

REVISTA DE OBRAS PUBLICAS

PUBLICACIÓN TÉCNICA DEL CUERPO DE INGENIEROS DE CAMINOS, CANALES Y PUERTOS

DIRECTOR

D. MANUEL MALUQUER Y SALVADOR

COLABORADORES

LOS INGENIEROS DE CAMINOS, CANALES Y PUERTOS

SE PUBLICA LOS JUEVES

Dirección y Administración: Plaza de Oriente, 6, primero derecha.

TEORÍA DE LAS LÍNEAS DE INFLUENCIA PARA EL CÁLCULO DE LOS PUENTES METÁLICOS

(CONTINUACIÓN)

Líneas de influencia correspondientes á los apoyos.—Son las líneas representativas de las ecuaciones $\mu = F(x)$ obtenidas anteriormente, siendo todas de la forma

$$\mu = Kf(x) + K_1f_1(x)$$

de manera que para dibujarlas habrá que trazar primeramente las curvas cuyas ecuaciones sean

$$\left. \begin{aligned} y = f(x) &= -\frac{P}{l^3} x(l^2 - x^2) \\ y = f_1(x) &= -\frac{P}{l^3} x(l - x)(2l - x) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (10)$$

multiplicar luego las ordenadas de la primera por K , las de la segunda por K_1 y sumar después algebraicamente.

Las dos ecuaciones (10) no se diferencian entre sí más que en el cambio de x por $l - x$, lo que nos dice que ambas curvas son simétricas una de otra con relación á la perpendicular en el punto medio del tramo, y en vista de esto nos limitaremos á hacer el estudio de una de ellas únicamente, la primera por ejemplo; desde luego vemos que para $x = 0$ resulta $y = 0$, y para $x = l$ $y = 0$, lo que nos indica que la curva pasa por los dos apoyos

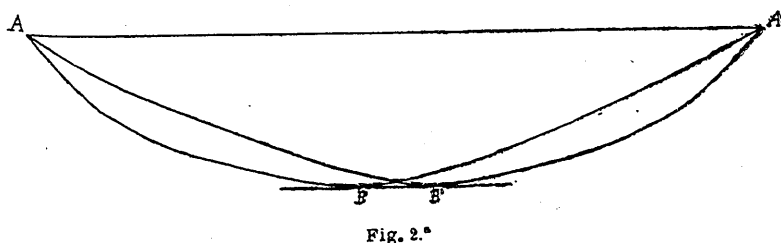


Fig. 2.ª

del tramo (fig. 2.ª); observaremos además que para todos los valores de x comprendidos entre 0 y l permanecen negativos y , ó sea que toda la curva esté por la parte inferior del eje de las x , siendo el punto máximo B correspondiente al valor $x = \frac{l}{3} \sqrt{3}$ que anule la derivada.

Las dos curvas (9) presentan la forma que se ve en la figura 2.ª, y para el trazado de la línea de influencia no habrá más que hacer, como ya hemos dicho anteriormente, que multiplicar las ordenadas por K y K_1 y sumar después.

Así tendremos para el primer apoyo (fig. 3.ª):

$$\text{Primer tramo. } K = \frac{6_1}{D} > 0 \quad K_1 = 0.$$

Al multiplicar las ordenadas negativas de la curva por K , seguirán siendo negativas y la curva quedará por debajo del tramo.

$$\text{Segundo tramo. } K = -\frac{6_2}{D} < 0 \quad K_1 = \frac{6_1}{D} > 0.$$

Como K es negativo en este caso, las ordenadas de la curva $Kf(x)$ serán positivas, mientras que las de $K_1f_1(x)$ serán negativas; pero siendo $6_1 > 6_2$, las ordenadas de la segunda curva, serán mayores en valor absoluto que las de la primera, y al sumárlas algebraicamente predominarán las ordenadas negativas y la curva resulta también por debajo del eje de las x . Ésta presenta un punto de inflexión que corresponde al valor $x = \frac{6_1}{6_1 + 6_2}$, que anula la segunda derivada.

