

REVISTA DE OBRAS PUBLICAS

PUBLICACIÓN TÉCNICA DEL CUERPO DE INGENIEROS DE CAMINOS, CANALES Y PUERTOS

DIRECTOR

D. MANUEL MALUQUER Y SALVADOR

COLABORADORES

LOS INGENIEROS DE CAMINOS, CANALES Y PUERTOS

SE PUBLICA LOS JUEVES

Dirección y Administración: Plaza de Oriente, 6, primero derecha.

TEORÍA DE LAS LÍNEAS DE INFLUENCIA

PARA EL CÁLCULO DE LOS PUENTES METÁLICOS

(CONTINUACIÓN)

Esfuerzos cortantes.

Las ecuaciones de las líneas de influencia relativa á los esfuerzos cortantes se obtienen derivando con relación á x las ecuaciones (1) y (2) de las líneas de influencia de los momentos flectores.

$$E = P \frac{l-x}{l} - \frac{\mu_k - 1 - \mu_k}{l} \quad \text{para } x > a.$$

$$E = -P \frac{x}{l} - \frac{\mu_k - 1 - \mu_k}{l} \quad \text{para } x < a.$$

Trataremos del estudio de estas líneas para el mismo caso particular que se ha hecho para los momentos flectores; sea la misma viga simétrica de seis tramos, suponiendo que la sección cuya línea de influencia vamos á estudiar está en el tercer tramo.

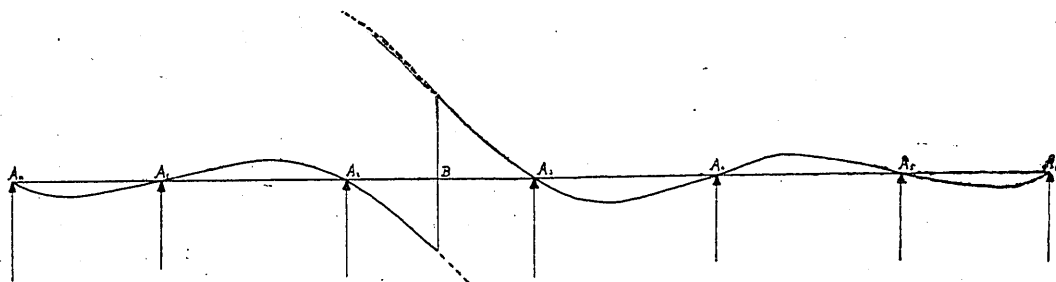


Fig. 16.

Las ecuaciones de la línea de influencia serán:

Primer tramo. $E = -\frac{\mu_1}{ml}$,

que es una curva que pasa por los dos apoyos del tramo, siendo todas sus ordenadas negativas (6) (fig. 16).

Segundo tramo. $E = -\frac{\mu_2 - \mu_1}{l}$;

la curva de esta ecuación se obtiene restando de las ordenadas positivas de la curva $\frac{\mu_1}{l}$ las negativas de la $\frac{\mu_2}{l}$, ó sea la suma

aritmética, lo que nos da otra curva que pasa también por los apoyos del tramo, teniendo positivas sus ordenadas.

$$\text{Tercer tramo...} \begin{cases} E = P \frac{l-x}{l} - \frac{\mu_3 - \mu_2}{l} & \text{para } x > a. \\ E = P \frac{x}{l} - \frac{\mu_3 - \mu_2}{l} & \text{para } x < a. \end{cases}$$

Haciendo el mismo razonamiento hecho anteriormente, veremos que $\frac{\mu_3 - \mu_2}{l}$ es la representación de una curva que, pasando por los apoyos, tiene sus ordenadas positivas. Si trazamos ahora las rectas, cuyas ecuaciones son $y = \frac{P}{l}(l-x)$ y $y = -\frac{P}{l}x$, y restamos de sus ordenadas las de la curva auxiliar antes dicha, obtendremos la curva E .

