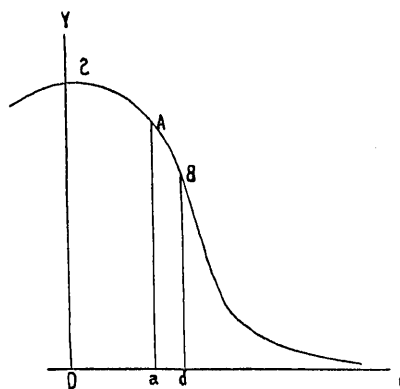


Fig. 3.ª

La teoría de Mr. Edgeworth da la forma de la función que se busca, y se trata de determinar los parámetros.

Si se toma como ejemplo los jornales de los obreros belgas de más de diez y seis años, tendremos según la estadística de 1896:

JORNAL Francos.	Número de obreros.	Frecuencia en milésimas.
Menos de 1,50.....	22.276	48
De 1,50 á 2,00.....	28.644	61
2,00 á 2,50.....	62.191	133
2,50 á 3,00.....	87.015	187
3,00 á 3,50.....	100.392	215
3,50 á 4,00.....	65.615	141
4,00 á 4,50.....	50.887	109
4,50 á 5,00.....	21.134	45
5,00 á 5,50.....	13.934	30
5,50 á 6,00.....	5.776	12
6,00 á 6,50.....	3.668	8
6,50 á 7,00.....	1.653	4
7,00 á 7,50.....	1.127	2
7,50 á 8,00.....	650	1,5
8,00 á 8,50.....	593	1
8,50 á 9,00.....	316	1
9,00 á 9,50.....	326	1
9,50 á 10,00.....	223	0,5
Total.....	463.185	1.000

Estos datos pueden representarse gráficamente por medio de un polígono en que se tomen por ordenadas los coeficientes de frecuencia en milésimas y por abscisas el valor del jornal en francos; la base de cada escalón será igual á la longitud adoptada para representar la variación de x , ó sea medio franco, y la altura el valor de y , ó sea la frecuencia para el jornal correspondiente. Pero la hipótesis de la repartición uniforme de los jornales entre los obreros comprendidos en cada escalón no constituye más una primera aproximación, puesto que los jornales no variarán en realidad por saltos de medio franco. Por eso la representación

gráfica resulta más exacta, suponiendo que los diversos escalones conservan sus respectivas superficies; pero en vez de terminarse por una recta paralela al eje de abscisas, terminan en una curva que los une entre sí de una manera continua y que tiene puntos de tangencia con el eje de las x antes y después del punto de inflexión de la parte superior. Esta corrección, llamada de Sheppard, permite más exactitud en la representación gráfica. La correspondiente á los jornales de los obreros belgas de más de diez y seis años comprende la primera aproximación en los escalones y tres curvas que traducen geométricamente la fórmula de Edgeworth, según se consideren uno, dos ó tres términos de la misma.

Para juzgar la concordancia entre las curvas y los datos estadísticos, se evalúa el tanto por ciento con relación al número de observaciones de la suma de las diferencias tomadas en su valor absoluto entre las observaciones y los valores calculados.

Este procedimiento da el resultado siguiente, limitándolo á las nueve primeras categorías de jornales de la estadística citada anteriormente:

Número de observaciones	Primera aproximación.	Diferencias.	Segunda aproximación.	Diferencias.	Tercera aproximación.	Diferencias.
48	30	18	26	22	15	33
61	66	5	83	22	67	6
133	116	17	145	12	145	12
187	152	35	193	6	212	25
215	180	35	179	36	200	15
141	160	19	132	9	141	»
109	114	5	85	24	83	26
45	66	21	53	8	43	2
30	30	»	35	5	22	8
969	»	145	»	144	»	127
Diferencias %.	»	15	»	15	»	13

Las curvas de jornales no son las que dan mejores resultados. Como ejemplos de otras aplicaciones del cálculo á la estadística, se reproducen los relativos á la proporción que alcanza el número de hijos en las familias inglesas, y la frecuencia de una estatura determinada, tomando por base las observaciones relativas á 2.192 alumnos de las escuelas de San Luis, en los Estados Unidos de América.

Los datos estadísticos se resumen en los cuadros siguientes:

Número de hijos por familia.	Número de familias en 1.000. Frecuencia.	Primera aproximación.	Diferencias	Segunda aproximación.	Diferencias	Tercera aproximación.	Diferencias
0	64	48	16	58	6	64	»
1	116	73	43	92	24	102	14
2	146	101	39	127	13	130	10
3	145	127	18	142	13	135	10
4	134	134	»	139	5	130	4
5	106	131	25	120	14	111	5
6	82	113	31	95	13	92	10
7	72	87	15	70	2	73	1
8	49	60	11	48	1	53	4
9	37	37	»	34	3	36	1
10	25	20	5	23	2	20	5
11	13	10	3	17	4	10	3
12	10	4	6	14	4	4	6
13	5	2	3	»	»	»	»
14	2	»	»	»	»	»	»
15	0,4	»	»	»	»	»	»
16	0,2	»	»	»	»	»	»
17	0,4	»	»	»	»	»	»
Diferencias %.	»	»	21	»	9	»	7

Observaciones.	Primera aproximación.	Diferencias.	Segunda aproximación.	Diferencias.	Tercera aproximación.	Diferencias.
1	»	»	»	»	»	»
2	4	2	2	»	2	»
8	9	1	8	»	8	»
27	24	3	22	5	20	7
42	39	3	44	2	42	»
84	88	4	94	10	84	»
137	152	15	158	21	148	11
223	222	»	230	8	226	4
297	269	28	284	13	290	7
321	295	26	312	9	321	»
342	267	24	260	17	258	15
243	205	22	200	17	127	14
183	127	11	128	10	124	14
138	68	11	79	»	78	1
79	39	11	44	16	40	12
28	22	1	21	»	21	»
21	6	4	8	2	8	2
10	2	3	4	1	5	»
	»	195	»	173	»	118
Diferencias %.	»	9	»	8	»	2,4

Claro está que se pudieran hacer mayor número de aplicaciones para demostrar la utilidad del cálculo de probabilidades en relación con los estudios estadísticos; las indicadas bastan para dar idea del grado de aproximación que puede obtenerse.

FERNANDO GARCÍA ARENAL.

VIAJE Á LA ARGENTINA ⁽¹⁾

III

Industria.

La República Argentina es esencialmente ganadera y agrícola, pero no industrial.

Sabido es que los países evolucionan en sus fuentes de riqueza. Empiezan por vivir de la caza y de la pesca, para ser luego ganaderos; transfórmanse después en agricultores, y sólo cuando hay exceso de población, que no puede toda ella depender de la tierra madre, es cuando se desarrolla la industria. Por último, germinan los gustos artísticos, y unidos éstos á los progresos sociales, dan á los pueblos el esplendor máximo que pueden alcanzar.

Pues bien; la Argentina se encuentra hoy en el período agrícola, y como tiene extensión de territorio para mantener diez veces más labradores de los que contiene, de aquí se deduce que no siente la necesidad de desarrollar las industrias, cuyo producto le es más fácil y económico comprar fuera del país.

Es, además, evidente que para que un país sea industrial necesita dos materias primas esenciales: el carbón y el hierro en cantidad, calidad y económica explotación, y á esta circunstancia deben su riqueza industrial Inglaterra, Francia, Bélgica, Alemania y los Estados Unidos, y por esta razón puede conseguirlo también España.

MINAS.—En la Argentina no hay minas de hierro, y

(1) Véase el número anterior.