$$\text{Tercer tramo. } K = \frac{6_2}{D} > 0 \quad K_1 = -\frac{6_1}{D} > 0$$

Haciendo consideraciones análogas á las anteriores, deduciríamos que las ordenadas de la curva son positivas. La forma de la curva es como en el caso anterior; pero sus ordenadas son menores en valor absoluto por serlo K y K_1 , teniendo también un punto de inflexión para $x = \frac{6_2}{6_2 + 6_1} l$.

$$\text{Cuarto tramo. } K = -\frac{6_2}{D} < 0 \quad K_1 = \frac{6_1}{D} > 0.$$

Las ordenadas de la curva son negativas y menores que las anteriores; la abscisa del punto de inflexión es $\frac{6_2}{6_2 + 6_1}$.

$$\text{Quinto tramo. } K = \frac{1}{D} > 0 \quad K_1 = -\frac{6_1}{D} < 0.$$

Curva de ordenadas positivas menores que en las otras con punto de inflexión para $x = \frac{6_1}{6_1 - 6_2}$.

$$\text{Sexto tramo. } K = 0 \quad K_1 = \frac{1}{D} > 0.$$

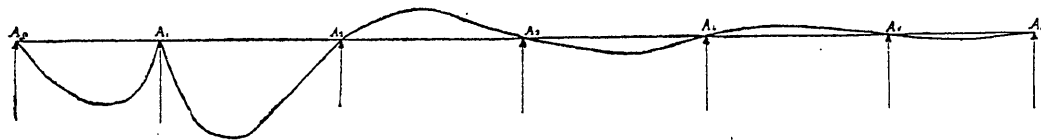
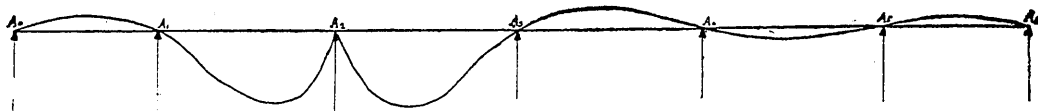
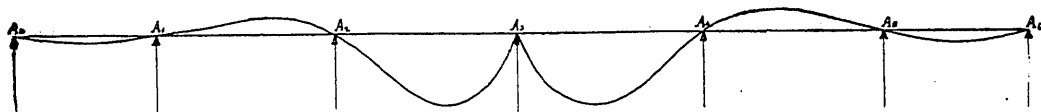
La curva tiene sus ordenadas negativas, menores que las del tramo anterior y sin punto de inflexión.

Todas estas curvas son tangentes entre sí en los apoyos (á excepción del que se considera), por ser iguales los valores correspondientes de $\frac{dy}{dx}$ y forman en conjunto una curva conti-

nua, como se ve en la figura 3.^a De una manera análoga se dibujan las líneas de influencia que corresponden á los apoyos segundo y tercero (figuras 4.^a y 5.^a), pues las de los apoyos cuarto y quinto son simétricas á las del segundo y primero.

de la recta $D'C'$, siendo su valor

$$BG = \mu_3 + (l-a) \frac{\mu_2 - \mu_3}{l} = \frac{\mu_2}{l} (l-a) + \frac{\mu_3}{l} a$$

Fig. 3.^aFig. 4.^aFig. 5.^a

Líneas de influencia correspondientes á una sección cualquiera.—Sea esta la sección B del tercer tramo (fig. 6.^a); hay que distinguir dos casos: primero, cuando la fuerza móvil pasa por el tramo en que está la sección mencionada; y segundo, cuando la expresada fuerza ó carga pasa por otro tramo cualquiera.

y por tanto

$$EL = \frac{P(l-x)}{l} a + \frac{\mu_2}{l} (l-a) + \frac{\mu_3}{l} a = M$$

que es el resultado á que nos proponíamos llegar.

Repitiendo la construcción para un cierto número de puntos, aparecerá dibujada la línea de influencia para la sección B . Esta línea contiene un punto singular B , cuya ordenada será siempre de signo contrario á los de μ_2 y μ_3 ; para estudiar el resto de la curva veamos qué inclinación tiene su tangente en el apoyo A , á cuyo fin derivaremos su ecuación, y haciendo $x=0$, resulta

$$\left(\frac{dM}{dx}\right)_0 = \frac{P(l-a)}{l} + \left(\frac{d\mu_2}{dx}\right)_0 \frac{l-a}{l} + \left(\frac{d\mu_3}{dx}\right)_0 \frac{a}{l}$$

