

tropolitan Life Insurance, á consecuencia de un estudio hecho por una Comisión de Ingenieros. M. Pralt se declara de acuerdo con la Comisión, cuya elección está, sobre todo, basada en el hecho de que este sistema, empleado desde hace muchos años, no había dado lugar nunca á accidente; pero hace, no obstante, observar que dos importantes elementos de seguridad han sido despreciados, á saber: una comprobación positiva de la velocidad y la posibilidad de mantener asegurada la caja cuando se para en una posición intermedia. En efecto, el diámetro bastante débil de la polea del freno necesita un apretado mágico de las zapatas; si el aparato está parado hay necesidad de aflojar el freno antes de ponerlo en marcha, y hay un período, por corto que sea, durante el cual la caja no está contenida de una manera positiva.

La nueva disposición presentada por M. Pralt evita este inconveniente. Su disposición de seguridad consiste en colocar sobre el árbol de la polea de tracción una rueda dentada que engrana con un tornillo sin fin que forma la prolongación del árbol de un motor auxiliar. El paso del tornillo es bastante corto para que la rueda no pueda arrastrarle. Este tornillo comprueba el aparato; si no gira la polea de tracción no puede girar y su velocidad no puede pasar de la que corresponde á la velocidad del motor auxiliar; pero éste no tiene que hacer gran trabajo efectivo, no tiene que desarrollar más que el muy mínimo que corresponde á los rozamientos.

Las ventajas que da esta disposición muy sencilla son las siguientes:

- 1.º Paradas positivas al fin de la carrera.
- 2.º Comprobación absoluta de la velocidad.
- 3.º Pérdida de tiempo mínimo á la partida y en la parada.
- 4.º Ausencia completa de choques.
- 5.º Seguridad absoluta.
- 6.º Pequeño emplazamiento.
- 7.º Pequeño precio de establecimiento.
- 8.º Pequeño precio de entretenimiento.

Hay, sin embargo, un punto algo delicado en este arreglo; es necesario arreglarse para que el motor auxiliar no trabaje más que lo preciso para comprobar el funcionamiento; de otro modo habría un gasto inútil de energía y un gasto del tornillo y de la rueda dentada. El autor estima que esta dificultad no se puede vencer.—O.

REAL ACADEMIA DE CIENCIAS EXACTAS, FISICAS Y NATURALES

DEL DISCURSO LEÍDO POR EL NUEVO ACADÉMICO

SR. D. VICENTE GARCINI

Ingeniero de Caminos, Canales y Puertos

EL DÍA 7 DEL CORRIENTE

(CONTINUACIÓN)

La ignorancia de esta rama de las matemáticas está por desgracia bastante generalizada entre los funcionarios de la Administración pública; por lo mismo, los encargados de liquidar los derechos de traslación de dominio han de resolver caprichosamente problemas prácticos que suelen presentarse. Sea, por ejemplo, el siguiente: un testador lega á determinada persona la nuda-propiedad de algunos títulos de obligaciones de un empréstito determinado y á otra persona diferente el usufructo. Claro es que el conjunto de ambos derechos estará representado

por el valor nominal de los títulos multiplicado por la fracción correspondiente al precio de cotización oficial en el día del fallecimiento del testador; hasta aquí suelen llegar los conocimientos de los burócratas. Pero ¿qué parte de ese último valor corresponde á la nuda-propiedad y qué parte al usufructo para poder aplicar á cada interesado la tarifa del impuesto que le corresponda? Eso ya no suelen saberlo, y, sin embargo, las fórmulas de que me ocupé permiten averiguarlo.

Lo primero que debe hacerse es calcular el tipo real del interés, teniendo en cuenta la cotización y edad de las obligaciones. La fórmula correspondiente será

$$pR_m = \frac{a}{r'} \left(1 - \frac{1}{(1+r')^{n-m}} \right),$$

en la cual p es la fracción por la que ha de multiplicarse el valor nominal para obtener el efectivo del mercado; a la cuota fija del empréstito; R_m el resto emésimo; siendo m la edad de las obligaciones, y r' el tipo efectivo del interés.

