

REVISTA DE OBRAS PUBLICAS

PUBLICACIÓN TÉCNICA DEL CUERPO DE INGENIEROS DE CAMINOS. CANALES Y PUERTOS

DIRECTOR

D. MANUEL MALUQUER Y SALVADOR

COLABORADORES

LOS INGENIEROS DE CAMINOS, CANALES Y PUERTOS

SE PUBLICA LOS JUEVES

Dirección y Administración: Plaza de Oriente, 6, primero derecha.

ESTUDIO DE LA CATENARIA

Y DE SUS APLICACIONES MECANICAS

POR D. JOSÉ TOUS Y BIAGGI

Académico de la Real de Ciencias y Artes de Barcelona.

(CONTINUACIÓN)

De la ecuación (1) y de la (3) elevadas al cuadrado y restadas la segunda de la primera resulta la notable propiedad:

$$(6) \quad y^2 - s^2 = 1 : \cos h.^2 x - \sin h.^2 x = 1$$

De sumar las ecuaciones (1) y (3) resulta:

$$y + s = e^x \text{ ó sea } e^x = \cos h. x + \sin h. x$$

de la que se deduce

$$(7) \quad x = l_n(y + s) = l_n(\cos h. x + \sin h. x)$$

La longitud de la tangente np es

$$(8) \quad np = \frac{pq}{\sin \alpha} = y \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} = \frac{(e^x + e^{-x})^2}{2(e^x - e^{-x})} = \frac{y^2}{s} = \frac{\cos h.^2 x}{\sin h. x}$$

La de la normal es

$$(9) \quad pk = \frac{pq}{\cos \alpha} = y \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \frac{1}{4} (e^x + e^{-x})^2 = y^2 = \cos h.^2 x$$

La de la subtangente es

$$(10) \quad nq = \frac{pq}{\tan \alpha} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} = \frac{y}{s} = \frac{\cos h. x}{\sin h. x} = \cot h. x$$

La de la subnormal es

$$(11) \quad qk = pq \tan \alpha = \frac{1}{4} (e^x + e^{-x}) (e^x - e^{-x}) = \frac{1}{4} (e^{2x} - e^{-2x}) = ys = \cos h. x \sin h. x = \frac{\sin h. 2x}{2}$$

Sustituyendo en la fórmula general que da el radio de curvatura los valores de $\frac{d \cdot y}{d \cdot x} \frac{d^2 y}{d \cdot x^2}$ dados por las fórmulas (2) se halla

$$(13) \quad \rho = \frac{\left[1 + \left(\frac{d \cdot y}{d \cdot x}\right)^2\right]^{3/2}}{\frac{d^2 \cdot y}{d \cdot x^2}} = \frac{1}{4} (e^x + e^{-x})^2 = y^2 = \cos h.^2 x,$$

luego el radio de curvatura es igual á la longitud de la normal (9) y también al cuadrado de la ordenada, propiedad sencilla y notable.

De aquí que las coordenadas del centro de curvatura c se encuentren fácilmente, y por ser $pk = cp$ y $qd = qk$, son:

$$(14) \quad x_c = od = oq - qd = x - ys = x - \cos h. x \sin h. x = x - \frac{1}{2} \sin h. 2x$$

$$(15) \quad y_c = cd = 2y = 2 \cos h. x$$

La ecuación de la evoluta, dadas las formas trascendentes usuales bajo las que se expresan s é y , no resulta fácil de hallar; pero lo es bajo la forma de funciones hiperbólicas, pues de las ecuaciones anteriores y de la relación

$$\cos h.^2 x - \sin h.^2 x = 1$$

se deduce

$$\cos h. x = \frac{y_c}{2}; x = \text{arc. cos h. } \frac{y_c}{2}; \sin h. x = \frac{1}{2} \sqrt{y_c^2 - 4}$$

que por sustitución en el valor de x_c dan

$$(16) \quad x_c = \text{arc. cos h. } \frac{y_c}{2} - \frac{y_c}{4} \sqrt{y_c^2 - 4}$$

para la ecuación de la evoluta de la catenaria, si bien hay que notar que, á pesar de su aparente sencillez, los cálculos para su aplicación son tan complicados como los de las ecuaciones primitivas, á menos de disponer de tablas de funciones hiperbólicas inversas. Esta evoluta fg es simétrica con respecto al eje de ordenadas, y presenta en f un punto de

retroceso. La determinación de las coordenadas x , y , del punto g , intersección de la catenaria con su evoluta, que dependen de una difícil eliminación por los procedimientos usuales, puede hacerse con relativa facilidad igualando las abscisas dadas por las ecuaciones (1') (16):