$$\left(\frac{d\mu_2}{dx}\right)_0 = \frac{P}{D} 6_4 6_3 + 26_2$$

$$\left(\frac{d\mu_3}{dx}\right)_0 = -\frac{P}{D} 6_3(6_3 + 26_4)$$

sustituyendo y simplificando

$$\left(\frac{dM}{dx}\right)_0 = \frac{P(l-a)}{l} \cdot \frac{D + 6_4(6_3 + 26_2)}{D} - \frac{Pa}{l} \cdot \frac{6_3^2 + 26_4 6_3}{D}$$

tomando en cuenta las igualdades (4') se tiene

$$D + 6_4 6_3 + 26_2 = 6_3(6_3 + 26_4)$$

y por lo tanto

$$\left(\frac{dM}{dx}\right)_0 = \frac{P(6_3 + 26_4)}{Dl} [6_2(l-a) - 6_3 a]$$

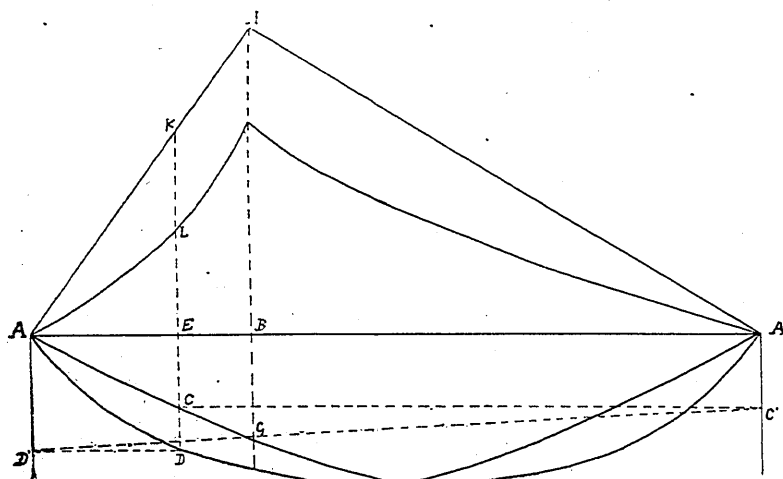
cantidad que será positiva, nula ó negativa según sea

$$6_2(l-a) > 6_3 a \quad a > \frac{6_2}{6_3 + 6_2} l$$

$$6_2(l-a) = 6_3 a \quad a = \frac{6_2}{6_3 + 6_2} l$$

$$6_2(l-a) < 6_3 a \quad a < \frac{6_2}{6_3 + 6_2} l$$

En el primer caso todas las ordenadas de la curva serán positivas, en el segundo también positivas, la curva arrancará tangente del eje de las x en el punto A (fig. 7.^a), y en el tercer caso partirá también la curva del punto A , pero hacia abajo,

Fig. 6.^a

1.º Supongamos que la fuerza pasa por dicho tercer tramo, las ecuaciones de la línea de influencia son:

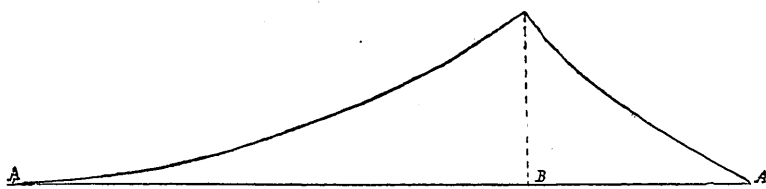
$$M = \frac{Px}{l} (l-a) + \frac{\mu_2}{l} (l-a) + \frac{\mu_3}{l} a \quad \text{para } x < a.$$

$$M = \frac{P(l-x)}{l} a + \frac{\mu_2}{l} (l-a) + \frac{\mu_3}{l} a \quad \text{para } x + a.$$