Ahora bien; el derecho de la nuda-propiedad es cobrar el valor de los títulos que se amortizan; el del usufructuario cobrar los cupones de interés.

El valor presente de los derechos de la nuda-propiedad será

$$\sum_1^{n-m} \frac{S_{m+k}}{(1+r')^k},$$

llamado S_{m+k} la porción de la cuota $m+k$ que ha de emplearse en amortización y r' el tipo de interés efectivo antes calculado. Determinando previamente r' por la primera de aquellas fórmulas; sustituyéndolo en la segunda; poniendo en ésta, en vez de

S_{m+k} , su valor $\frac{a}{(1+r')^{n+1-(m+k)}}$; llamando para simplificar i á la suma $r+1$, y i' á la suma $r'+1$, y designando por A el valor de la nuda-propiedad de todos los títulos vivos del empréstito, resultará

$$A = \sum_1^{n-m} \frac{a}{i^{n+1-(m+k)} i'^k} = \frac{1}{i' - i} \left(\frac{1}{i'^{n-m}} - \frac{1}{i^{n-m}} \right) a.$$

Calculado así A , valor presente de la nuda-propiedad de todas las obligaciones vivas, una sencilla proporción basta para determinar el que tiene la nuda-propiedad de los títulos heredados; la diferencia entre el valor total y el de la nuda-propiedad de aquellos títulos daría el que corresponde á los derechos del usufructuario.

Como veis, ofrece el tema amplios horizontes, y he de omitir en obsequio á la brevedad toda clase de consideraciones acerca de los problemas financieros en que interviene el cálculo de probabilidades *à priori*, como sucede cuando se trata de fijar en cualquier instante, y á determinado tipo de interés, el valor de obligaciones de cierta edad, conociendo la ley de amortización, y las cantidades eventuales que, por sorteo, y en determinadas épocas, se conceden á cierto número de títulos, no amortizados todavía.

Prescindiendo ahora de fórmulas y de ecuaciones, séame lícito señalar lo absurda que resulta la ley del interés compuesto á un tipo de rédito constante, que no puede ni debe aceptarse para plazos demasiado largos. Si el valor del capital ha de crecer con el tiempo conforme á la función exponencial, tomará valores enormes para los de la variable suficientemente grandes.

Recuerdo haber leído una divertida disquisición acerca del valor que hoy representaría un modesto centimillo prestado por nuestro padre Adán á interés compuesto. El articulista trataba de contar en oro aquel valor, suponiendo que desde el día en

que Adán prestó el centimillo hubieran transcurrido hasta la fecha seis mil años.

Para no llegar á un número enorme de monedas, imposible de contar, buscaba el tamaño de la que fuera apropiada para el caso. Esferas macizas de oro del tamaño de nuestro planeta resultaban monedillas despreciables para el objeto, y en contar aquel capital, con aquella unidad, se tardaría más tiempo que en contar en las más ínfimas monedas la fortuna reunida por todos los millonarios de la tierra.

Abandonando luego este aspecto de la cuestión, hacía el articulista peregrinas é ingeniosas consideraciones sobre la situación del heredero de aquel capital y el resto de la humanidad, suponiendo que ésta hubiera de pagar mancomunadamente la suma que al primero se debía.

El absurdo de la ley del interés compuesto es evidente; la matemática, ciencia completamente exacta, en lo que hace relación á las consecuencias deducidas de las premisas que se le dan como base, ofrece demostración palmaria del absurdo de tales premisas.

Por eso dice el vulgo que los números demuestran los mayores absurdos, y en cierto modo tiene razón; porque si las bases de cálculo, es decir, las leyes que aquél ha de utilizar, y en cuya determinación no intervino, son absurdas en su esencia, ó en la generalidad que indebidamente se les atribuya, la matemática, mediante consecuencias legítimas de tales hipótesis, llega á establecer absurdos evidentes.