La recta primera pasa por el apoyo A_2 y tiene todas sus ordenadas de la derecha positivas, y la segunda pasa por el apoyo A_4 teniendo negativas sus ordenadas de la izquierda, de manera que al restar de las ordenadas de estas rectas las de la curva $\frac{\mu_3 - \mu_2}{l}$ se forman otras dos curvas, presentando ambas su con-

vexidad al eje de las x (fig. 16); una de ellas parte de A_2 , cuyas ordenadas positivas crecen hacia la derecha, y la otra, partiendo de A_4 , tiene negativas sus ordenadas creciendo hacia la izquierda. Ambas curvas quedan limitadas en la vertical de la sección B.

Cuarto tramo. $E = -\frac{\mu_4 - \mu_3}{l}$.

Curva de ordenadas positivas que pasa por los apoyos.

Quinto tramo. $E = -\frac{\mu_5 - \mu_4}{l}$.

Esta curva es análoga á la anterior, pero de ordenadas negativas.

$$\text{Sexto tramo. } E = \frac{\mu_5}{ml}$$

Tiene ordenadas positivas y pasa por los apoyos del tramo.

Todas estas curvas son tangentes entre sí en los apoyos, porque los valores de las derivadas en dichos puntos son iguales. Además vemos que en todas las ecuaciones anteriores no entra para nada la cantidad a , lo que nos dice que la forma de las curvas es igual para los tramos no cargados cualquiera que sea la sección que consideremos y el tramo donde esté. La curva total correspondiente a un tramo cargado se compone de dos ramas paralelas que terminan en la vertical de la sección B .

Trazado gráfico de las líneas de influencia.—Para la construcción de estas líneas se pueden seguir los mismos métodos que para las de los momentos flectores, bien valiéndonos de sus ecuaciones directamente ó haciendo uso de las tablas de A. Cart, y también por medio de la Estática gráfica, dibujando previamente el diagrama de las z de los esfuerzos cortantes de la manera siguiente:

Derivando dos veces las ecuaciones $E = F(x)$ de las líneas de influencia en cada tramo, se obtendrán ecuaciones de primer grado de la forma

$$z = \frac{d^2E}{dx^2} = Ax + B,$$

que representan, lo mismo que en el caso de los momentos flectores, una serie de líneas rectas unidas por sus extremos (figura 17), y pasando por uno de los focos de cada tramo (menos en el de la sección), y cuyo conjunto forma la línea quebrada $A_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, A_6$.

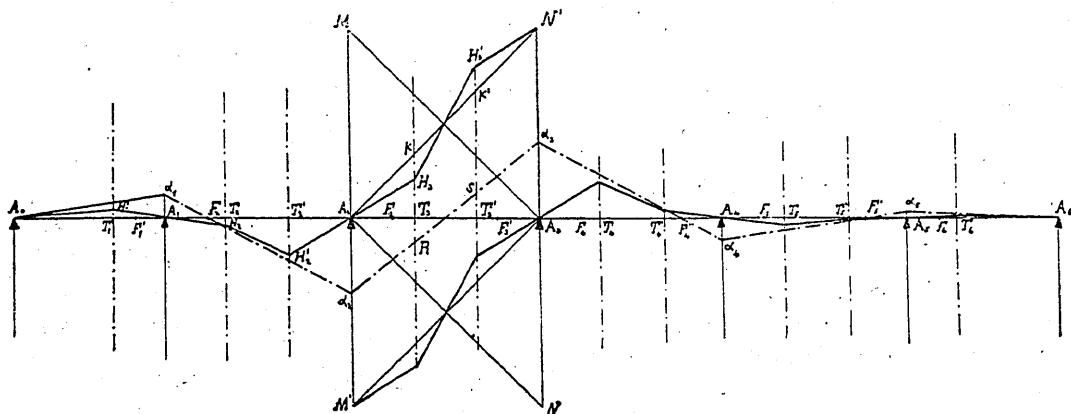


Fig. 17.