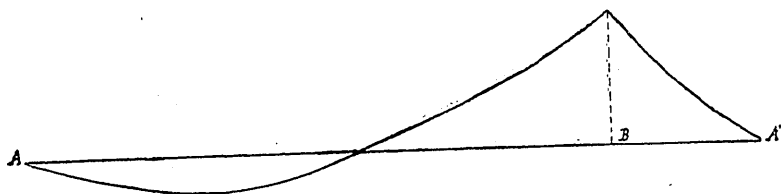
Dibujando (fig. 6.^a) las dos curvas μ_2 y μ_3 , tracemos por los apoyos A y A' dos rectas AH y $A'H$, tales que las tangentes de los ángulos que formen con el eje de las x sean $\frac{P(l-a)}{l}$ y $\frac{Pa}{l}$, las cuales se cortan en un punto de la vertical de B , cuya abscisa es a . Las ordenadas EC y ED de las curvas son para un mismo punto E de la viga los momentos flectores en los apoyos cuando la carga esté en E , magnitudes que por medio de paralelas CC' y DD' al eje llevamos sobre las verticales de dichos apoyos; unamos ahora C' con D' , esta recta cortará á la vertical del punto B en G , y tomando ahora $KL = BG$, se tendrá el punto L de la línea de influencia de la sección B . En efecto, $EL = EK - KL = \frac{(l-x)a}{l} - BG$; pero BC es la ordenada

teniendo, por tanto, ordenadas negativas, hasta cortar el eje de las x presentando la forma que se ve en la figura 8.^a

Hecho el estudio del trozo de curva correspondiente á $x < a$

Fig. 7.^a

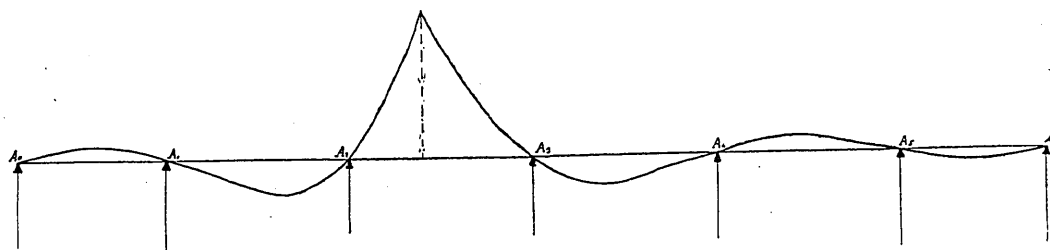
no es necesario hacerlo para $x > a$, porque nos resultarían curvas simétricas á las anteriores con relación á la perpendicular en el punto medio del tramo.

Fig. 8.^a

2.º Veamos ahora la forma que tendrán estas líneas de influencia en los otros tramos; sus ecuaciones sabemos que son

$$M = \frac{\mu_2}{l} (l - a) + \frac{\mu_3}{l} a$$

la curva que resulta es de la misma forma que las correspon-

Fig. 9.^a

dientes á μ_2 y μ_3 , puesto que se deduce de ellas sumando sus ordenadas después de multiplicadas por las constantes $\frac{l-a}{l}$ y $\frac{a}{l}$; ahora bien, como μ_2 y μ_3 son de signos contrarios, la suma anterior puede ser positiva, nula ó negativa según se tenga

$$\frac{\mu_2}{l} (l - a) > -\frac{\mu_3}{l} a \quad a > \frac{\mu_2}{\mu_2 + \mu_3} l = \frac{c_2}{c_2 + c_3} l$$

$$\frac{\mu_2}{l} (l - a) = -\frac{\mu_3}{l} a \quad a = \frac{\mu_2}{\mu_2 + \mu_3} l = \frac{c_2 + c_3}{c_2} l$$

$$\frac{\mu_2}{l} (l - a) < -\frac{\mu_3}{l} a \quad a < \frac{\mu_2}{\mu_2 + \mu_3} l = \frac{c_2}{c_2 + c_3} l$$

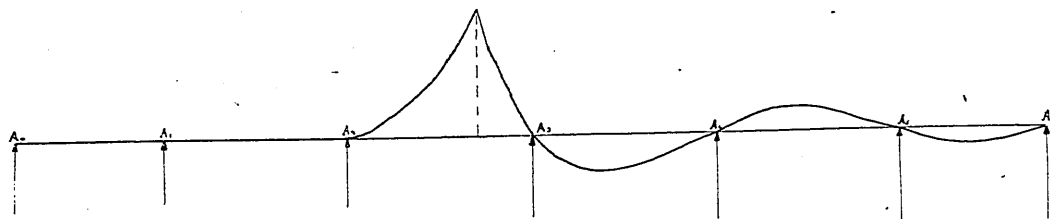


Fig. 10.