En este caso, por ejemplo, podrá cumplirse la ley del interés compuesto en plazos cortos; pero no cabe aceptar la permanencia indefinida del tipo de interés, porque el mercado fija en cada instante la cuantía de aquél, según sea la masa de capitales disponibles; esta masa varía con el ahorro social; éste influye á su vez en el crecimiento ó disminución del tipo de interés, y cuando dicho tipo crece ó disminuye, hace más ó menos necesario el ahorro, y, por consiguiente, más ó menos ventajoso para quien lo practica; y no se practicará cuando no resulte ventajoso. De todo ello se deduce que si obcecadamente persistiera el ahorro, y pudiera persistir, hasta crecer los capitales con arreglo á la ley del interés compuesto en plazos extremadamente largos, nadie los utilizaría porque habrían perdido ya toda su eficacia. Por eso el distinguido matemático Eugenio Catalán propuso reemplazar la fórmula clásica del interés compuesto por otra que no presentara grandes cambios respecto de la usual y corriente en los primeros años, y que no resultara antisocial é injusta en aquellos contratos que perduran ó toman por cualquier causa cierto carácter de permanencia.

La fórmula que da el valor de un capital a al cabo de n años, según la ley ideada por Catalán, es:

$$A = a \left[1 + p \left[e - \left(1 + \frac{n}{100} \right)^{\frac{100}{n}} \right] \right]$$

En esta fórmula n es el tiempo, variable independiente; a el valor inicial para $n = 0$; A el valor del capital al fin del tiempo n ; p una constante que define el tipo de interés, y e la base del sistema neperiano de logaritmos. Para que al fin del primer año diera para A el valor $a + ar = a(1 + r)$, tipo actual del rédito en el mercado, debería existir entre r y p la relación

$$r = p \left(e - \left(1 + \frac{1}{100} \right)^{100} \right)$$

Si para determinar A , calculamos previamente por logaritmos el término $\left(1 + \frac{n}{100} \right)^{\frac{100}{n}} = z$, la fórmula primera se convertirá en $A = a [1 + p(e - z)]$.

Una renta inmediata de n pagos iguales á a tendrá por valor presente:

$$V = \sum_{i=1}^n \frac{a}{1 + p \left(e - \left(1 + \frac{K}{100} \right)^{\frac{100}{K}} \right)}$$

La fórmula de Catalán no ha prosperado, ni podía prosperar, porque no ofrece condiciones prácticas de aplicación. En efecto; la exponencial convierte en progresiones las rentas paralelas, y en series las rentas lineales ó parabólicas, de vencimientos equidistantes; pero estas últimas pueden sumarse por descomposición. La ley de variación del capital con el tiempo, ideada por Catalán, obligaría á determinar, sea directamente, sea por tablas previamente calculadas, cada uno de los términos de las series que forman las rentas.

..

Con objeto de no abusar demasiado de vuestra paciencia, abandono estas lucubraciones para señalar las dificultades que ofrece el estudio de las operaciones financieras, cuando se necesita aplicar, á todos ó algunos de los cobros futuros, el coeficiente de la *esperanza matemática*, en virtud de que sólo han de hacerse aquéllos efectivos si ocurre un hecho determinado.

El caso á que especialmente me refiero es aquel en que la condicional se relaciona con la circunstancia de vivir ó no personas determinadas cuando los cobros hayan de efectuarse.

La estadística ha de proporcionar los datos que sirven de base al cálculo de aquella *esperanza matemática*.

Forma dicha base el conocimiento de la *tabla de supervivencia*, deducida á su vez de *tablas de mortalidad*, y estas últimas de la consignación exacta de la cifra de población, clasificada por edades, y de las defunciones ocurridas dentro de un plazo determinado, contado á partir de la fecha del censo, y refiriéndose las defunciones á los individuos incluidos en él.

No detallaré, porque seguramente lo sabéis de sobra, cómo se deduce la ley de supervivencia de la tabla de mortalidad; cómo concurre cada grupo de observaciones á determinar el coeficiente medio de mortalidad del período al que aquéllas se refieren; cómo en virtud de la representación gráfica de esos coeficientes se sustituye el polígono correspondiente por otro en que desaparezcan las anomalías, que provisionalmente se atribuyen á errores de observación; cómo la multiplicidad de observaciones, correspondientes á períodos distintos, proporcionan los coeficientes medios, confirman ó borran anomalías, nos inducen á sospechar la permanencia ó la variación con el tiempo de las leyes encontradas y nos procuran datos para investigar las causas de la variación, cuando existe.