Consideremos dividida la viga en elementos infinitamente pequeños dx , y supongamos que sobre cada uno de éstos actúa una fuerza en sentido vertical valuada en $\frac{1}{2} z dx$, la curva funicular de esta serie de fuerzas, trazada con una distancia polar $\frac{1}{3}$, es la línea de influencia de los esfuerzos cortantes para una sección cualquiera del tramo.

El trazado previo del polígono de tangentes en los apoyos facilita mucho la construcción cualquiera que sea el método que se adopte, pues no es más que la línea quebrada formada por las tangentes a la línea de influencia en los apoyos y su encuentro con las trisectrices, cuya obtención, análogamente a lo dicho al tratar de los momentos flectores, está fundada en las propiedades generales de las curvas funiculares, procediéndose para su construcción como sigue.

Sobre las verticales de los apoyos se toman las magnitudes $A_1M' = A_1M$ y $A_2N' = A_2N$, las ramas de la línea de influencia tienen que pasar por los puntos N' y M' ; trácense las rectas A_1N' y A_2M' y sobre las verticales trisectrices tomemos las longitudes $KH_1 = T_1R$ y $K'H' = T_1S$, las rectas A_1H_1 y $N'H'$ son las tangentes en los puntos A_1 y N' a la línea de influencia; si prolongamos A_1H_1 hasta su intersección en H'_1 con la segunda

trisectriz del segundo tramo, uniendo después H'_1 con el foco F_1 hasta que corte a la primera trisectriz, la recta $A_1H'_1$ será la tangente a la línea de influencia en A_1 . Procediendo de esta manera a uno y otro lado del tramo que se ha tomado, por ejemplo, tendremos el polígono de tangentes en los apoyos (fig. 17).

Determinación de los momentos flectores producidos por el peso de un tren.

Supongamos que sobre una viga, en vez de actuar una sola fuerza, obran varias $P, P', P'', \dots$ y queremos saber el momento flector que se produce sobre una sección dada de la viga. Para ello dibujaremos la línea de influencia correspondiente a esa sección y para una fuerza igual a la unidad (una tonelada métrica); llamemos $\mu, \mu', \mu'', \dots$ las ordenadas de esta línea en los puntos en que actúan las fuerzas $P, P', P'', \dots$ y veremos que si una fuerza unidad produce en la sección designada un momento flector μ , una fuerza P cargando sobre el mismo punto ocasionará un momento flector $P\mu$. Análogamente, las fuerzas $P', P'', \dots$ producirán en la misma sección momentos flectores iguales a $P'\mu', P''\mu'', \dots$, y el momento flector total será

$$M = P\mu + P'\mu' + P''\mu'' + \dots \pm P\mu.$$

En los cálculos de los puentes metálicos, el sistema de fuerzas móviles que hay que considerar en el formado por los trenes tipos que marca la Instrucción para la redacción de proyectos de puentes metálicos, aprobada por Real orden de 25 de Mayo de 1902, que son tres distintos, según se trate de puentes para ferrocarril de vía normal ó de vía estrecha, ó de carreteras. El

problema que nos proponemos resolver es el determinar la posición del tren tipo que ocasiona en una sección dada el movimiento flector máximo, supuesta determinada por los métodos anteriores la línea de influencia correspondiente a la expresada sección, bien sea por su ecuación ó por su trazado gráfico.

Distinguiremos dos casos: primero, que la sección esté comprendida entre los dos focos de un tramo cualquiera; y segundo, que esté situada entre uno de los apoyos y el foco inmediato.

La forma de la línea de influencia en el primer caso es la representada en la figura 9.ª, en la que puede observarse que las mayores ordenadas corresponden al tramo en el cual esté la sección de que se trata; luego el momento flector máximo positivo tendrá lugar al paso del tren por dicho tramo cuando las cargas mayores vengán a corresponderse con ordenadas mayores, para que los productos $P\mu$ sean lo más grande posible; además, deberá suponerse el tren cortado al llegar al apoyo, pues la parte de éste que haya entrado en el tramo contiguo producirá siempre un momento flector de signo contrario que disminuirá el máximo. Por el contrario, el momento flector máximo negativo se verificará cuando el tren ocupe uno de los tramos contiguos a aquel que contenga la sección, suponiéndole también cortado al llegar al apoyo del tramo inmediato.