Además, como μ_2 y μ_3 cambian de signo al pasar el móvil de un tramo á otro, la línea de influencia cambia también de posición respecto al eje de abscisas. Estos tres valores de a se corresponden exactamente con los ya mencionados en el primer caso, pudiendo, por tanto, dibujar en conjunto las líneas de in-

fluencia á lo largo de toda la viga (figuras 9.^a, 10 y 11), para cada uno de los valores de a ya mencionados.

Focos.—Si el estudio anterior lo repitiéramos para todos los tramos, veríamos que existen en las curvas de todos ellos, á excepción del primero y del último, dos puntos F y F' llamados focos, tales que $AF = AF' = \frac{c_n}{c_n + c_{n+1}} l$, en los que la línea de influencia correspondiente (fig. 10) tiene todas las ordenadas nulas para los puntos de la viga anteriores al apoyo A ó posteriores al A' según se trate del foco F ó del F' .

Sabemos que cuando sólo actúa una fuerza aislada sobre la viga, el diagrama de los momentos flectores á lo largo de la misma es el representado en la figura 12 que resulta de llevar sobre las verticales de los apoyos y del punto en que actúa la fuerza magnitudes proporcionales á los momentos flectores ellos y unir los extremos por medio de rectas, vemos que en el tramo cargado hay dos puntos F_2 y F_2' , cuyos momentos flectores son nulos; en los demás tramos centrales no hay más que uno y en los extremos ninguno. En todos ellos se verifica por la semejanza de los triángulos que se forman que

$$\frac{F_n A_n}{F_n A_{n+1}} = \frac{\mu_n}{\mu_{n+1}}$$

y como $\frac{\mu_n}{\mu_{n+1}}$ es constante, cualquiera que sea la posición de la carga móvil, se deduce que los puntos F y F' son fijos é independientes de la magnitud y posición de la carga, siendo el momento flector en los puntos F situados á la izquierda del tramo cargado, y en los F' de la derecha *serán siempre nulos*. Los di-

ferentes puntos F y F' son todos los que hemos llamado focos, puesto que

$$\frac{F_n A_n}{F_n A_{n+1}} = \frac{\mu_n}{\mu_{n+1}} = \frac{c_n}{c_{n+1}} \quad F_n A_n = \frac{c_n}{c_n + c_{n+1}} l$$

La forma especial de la línea de influencia en estos puntos nos la podemos explicar ahora perfectamente, pues tendrá ordenadas nulas mientras la carga móvil pase por el trozo de viga situado á la izquierda en más casos y á la derecha en otros del tramo en el que está la sección que se estudia, puesto que en todas estas posiciones de la carga el momento flector en la sección es cero.

Repitiendo para los tramos extremos los cálculos hechos an-

teriormente, veremos que en éstos no existe más que un solo foco situado en el tercio de la viga contiguo al segundo ó penúltimo apoyo.

Existe un trazado gráfico sencillo para determinar los focos de todos los tramos que es el siguiente. Sea una viga simétrica

de seis tramos (fig. 13) A_0, A_6 , tracemos las verticales trisectrices T_n y T'_n , tracemos también las verticales que pasan por los puntos H y H' tales que $A_1H = A_5H'$ sea el tercio de la diferencia entre los tramos centrales y los extremos, es decir, $\frac{1}{3}l(1-m)$.

pero como $2 + 2m = 2(1 + m) = 6_4 = \frac{\mu_2}{\mu_1}$, se deduce $\frac{FA_2}{FA_1} = \frac{\mu_2}{\mu_1}$, por lo que el punto F es un foco. De la misma manera trazando por F una recta cualquiera

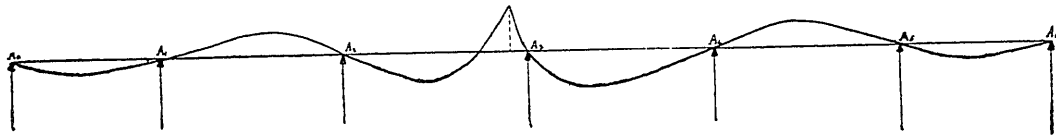


Fig. 11.