$$\begin{aligned} x_1 &= \text{arc. cos h. } y_1 \\ x_1 &= \text{arc. cos h. } \frac{y_1}{2} - \frac{y_1}{4} \sqrt{y_1^2 - 4} \left\{ \begin{array}{l} \text{arc. cos h. } \frac{y_1}{2} - \\ - \text{arc cos h. } \frac{y_1}{2} + \\ + \frac{y_1}{4} \sqrt{y_1^2 - 4} = 0 \end{array} \right. \end{aligned}$$

que dan:

$$(17) \quad x_1 = 2,04846; \quad (18) \quad y_1 = 3,94247$$

La ecuación de la envolvente de la catenaria puede hallarse también con facilidad por medio de las funciones dichas. Representando por x_e , y_e las coordenadas de esta curva

$$\begin{aligned} x_e &= or = oq - rq = x - s \cos \alpha = x - \frac{s}{y} = x - \frac{\text{sen h. } x}{\cos h. x} \\ y_e &= rt = pq - pl = y - s \text{sen } \alpha = y - \frac{s^2}{y} = \\ &= \cos h. x - \frac{\text{sen h.}^2 x}{\cos h. x} = \frac{1}{\cos h. x} \end{aligned}$$

de aquí se deduce:

$$\cos h. x = \frac{1}{y_e}; \quad \text{sen h. } x = \frac{1}{y_e} \sqrt{1 - y_e^2}$$

y atendiendo á que la ecuación (7) toma la forma

$$x = l \cdot n (\cos h. x + \text{sen h. } x) = l \cdot n \left(\frac{1}{y_e} + \frac{1}{y_e} \sqrt{1 - y_e^2} \right)$$

queda para la ecuación de la envolvente buscada:

$$(19) \quad x_e = l \cdot n \left(\frac{1 + \sqrt{1 - y_e^2}}{y_e} \right) - \sqrt{1 - y_e^2}$$

esta curva presenta dos ramas con un punto de retroceso en m y ambas tienen por asíntota el eje de abscisas. Además, la longitud de su tangente tq vale

$$tq = \frac{rt}{\cos \alpha} = \frac{y - s \text{sen } \alpha}{\cos \alpha}$$

y substituyendo por $\text{sen } \alpha$ y $\cos \alpha$ sus valores y atendiendo á la ecuación (6) resulta

$$tq = y^2 - s^2 = 1$$

luego esta tangente es de longitud constante, en general igual al parámetro de la catenaria, y bajo la hipótesis adoptada de tomar el parámetro igual á la unidad, este es el valor de dicha longitud de tangente. Esta envolvente tiene, pues, esta propiedad, que es la de las curvas que los tratados ingleses de Geometría llaman tractrices. Además, si se considera el punto q como pie de la ordenada y se traza la qt , perpendicular á la tangente, se tiene:

$$tp = pq \text{sen } \alpha = y \frac{s}{y} = s$$

luego el punto t pertenece á la envolvente (prescindiendo de que ésta estuviera trazada), y por la ecuación (6) tq , como se ha dicho antes, es igual al parámetro.

De aquí una construcción geométrica muy sencilla para trazar una tangente á un punto de la catenaria cuyo parámetro es conocido; por el pie q de la ordenada se traza un arco de circunferencia con un radio igual al parámetro, y por el punto p de la catenaria, trazando una tangente pt al arco anterior, se tiene la tangente buscada. Además, el punto de tangencia t es un punto de la envolvente, y por la propiedad dicha de la igualdad de la normal pk con el radio de curvatura, se halla éste gráficamente también.

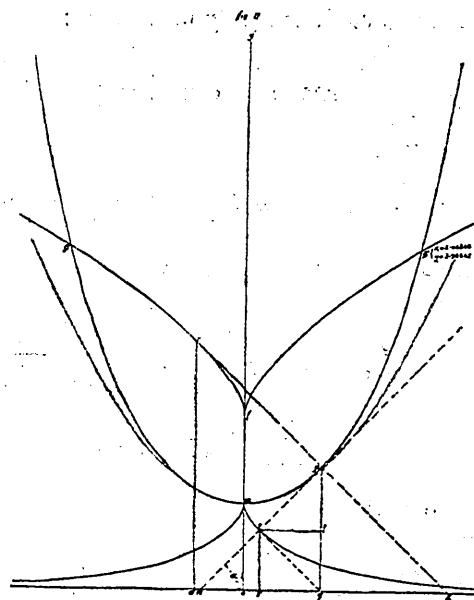
La superficie comprendida entre el eje de abscisas, el de ordenadas, la curva y la ordenada correspondiente á una abscisa x , vale:

$$\begin{aligned} (2) \quad A &= \int_0^x y d \cdot x = \frac{1}{2} \int_0^x (e^x + e^{-x}) d \cdot x = \\ &= \frac{1}{2} (e^x - e^{-x}) = s = \text{sen h. } x \end{aligned}$$