En el segundo caso, la sección B del tercer tramo comprendi-

da entre el apoyo A_2 y el foco F_2 puede observarse por la configuración de su línea de influencia (fig. 11) que el momento flector máximo positivo aparece cuando el tren esté sobre el primer tramo, igualmente que sobre el cuarto y en la parte A_2F_2 del tercero. Si la sección estuviese entre el apoyo A_2 y el foco F_2 , las posiciones que podría ocupar el tren para desarrollar el momento positivo serán en los tramos segundo y quinto y en la parte A_2F_2 del tramo tercero. Análogamente, el mayor momento flector negativo tendrá lugar, en el caso de la figura, cuando el tren esté en el segundo tramo solamente ó en el segundo y tercero a la vez, y si la sección está situada entre A_2 y F_2 , el tren ha de estar en el cuarto tramo ó en los tercero y cuarto.

En vista de todas estas consideraciones, las posiciones del tren que tenemos que estudiar para hallar la expresión general del momento flector producido por su paso en una sección determinada (que supondremos está en el tercer tramo de la viga de seis) y determinar después sus máximos, son:

- 1.º El tren carga el segundo y tercer tramo.
- 2.º El ídem id. el tercero y cuarto ídem.
- 3.º El ídem id. el tercer ídem.
- 4.º El ídem id. otro tramo que no el tercero.

Primera posición.—Habrá que considerarla en el caso de la figura 11. Las ecuaciones de las tres ramas de la línea de influencia que hay en el segundo y tercer tramo son las siguientes:

$$\text{Rama } A_1A_2. \quad \mu_1 = \frac{\mu_2}{l} (l - a) + \frac{a\mu_3}{l} = F_1(x).$$

$$\text{Rama } A_2B. \quad \mu_2 = \frac{l-a}{l} x + \frac{\mu_3}{l} (l-a) + \frac{a\mu_3}{l} = F_2(x).$$

$$\text{Rama } BA_3. \quad \mu_3 = \frac{a}{l} (l-x) + \frac{\mu_2}{l} (l-a) + \frac{a\mu_3}{l} = F_3(x).$$

Llamando, respectivamente, P_1 , P_2 y P_3 a los pesos de los ejes del tren que gravitan en las partes de la viga A_1A_2 , A_2B y BA_3 , la expresión del momento flector total será:

$$M = \Sigma P_1\mu_1 + \Sigma P_2\mu_2 + \Sigma P_3\mu_3,$$

y desarrollando las funciones μ_1 , μ_2 , μ_3 por la fórmula de Macheurin, se tendrá:

$$\begin{aligned} M = & F_1(0)\Sigma P_1 + F_1'(0)\Sigma P_1x + \frac{1}{2} F_1''(0)\Sigma P_1x^2 + \frac{1}{6} F_1'''(0)\Sigma P_1x^3 \\ & + F_2(0)\Sigma P_2 + F_2'(0)\Sigma P_2x + \frac{1}{2} F_2''(0)\Sigma P_2x^2 + \frac{1}{6} F_2'''(0)\Sigma P_2x^3 \\ & + F_3(0)\Sigma P_3 + F_3'(0)\Sigma P_3x + \frac{1}{2} F_3''(0)\Sigma P_3x^2 + \frac{1}{6} F_3'''(0)\Sigma P_3x^3. \end{aligned}$$