Hagamos pasar ahora una recta cualquiera por A_0 que corte a la trisectriz de T'_1 y a la vertical de H en los puntos M y K , unamos M con A_1 prolongando la recta hasta que corte en N a la trisectriz de T_2 , y tendremos por fin en la intersección de la recta NK con el tramo determinado la posición del foco F .

En efecto:

$$FA_1 = FH + HA_1 = FH + \frac{1}{3}l(1-m)$$

$$\frac{FH}{HK} = \frac{FT_2}{T_2N} = \frac{FH + FT_2}{HK + T_2N} = \frac{HT_2}{HK + T_2N}$$

$$FH = \frac{HK \times HT_2}{HK + T_2N}$$

FK' hasta que encuentre en M' y K' a la trisectriz T'_2 y a la vertical del apoyo A_0 , uniendo después M' con A_3 , prolongando la recta hasta su encuentro N' con la trisectriz T_3 , y, por último, tendremos el foco de la izquierda del tercer tramo en la intersección de la recta $N'K'$ con la viga. Así sucesivamente repitiendo las construcciones dichas, hallaríamos los focos de la izquierda de todos los tramos, y operando de una manera análoga de derecha a izquierda, obtendríamos igualmente los focos de la derecha.

Propiedades de las líneas de influencia.

1.^a Si se prolongan las dos ramas AQ y $A'Q$ (fig. 6.^a) de la línea de influencia correspondiente a una sección B del tramo AA' hasta su encuentro en α y α' con las verticales de los apo-

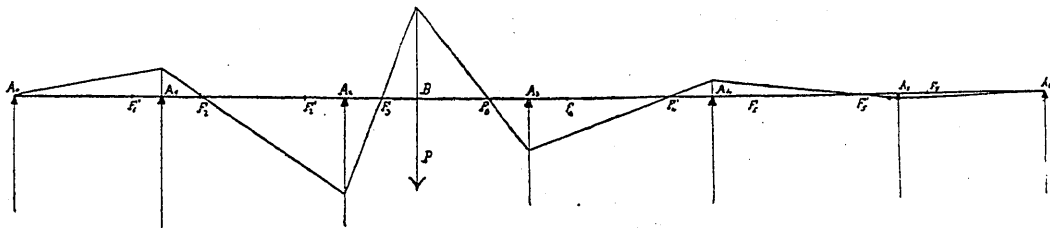


Fig. 12.

y llamando α al ángulo que la recta A_0K forme con el eje de las x se tendrá:

$$HT_2 = \frac{1}{3}l - \frac{1}{3}l(1-m) = \frac{1}{3}lm$$

$$HK = A_0H \operatorname{tg} \alpha = \left[lm + \frac{1}{3}l(1-m) \right] \operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{3}l(1+2m) \operatorname{tg} \alpha$$

$$M'T'_1 = \frac{2}{3}l m \operatorname{tg} \alpha$$

$$\frac{T_2N}{A_1T_2} = \frac{M'T'_1}{A_1T'_1} \quad T_2N = \frac{A_1T_2 \times M'T'_1}{A_1T'_1}$$

$$= \frac{\frac{1}{3}l \times \frac{2}{3}l m \operatorname{tg} \alpha}{\frac{1}{3}lm} = \frac{2}{3}l \operatorname{tg} \alpha$$

ynos, las dos magnitudes $A\alpha$ y $A'\alpha$ son respectivamente iguales a Pa y $P(l-a)$.

En efecto, haciendo en las ecuaciones (1) y (2) $x=l$ y $x=0$, y como μ_l y μ_{l+1} son nulos para estos valores resulta,

$$M = P(l-a) \quad M = Pa.$$

2.^a Las tangentes en dos puntos T y U (fig. 6.^a) de las dos ramas de la línea de influencia situadas en una misma vertical, la diferencia entre los coeficientes angulares de estas dos rectas es igual a P .