No se equivocó de mucho Galileo al atribuir á la catenaria la forma de una parábola, pues en las inmediaciones del punto más bajo y, en general, para todos los valores de x , menores que el parámetro a , la diferencia no es muy grande. En efecto, tomando la ecuación de la parábola $y^2 = px$ é invirtiendo los ejes, tomando el diámetro que pasa por el vértice por eje de ordenadas, el origen á una distancia a de dicho vértice, y además haciendo $p = \frac{1}{2a}$, la ecuación de la parábola, que tendría los mismos ejes que una catenaria y pasaría por su mismo vértice, tomaría la forma

$$(21) \quad y = a + \frac{x^2}{2a} = a \left(1 + \frac{x^2}{2a^2} \right)$$

y es la línea trazada de puntos en la figura 2.^a



El ángulo de su tangente en un punto cualquiera con el eje de abscisas sería:

$$(22) \quad \frac{d \cdot y}{d \cdot x} = \frac{x}{a}$$

La superficie comprendida entre el eje de ordenadas, el de abscisas, la curva y la ordenada de un punto sería:

$$\begin{aligned} (23) \quad A &= \int_0^x y d \cdot x = \int_0^x \left(a + \frac{x^2}{2a} \right) dx = ax + \frac{x^3}{2 \cdot 3 a} = \\ &= ax \left(1 + \frac{x^2}{2 \cdot 3 a^2} \right). \end{aligned}$$

La longitud del arco comprendido desde el punto más bajo á otro de abscisa x :

$$s = \int_0^x dx \sqrt{1 + \left(\frac{d \cdot y}{d \cdot x}\right)^2} = \int_0^x d \cdot x \sqrt{1 + \left(\frac{x}{a}\right)^2}$$

que desarrollando en serie por el binomio da:

$$(24) \quad s = \int_0^x dx \cdot \left(1 + \frac{1}{2} \frac{x^2}{a^2} - \frac{1}{8} \frac{x^4}{a^4} + \frac{1}{16} \frac{x^6}{a^6} - \dots\right) = x \left(1 + \frac{x^2}{6a^2} - \frac{x^4}{40a^4} + \frac{x^6}{112a^6} - \dots\right)$$

Los desarrollos en serie de

$$e^{\frac{x}{a}} = 1 + \frac{x}{a} + \frac{x^2}{2a^2} + \frac{x^3}{3!a^3} + \frac{x^4}{4!a^4} + \frac{x^5}{5!a^5} + \frac{x^6}{6!a^6} + \dots$$

$$e^{-\frac{x}{a}} = 1 - \frac{x}{a} + \frac{x^2}{2a^2} - \frac{x^3}{3!a^3} + \frac{x^4}{4!a^4} - \frac{x^5}{5!a^5} + \frac{x^6}{6!a^6} - \dots$$

dan para la catenaria:

$$(25) \quad y = \frac{a}{2} \left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}} \right) = a \left(1 + \frac{x^2}{2a^2} + \frac{x^4}{4!a^4} + \frac{x^6}{6!a^6} + \dots \right)$$

para el ángulo de la tangente con el eje de abscisas:

$$(26) \quad \frac{d \cdot y}{d \cdot x} = \frac{1}{2} \left(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}} \right) = \frac{x}{a} \left(1 + \frac{x^2}{3!a^2} + \frac{x^4}{5!a^4} + \frac{x^6}{7!a^6} + \dots \right)$$

para la superficie en la forma indicada:

$$(27) \quad A = \int_0^x y dx = \int_0^x a \left(1 + \frac{x^2}{2a^2} + \frac{x^4}{4!a^4} + \frac{x^6}{6!a^6} + \dots \right) d \cdot x = ax \left(1 + \frac{x^2}{3!a^2} + \frac{x^4}{5!a^4} + \frac{x^6}{7!a^6} + \dots \right)$$

y para el arco:

$$(28) \quad s = \frac{a}{2} \left(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}} \right) = x \left(1 + \frac{x^2}{6a^2} + \frac{x^4}{120a^4} + \frac{x^6}{5040a^6} + \dots \right)$$

que, como se ve, comparados con los valores respectivos hallados antes para la parábola para valores de $\frac{x}{a}$ menores que la unidad, difieren poco los unos de los otros, por lo que, en algunas aplicaciones que no necesiten gran aproximación, se puede considerar la catenaria como una parábola. Las ecuaciones anteriores dan la medida del error que se comete con esta asimilación.