Recordando que μ_1 , μ_2 , μ_3 son funciones de x , y tomando el punto A_2 como centro de coordenadas para todas las ecuaciones, podemos escribir:

$$F_1(0) = F_2(0) = 0$$

$$F_3(0) = a$$

$$F_1'(0) = F_2'(0) = \frac{l-a}{l}$$

$$F_3'(0) = \frac{a}{l}$$

$$F_1''(0) = F_2''(0) = F_3''(0)$$

$$F_1'''(0) = CF_3'''(0)$$

$$F_2'''(0) = F_3'''(0),$$

siendo C una cantidad conocida, que por lo complicado de su ex-

presión se representa abreviadamente, y sustituyendo y simplificando se obtiene:

$$\begin{aligned} (I) \quad M = & F_1(0)\Sigma P + F_1'(0)\Sigma Px + \frac{1}{2} F_1''(0)\Sigma Px^2 + \Sigma P_1(x-a) \\ & + \Sigma P_2(x-a) - \frac{1}{6} (1-C)F_1'''(0)x^3. \end{aligned}$$

Introduzcamos ahora en esta fórmula las constantes siguientes que corresponden al tren tipo: la abscisa λ del centro de gravedad G del tren, y la distancia h del centro de uno cualquiera de sus ejes a la vertical del centro de gravedad, resultando las fórmulas transformadas como sigue:

$$\Sigma Px^3 = \Sigma Ph^3 + 3\lambda\Sigma Ph^2 + 3\lambda^2\Sigma Ph + \lambda^3\Sigma P$$

$$\Sigma Px^2 = \Sigma Ph^2 + 2\lambda\Sigma Ph + \lambda^2\Sigma P$$

$$\Sigma Px = \Sigma Ph + \lambda\Sigma P.$$

Ahora bien; ΣPh^3 es el momento de tercer orden del tren que llamaremos K , así como ΣPh^2 es el momento de inercia que designamos I ; la suma de todas las fuerzas con relación al centro de gravedad es ΣPh que es nula, y ΣP es la suma de las fuerzas que representamos por Π , de modo que las anteriores ecuaciones se transcriben en esta forma:

$$\Sigma Px^3 = K + 3I\lambda + I\lambda^3$$

$$\Sigma Px^2 = I + \Pi\lambda^2$$

$$\Sigma Px = \Pi\lambda.$$

Sustituyendo estos valores en la expresión (I), tenemos:

$$\begin{aligned} M = & \Pi \left[F_1'(0) + F_2'(0)\lambda + \frac{1}{2} F_1''(0)\lambda^2 + \frac{1}{6} F_1'''(0)\lambda^3 \right] \\ & + \frac{I}{2} [F_1''(0) + F_2''(0)] + \frac{K}{6} F_1'''(0) + \Sigma P_1(x-a) + \Sigma P_2(x-a) \\ & - \frac{1}{6} (1-C)F_1'''(0)\Sigma P_1x^3. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (A) \quad \dots \quad M = & \Pi F_1(\lambda) + \frac{I}{2} F_1''(\lambda) + \frac{K}{6} F_1'''(\lambda) + \Sigma P_1(x-a) \\ & + \Sigma P_2(x-a) - \frac{1}{6} (1-C)F_1'''(0)\Sigma P_1x^3. \end{aligned}$$

Si en lugar de hacer entrar sólo en la expresión $F_1(0)$ y sus derivadas hubiéramos hecho lo propio con $F_1(0)$ y las suyas, resultaría:

$$\begin{aligned} (A') \quad \dots \quad M = & \Pi F_1(\lambda) + \frac{1}{2} F_1''(\lambda) + \frac{K}{6} F_1'''(\lambda) + \Sigma P_2(x-a) \\ & - \frac{1}{6} (1-C)F_1'''(0)\Sigma P_2x^3. \end{aligned}$$

La primera fórmula nos servirá cuando supongamos que el tren marcha sobre un puente de derecha a izquierda, y la segunda cuando lo haga en sentido contrario. Para la investigación del momento flector próximo no hay más que derivar las fórmulas (A) y (A'), y teniendo en cuenta que

$$F_1'''(0) = F_1'''(\lambda) \text{ y } F_2'''(0) = F_2'''(\lambda)$$

tendremos

$$\begin{aligned} (a) \quad \dots \quad \frac{dM}{d\lambda} = & \Pi F_1'(\lambda) + \frac{1}{2} [I - (1-C)\Sigma P_1x^2] \\ & F_1''(\lambda) + \Sigma P_1 + \Sigma P_2 \end{aligned}$$

$$(a') \quad \dots \quad \frac{dM}{d\lambda} = \Pi F_1'(\lambda) + \frac{1}{2} [I - (1-C)\Sigma P_2x^2] F_1''(\lambda) + \Sigma P_2.$$