Esto se demuestra restando las dos ecuaciones (1) y (2) y derivando después

$$M - M' = \frac{Px}{a}(l-a) - \frac{P(x-a)}{a}l$$

$$\frac{dM}{dx} - \frac{dM'}{dx} = \frac{P(l-a)}{a} - \frac{Pl}{a} = -\frac{Pa}{a} = -P.$$

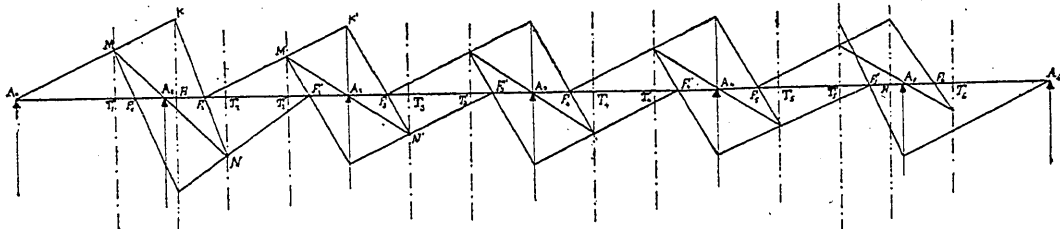


Fig. 13.

sustituyendo estos valores en las fórmulas anteriores y simplificando, se obtiene:

$$FA_1 = \frac{l}{3+2m}$$

$$FA_2 = l - FA_1 = \frac{2+2m}{3+2m}l \quad \left. \vphantom{\begin{matrix} FA_1 \\ FA_2 \end{matrix}} \right\} \frac{FA_2}{FA_1} = 2+2m;$$

Trazado gráfico de las líneas de influencia.—En todo lo que hemos dicho anteriormente no se ha hecho más que estudiar la forma general de las líneas de influencia de los momentos flectores; si quisiéramos dibujarlas tendríamos que valernos de sus ecuaciones y determinar el suficiente número de puntos para que la curva pueda trazarse, lo que se facilita con el uso de tablas que existen para este objeto como las de A. Cort (A. Cort & le

Portes, *Calcul de ponts métalliques*) en las que la fuerza P es igual á la unidad.

También existen procedimientos puramente gráficos que permiten trazar dichas curvas sin valernos directamente de sus ecuaciones, sino haciendo uso de la Estática gráfica; uno de ellos es el seguido por Bertrand de Fontviolant, que se funda en

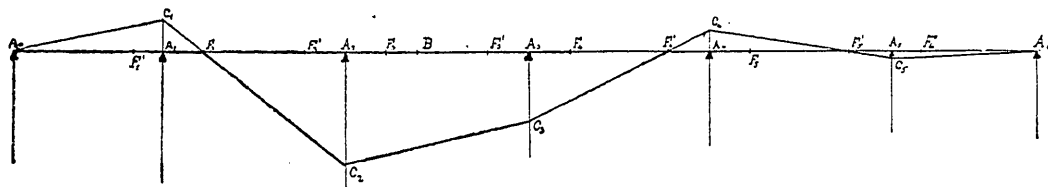


Fig. 14.

lo siguiente: las ecuaciones de la línea de influencia son de tercer grado, por tanto, al derivar dos veces se tendrá la ecuación de primer grado.

$$\frac{d_z M}{dx_z} = \frac{6}{l_z} Ax + B$$

y si llamamos

$$Z = Ax + B,$$

tendremos una ecuación que representa en cada tramo descargado una recta que pasa por uno de los focos, y que además en todos los tramos la ordenada en el origen es igual á la ordenada en el extremo de la recta correspondiente al tramo anterior (1), de manera que todas estas forman una línea quebrada que recibe el nombre de *diagrama de las z* (fig.ª 14), que es sencillo de construir, pues basta con hallar dos ordenadas cualesquiera.

lares, que reducidas al caso particular que nos ocupa son las siguientes:

1.ª Los segmentos HK y $H'K'$ (fig. 15), de verticales trisectrices comprendidos entre la recta A_1x_1 y las tangentes á la rama de línea de influencia en A_1 y en x_1 son iguales á las ordenadas z de las mismas verticales.

2.ª La prolongación de los lados H_k, H_{k+1} del polígono de tangentes en los apoyos comprendidos entre las trisectrices pasan por uno de los focos de cada tramo.