Para el estudio de las propiedades de la catenaria la magnitud del parámetro tiene poco interés, mas no sucede lo mismo en las aplicaciones, sobre todo las que se refieren

á la colocación de cables y al estudio de su resistencia. Esta cuestión versa siempre sobre la determinación del parámetro dicho, la que resulta complicada por la forma transcendente de las ecuaciones en que entra.

En la mayoría de casos de la práctica el problema se presenta bajo la forma siguiente: dada la longitud de la cuerda, cable ó cadena y la posición de sus extremos, determinar la forma de la misma. Este problema se resuelve generalmente del modo siguiente:

Sean: $x' y'$ las coordenadas del punto más alto (supuesto x' positiva).
 $x'' y''$ las ídem íd. más bajo.
 $d = x' - x''$ la distancia horizontal, conocida entre los mismos.
 $h = y' - y''$ la ídem vertical ídem íd.
 l la longitud de cuerda ó cable que se suspende.

Si en las ecuaciones (1) y (3) se restablece $\frac{y}{a} \frac{x}{a} \frac{s}{a}$ en vez de y, x, s , siendo a el parámetro de la catenaria que se busca, se tendrá

$$l = s' - s'' = \frac{a}{2} \left(e^{\frac{x'}{a}} - e^{-\frac{x'}{a}} - e^{\frac{x''}{a}} + e^{-\frac{x''}{a}} \right)$$

$$h = y' - y'' = \frac{a}{2} \left(e^{\frac{x'}{a}} + e^{-\frac{x'}{a}} - e^{\frac{x''}{a}} - e^{-\frac{x''}{a}} \right)$$

que elevadas al cuadrado, restadas y reduciendo, dan:

$$(29) \quad l^2 - h^2 = a^2 \left(e^{\frac{d}{2a}} - e^{-\frac{d}{2a}} \right)^2$$

de donde por aproximaciones sucesivas se puede determinar a .

Además, dividiendo la suma de l y h por su diferencia se halla:

$$\frac{l+h}{l-h} = \frac{e^{\frac{x'}{a}} - e^{\frac{x''}{a}}}{e^{\frac{x''}{a}} - e^{-\frac{x'}{a}}} = e^{\frac{x' + x''}{a}}$$

de donde se deduce:

$$(30) \quad x' + x'' = al \cdot n \frac{l+h}{l-h}$$

y como

$$x' - x'' = d$$

se hallan fácilmente x' y x'' que resuelven el problema.

En muchas aplicaciones puede hallarse el valor a con bastante rapidez por desarrollo en serie del modo siguiente:

$$\sqrt{l^2 - h^2} = a \left(1 + \frac{d}{2a} + \frac{1}{2} \frac{d^2}{4a^2} + \frac{1}{3!} \frac{d^3}{8a^3} + \dots \right)$$

$$- 1 + \frac{d}{2a} - \frac{1}{2} \frac{d^2}{4a^2} + \frac{1}{3!} \frac{d^3}{8a^3} - \dots$$

que se reduce á

$$\sqrt{l^2 - h^2} = d \left(1 + \frac{1}{24} \frac{d^2}{a^2} + \dots \right)$$

que despreciando los términos siguientes de la serie, de los que el inmediato vale sólo $\frac{1}{1920} \frac{d^4}{a^4}$, resulta:

$$(31) \quad a = \frac{1}{\sqrt{24}} \sqrt{\frac{d^3}{l^2 - h^2 - d}} = 0.2041 \sqrt{\frac{d^3}{l^2 - h^2 - d}}$$

que por medio de unas tablas usuales de cuadrados y cubos se puede hallar con suma rapidez. Este valor así hallado, dado el pequeño valor del primer término despreciado de la serie, para valores de $\frac{d}{a}$ inferiores á la unidad, será ya muy exacto. Asimismo el valor de $x' + x''$ vendrá dado por

$$(32) \quad x' + x'' = 2.3026 a \log \frac{l+h}{l-h}$$

que juntamente con $x' - x'' = d$ permite hallar x' y x'' por medio de unas tablas de logaritmos usuales.

En el caso, bastante frecuente, de una catenaria de cuerda horizontal, en la que $h = 0$, las fórmulas anteriores se reducen á:

$$(33) \quad a = 0.2041 d \sqrt{\frac{d}{l-d}}; \quad x' = -x'' = \frac{d}{2}$$

En este caso es también bastante importante el trazado de la catenaria y determinación de su parámetro cuando se conoce sólo la cuerda horizontal y la flecha, como sucede en el caso de cables de transporte ó eléctricos.