Segunda posición. Por el mismo procedimiento llegaríamos a las expresiones siguientes, siendo A_2 el origen de coordenadas:

$$(B) \dots M = \Pi F_4(\lambda) + \frac{I}{2} F''_4(\lambda) + \frac{1}{6} [K - (1 - C) \Sigma P_3 x^3] F'''_4(\lambda) + \Sigma P_2(x - a)$$

$$(B') \dots M = \Pi F_2(\lambda) + \frac{I}{2} F''_2(\lambda) + \frac{1}{6} [K - (1 - C) \Sigma P_4 x^3] F'''_2(\lambda) - \Sigma P_3(x - a) - \Sigma P_4(x - a)$$

$$(b) \dots \frac{dM}{d\lambda} = \Pi F'_4(\lambda) + \frac{1}{2} [I - (1 - C) \Sigma P_3 x^2] F'''_4(\lambda) + \Sigma P_2$$

$$(b') \dots \frac{dM}{d\lambda} = \Pi F'_2(\lambda) + \frac{1}{2} [I - (1 - C) \Sigma P_4 x^2] F'''_2(\lambda) - \Sigma P_3 - \Sigma P_4$$

Tercera posición. Teniendo en cuenta que $P_1 = 0$ y $P_4 = 0$ las expresiones M y $\frac{dM}{d\lambda}$ serán:

$$(C) \dots M = \Pi F_3(\lambda) + \frac{I}{2} F''_3(\lambda) + \frac{K}{6} F'''_3(\lambda) + \Sigma P_3(x - a)$$

$$(C') \dots M = \Pi F_2(\lambda) + \frac{I}{2} F''_2(\lambda) + \frac{K}{6} F'''_2(\lambda) - \Sigma P_2(x - a)$$

$$(c) \dots \frac{dM}{d\lambda} = \Pi F'_3(\lambda) + \frac{I}{2} F'''_3(\lambda) + \Sigma P_3$$

$$(c') \dots \frac{dM}{d\lambda} = \Pi F'_2(\lambda) + \frac{I}{2} F'''_2(\lambda) - \Sigma P_2$$

Cuarta posición. Siendo el segundo tramo el cargado las fórmulas son:

$$(D) \dots M = \Pi F_4(\lambda) + \frac{I}{2} F''_4(\lambda) + \frac{K}{6} F'''_4(\lambda)$$

$$(d) \dots \frac{dM}{d\lambda} = \Pi F'_4(\lambda) + \frac{I}{2} F'''_4(\lambda)$$

Igualando a cero la derivada de M con la relación a λ y despejando λ , obtendremos para cada una de las posiciones dichas del tren la particular que produce en la sección el momento flector máximo positivo ó negativo según los casos, pero es preferible llegar a este resultado siguiendo el método que vamos a explicar partiendo de la base de estar dibujadas las líneas de influencia; distinguiremos los casos que se expresan a continuación según sea la posición de la sección B en el tramo y según se trate de hallar el máximo positivo ó el negativo.

ANTONIO LÓPEZ FRANCO.

(Se continuará.)

MAREÓMETROS Y MAREÓGRAFOS DE SIFÓN

POR

EDUARDO MIER Y MIURA

PRIMERA PARTE

TEORÍA DE LOS MAREÓMETROS Y MAREÓGRAFOS DE SIFÓN

(CONTINUACIÓN)

Aparece en ella la inevitable rama libre del mareómetro A , el flotante B y la polea C , montada en una armadura, sujeta a la boca del tubo. Pasa por esa polea el cordón DD , de cuyo extremo derecho pende un delgado tubo de cristal EE , guiado por cuatro anillos fijos gg , cuya sección horizontal, en mayor tamaño, va indicada en el mismo grabado, en S .