Aun siendo exactísimos los censos y exactísimas también las estadísticas de natalidad y mortalidad, hay muchas causas de error en las tablas obtenidas de esta manera. Se supone que durante el período en que se van registrando las defunciones y nacimientos, son los mismos los individuos sometidos á la observación, es decir, se acepta que ni salen éstos cambiando de residencia ó emigrando, ni llegan á proporcionar defunciones nuevos individuos no registrados anteriormente; ninguna de estas cosas es verdad: los coeficientes de mortalidad á que lleguemos sólo serán exactos cuando resulten iguales la emigración y la inmigración en el período de las observaciones y cuando los individuos advenedizos sustituyan á los que se van, teniendo unos y otros iguales edades.

En general, cuanto mayor amplitud haya tenido el censo previo y cuanto menores hayan sido la emigración é inmigración en el período durante el cual se registraron las defunciones y nacimientos, tanto más dignos de confianza serán los coeficientes de mortalidad deducidos de aquellos datos.

En las tablas de supervivencia calculadas mediante observaciones relativas á grupos de individuos perfectamente definidos, como, por ejemplo, los asegurados ó asociados de las Compañías de seguros sobre la vida, hay menos causas de error; pero de todos modos han de tomarse muchas precauciones para no incurrir en graves equivocaciones. Las tablas de supervivencia determinadas de esta manera tienen el inconveniente de no ser tan crecido el número de personas sometidas á ob-

servación, y además el de representar leyes particulares correspondientes á individuos escogidos. Verdad es que la misma estadística demostró que el reconocimiento facultativo á que previamente se someten las personas que contratan con aquellas Compañías y que debiera dar al grupo condiciones de vitalidad excepcionales, sólo influye en los primeros años, no más de cinco; transcurrido ese tiempo, no hay diferencia notable entre la mortalidad general y la de individuos escogidos mediante reconocimiento previo de tener buena salud y no tener lesión orgánica manifiesta.

Es probable que si las personas sometidas á la observación no cambiaran, la influencia del reconocimiento facultativo sería más permanente. En este caso es posible llevar cuenta de la emigración y de la inmigración, representadas la primera, por las rescisiones de contratos, y la segunda, por la admisión de nuevos asegurados. Pero rescinden sus contratos con preferencia los que disfrutan mejor salud, y persisten en ellos más principalmente los que llegan á contraer achaques y enfermedades. Esto explica que al cabo de cinco años resulte aplicable el coeficiente de mortalidad general á grupos de individuos sometidos á selección.

La esperanza matemática que debe multiplicar á cada cobro condicional, se evalúa suponiendo que se cumplirá en lo porvenir la ley representada por la tabla de supervivencia. Si la condicional efectividad es que viva una persona determinada que tenga a años de edad, y el vencimiento del pago ha de llegar cuando transcurran n años, el factor porque ha de multiplicarse el valor presente de aquel pago, considerado como cierto, será la relación de supervivientes á las edades $a + n$ y a . Si fuese la condicional el fallecimiento de aquella persona, dicho factor será lo que falta al del caso anterior para valer la unidad. Si depende el pago de que vivan á la vez varias personas, como se trata de una probabilidad compuesta, será dicho coeficiente el producto de las probabilidades simples de que viva en aquella fecha cada una de ellas.

La ecuación general que plantea estos problemas financieros de pagos y cobros condicionales se obtiene, como en el caso de no serlo, igualando los valores matemáticos presentes de los compromisos respectivos. Esos valores serán sumas de términos que contendrán como factores: primero, la cuantía del cobro condicional; segundo, la potencia negativa de la unidad más su rédito, con exponente igual al tiempo que ha de transcurrir hasta su vencimiento; y tercero, cierto número de factores de las formas indicadas anteriormente.

No me ocupo de los problemas en que sólo se trata de buscar el valor presente de un capital pagadero condicionalmente en fecha futura y determinada, por dos razones: la primera, porque lo dicho basta ya para plantear y resolver estas cuestiones, y la segunda, porque al ocuparme de las rentas condicionadas, llamadas también vitalicias, habrán de aparecer los valores que forman las soluciones de aquellos sencillos problemas como términos de las sumas correspondientes que habremos de evaluar.