Para esto conviene referir la ecuación general á un eje de abscisas que pase por el vértice, con lo que la ordenada es igual á la flecha, que se denominará f , y resulta:

$$y = f = \frac{a}{2} \left(e^{\frac{d}{2a}} + e^{-\frac{d}{2a}} - 2 \right)$$

por ser la ordenada aquí igual á la ordenada de la ecuación general menos a , y la abscisa x igual á la mitad de la cuerda d . Desarrollando el valor de f en serie y reduciendo queda:

$$f = \frac{a}{2} \left[\left(\frac{d}{2a} \right)^2 + \frac{1}{3 \cdot 4} \left(\frac{d}{2a} \right)^4 + \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} \left(\frac{d}{2a} \right)^6 + \dots \right]$$

que puede ponerse bajo la forma

$$f = d \left(\frac{1}{8} \frac{d}{a} + \frac{1}{384} \left(\frac{d}{a} \right)^3 + \frac{1}{23040} \left(\frac{d}{a} \right)^5 + \dots \right)$$

que siempre que $\frac{d}{a}$ sea algo menor que la unidad con gran aproximación se puede tomar

$$(34) \quad f = \frac{1}{8} \frac{d^2}{a} \text{ que da para } a: a = \frac{1}{8} \frac{d^2}{f}$$

asimismo, dada la cuerda y la flecha, se puede hallar con gran aproximación la longitud l , observando que

$$\frac{1}{2} = s = \frac{a}{2} \left(e^{\frac{d}{2a}} - e^{-\frac{d}{2a}} \right)$$

desarrollada en serie da

$$l = 2a \left[\frac{d}{2a} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} \left(\frac{d}{2a} \right)^3 + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} \left(\frac{d}{2a} \right)^5 + \dots \right]$$

que poniendo en vez de a su valor hallado anteriormente da para la diferencia entre la longitud del arco y la cuerda

$$l - d = \frac{d}{6} \left[\left(\frac{4f}{d} \right)^2 + \frac{1}{20} \left(\frac{4f}{d} \right)^4 + \dots \right]$$

y como en estos casos, antes referidos, la relación de la flecha á la cuerda es tal que $\frac{4f}{d}$ es muy inferior á la unidad, resulta muy exacto tomar sólo el primer término de la serie que da

$$(35) \quad l - d = \frac{8}{3} \frac{f^2}{d}$$

fórmulas todas ellas muy sencillas si se comparan con las generales, largas de calcular por su forma transcendente. Es verdad que si se poseen tablas de funciones hiperbólicas, el cálculo se reduce grandemente; pero aparte de que estas tablas son poco usadas, si se quiere exactitud hay que recurrir á tablas algo completas, como las de Ligowski, Gudermann ú otras análogas, pues las pequeñas resultan poco exactas para estas aplicaciones.

En todas las aplicaciones al trazado de cables inclinados y planos referentes á su instalación, como los ejes caen muchas veces fuera del papel, es preferible referir la curva á ejes que pasen por el punto inferior de la misma, cosa que resulta fácil, poniendo en las ecuaciones generales en vez de $y, x, y + y'', x + x''$, siendo y'', x'' las coordenadas de dicho extremo inferior. Sería preferible poder tomar como ejes coordenados la cuerda y una perpendicular á la misma, mas las fórmulas generales resultan demasiado complicadas y largas de calcular.

(Continuará.)

CONTADORES DE MOTOR

SU EMPLEO Y SU CONTRASTE

Consideraciones particulares sobre los modelos Isaria Werke de Munich.

(Continuación.)

De las precedentes consideraciones se deducen las conclusiones siguientes: gran par con pequeño consumo en la derivación y peso mínimo del inducido. Estas condiciones las cumple en absoluto el inducido abierto en tres partes del contador de corriente continua Isaria, y además esta disposición pone otra ventaja: que el colector puede ser de tres piezas solamente y tener, por consecuencia, un diámetro muy pequeño, lo que reduce el desgaste de las escobillas á su mínimo. Un arrollamiento del cortacircuito en el inducido preserva al colector contra la formación de chispas; este arrollamiento recibe la corriente de inducción que se produce al paso de las escobillas de un segmento al otro.

La construcción de las escobillas se ha hecho con el mayor cuidado posible; ha sido el coronamiento de una serie de experiencias hechas con más de 50 modelos diferentes.

Una buena escobilla debe llevar las condiciones siguien-