Sumérgese una de las ramas de ese sifón en un depósito de

agua FF , de nivel constante, ó de dimensiones suficientemente grandes para que, prácticamente, pueda admitirse esa constancia y puede moverse la otra en el interior de un tubo de mayor diámetro, que sale de la boca de un frasco G .

Una vez cargado el sifón, la cantidad de agua que del depósito F se transvase al frasco G , claro resulta que es proporcional para una situación dada, al tiempo en que esa transvasación se verifique; y que, para posiciones diferentes, en el mismo espacio de tiempo, la cantidad de líquido que en el frasco G se recoja, será proporcional a la diferencia de nivel que exista entre la superficie líquida de FF y el extremo de la rama de sifón E' .

Hay, por lo tanto, proporcionalidad directa entre las cantidades de agua que a G pasan y los desniveles antes citados; la hay también entre aquéllos y los tiempos, y existirá proporción directa entre los productos de los desniveles por los correspondientes tiempos y las cantidades de aguas transvasadas.

Supongamos elevado el sifón hasta que su rama E quede a flor de agua, y fácilmente se ve que los desniveles de que antes hemos hablado no son otra cosa que las elevaciones que la superficie del mercurio en la rama A va experimentando, y como éstas son directamente proporcionales a las aguas del mar, por esta larga

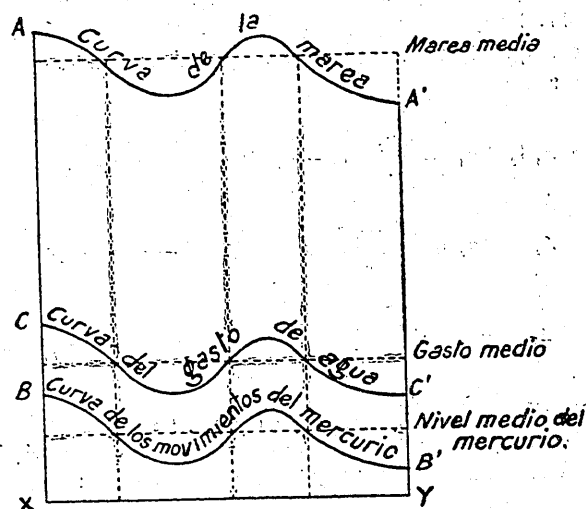


Fig. 22.

serie de relaciones que hemos enumerado, resulta en definitiva que el agua recogida en el frasco G , durante un espacio determinado de tiempo, siendo directamente proporcional al producto de las alturas que el agua de mar ha ido tomando por el tiempo en que se han sostenido en ellas, es, ni más ni menos, que el valor de la superficie $XAA'Y$ (fig. 22), multiplicado por un coeficiente de proporcionalidad.

En esa figura, al par que sobre el eje XY de los tiempos se han levantado las ordenadas $XA \dots YA'$, que miden las alturas de las aguas del mar, hemos representado en la curva BB' las correspondientes oscilaciones del mercurio, y en CC' los gastos de agua del sifón, resultando tres curvas iguales ó posiciones distintas de una misma. La cantidad de agua recogida da directamente la superficie $XCC'Y$ y su división por XY proporciona el gasto medio del que inmediatamente se deducirá la marea media.

Aclaremos todo esto con un ejemplo. Si N es el número de centímetros cúbicos de líquido recogidos en el frasco durante veinticuatro horas, el cociente $\frac{N}{86400s}$ nos dará el gasto me-

dio $g = \frac{N}{86400s}$, y como a cada gasto corresponde una posición fija del sifón, sabremos cuál es la de su vértice E , y, por lo tanto, la del mercurio y la de la superficie del nivel del mar, ó sea el nivel medio de éste durante las veinticuatro horas consideradas.

Tanto este mareómetro totalizador, como el precedente, tienen el defecto de no indicar cuáles sean los máximos y mínimos