Para construir el polígono de tangentes en los apoyos de la línea de influencia correspondiente á una sección B de un tramo, el tercero, por ejemplo, habrá que dibujar primeramente la línea quebrada, de que hemos hablado antes, después tomar sobre las verticales de los apoyos A_1 y A_2 magnitudes A_1x_1 y A_2x_2 iguales, respectivamente, á A_1B y A_2B (ó al producto de estas cantidades por un número cuando se quieran ampliar las ordenadas), se determinará la posición de los puntos K por la intersección de las rectas A_1x_1 y A_2x_2 con las trisectrices, tomaremos las magnitudes $KH_1 = K_1T_1 = T_1t_1$ y $K'H_2 = K'_1L' = T_2t_2$, y trazadas las líneas A_1H_1, H_2x_2 y $A_2L, L'x_2$, prolongaremos la recta A_1H_1 hasta su encuentro con la trisectriz del segundo tramo, unimos luego H con el foco F_2 ó igualmente H_1 con A_2 , procediendo así sucesivamente hasta llegar á A_2 y lo mismo por la

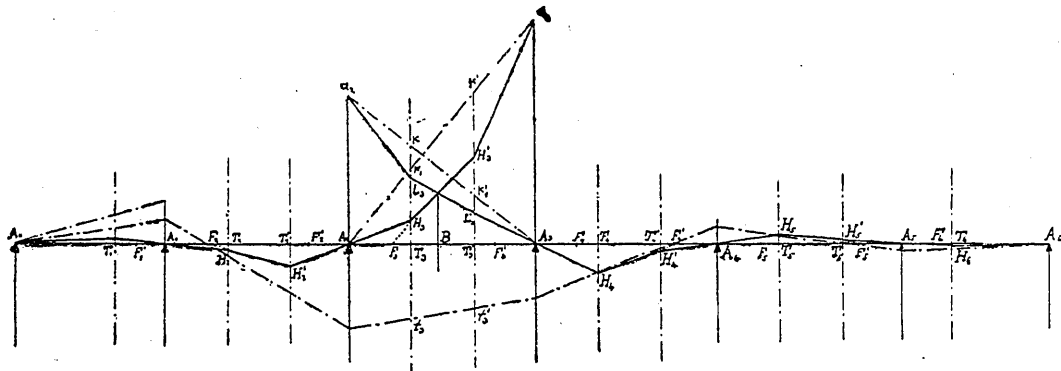


Fig. 15.

Supongamos ahora dividida la viga en elementos infinitamente pequeños dx , y que sobre cada uno de ellos actúa una fuerza ficticia igual en magnitud y signo $\frac{2}{l} x dx$, la curva funicular de estas fuerzas trazada con una distancia polar de $\frac{l}{3}$, es precisamente la línea de influencia de la sección B .

En efecto, la ecuación de esta funicular será

$$y = \frac{\int \frac{2}{l} x dx}{\frac{l}{3}} = \frac{6}{l^2} \int x dx = \frac{2}{l} M.$$

Se simplifica notablemente el trazado, bien sea por este procedimiento, bien sea por los anteriores, dibujando previamente el llamado *polígono de tangentes en los apoyos*, formado por las tangentes á la línea de influencia y la intersección de dichas tangentes con las verticales trisectrices. Este polígono resulta fundándose en las propiedades generales de las curvas funicu-

parte de la derecha hasta llegar á A_1 , limitando ambas líneas quebradas en su encuentro común M con la vertical de la sección que se considera.

Ahora bien; para el dibujo de la línea de influencia, cualquiera que sea el método que sigamos, se sabe que tiene que ser tangente en los apoyos á los lados contiguos de esta línea quebrada.

ANTONIO LÓPEZ FRANCO.

(Se continuará.)

TUNEL DEL RICKEN

El túnel del Ricken, en Suiza, que pone en comunicación directa la región del lago de Constanza y el Joggenbourg con las cuencas de las Sinth y del alto lago de Zurich, presenta la particularidad interesante de ser como longitud el que inmediatamente sigue al de Aribey, y ocupar, por consiguiente, el quinto lugar en Europa; su longitud es, en efecto, de 8.604 metros.

Los trabajos comenzaron al Norte, lado de Wattwill, el 7 de Enero de 1904, y al Sur, lado de Kaltbrunon, el 2 de Febrero siguiente. El plazo señalado para su terminación se calculó en cu-

(1) Estas propiedades son comprobar conociendo, como conocemos, las ecuaciones $M = F(x)$.