Paso, desde luego, al estudio de las rentas vitalicias, principiando por el caso más frecuente de estar condicionadas por la circunstancia de vivir, en la fecha del vencimiento de su cuota, todas las personas designadas en el contrato; ó dicho de otra manera, por la de cesar el pago de la renta al ocurrir el fallecimiento de algunas de aquellas personas. El valor presente de la renta vitalicia será en estas condiciones la recíproca del producto de supervivientes á las edades de los vitalicistas, multiplicada por un factor, formado por la suma de los productos de potencias negativas sucesivas de $(1 + r)$, multiplicadas por los productos de supervivientes á las edades, que sucesivamente irán teniendo aquéllos al vencimiento de cada anualidad, hasta llegar alguno de ellos á la edad límite de la tabla.

Para escribir la fórmula correspondiente se designan las personas de grupo considerado por sus edades $A, B, C, \dots$, circunstancia que las define é individualiza desde el punto de vista de la tabla de supervivencia; se representan por $a, b, c, \dots$, los supervivientes á las edades $A, B, C, \dots$; por $a_k, b_k, c_k, \dots$, los supervivientes á las edades $A + K, B + K, C + K, \dots$; y por r , el tipo del interés de la unidad de capital en la unidad de tiempo, tomando por unidad de tiempo el lapso que separa los actos sucesivos de composición de réditos y capitales. El valor presente de la renta vitalicia, que llamaremos $V_{ABC\dots}$, será:

$$V_{ABC\dots} = \frac{1}{abc\dots} \left\{ \frac{a_1 b_1 c_1 \dots}{(1+r)} + \frac{a_2 b_2 c_2 \dots}{(1+r)^2} + \dots + \frac{a_n b_n c_n \dots}{(1+r)^n} \right\};$$

y en esta fórmula n , exponente y subíndice del último término, será el complemento de edad de la persona más anciana del grupo, llamando complemento de edad de un individuo la diferencia entre la edad más avanzada que figure en la tabla de supervivencia y la edad de aquél.

Para distinguir esta clase de rentas vitalicias de otras diferentes que estudiaré más tarde, las llamaré de *primera clase*. Si la tabla de supervivencia no fuera susceptible de expresión analítica, la suma que forma el valor presente de la renta sólo podrá obtenerse calculando cada término, para sumarlos después.

Estas rentas ofrecen excepcional interés en el estudio general de las operaciones vitalicias condicionadas por ley de supervivencia, porque, según veremos, las series particulares que formen las soluciones de cualquier otro problema de este género pueden expresarse en función de rentas vitalicias de primera clase.

Cuando se trata de calcular tablas completas de valores de las rentas vitalicias, sobre la base de un tipo de interés determinado y de una tabla de supervivencia definida, suele seguirse otro procedimiento.

Comparando las expresiones de

$$V_{A,B,C\dots} \text{ y } V_{A+1,B+1,C+1\dots}$$

se puede establecer la relación siguiente:

$$V_{ABC\dots} = (1 + V_{A+1,B+1,C+1\dots}) (1+r)^{-1} \cdot \frac{a_1 b_1 c_1 \dots}{abc}$$

Esta fórmula nos permite calcular sucesivamente los valores presentes de las rentas vitalicias á las diferentes edades, desde las $A + n, B + n, C + n$, para los cuales es cero, hasta las $A - K, B - K, C - K, \dots$, siendo K la edad de la persona más joven del grupo; es decir, para todas las edades posibles en que las diferencias de edad de los vitalicistas fueran las que tienen entre sí los individuos del grupo considerado.

No hay ventaja, al parecer, en aprovechar la última fórmula en vez de la primera, porque los cálculos resultan igualmente laboriosos en ambos casos. El motivo de la preferencia que se da en la práctica á la última fórmula es el siguiente: en ambos procedimientos, al incurrir en una equivocación material, se propaga el error á todos los valores en que habrá de entrar el resultado erróneo, ya sea como sumando, ya como dato; si empleamos la fórmula primera no hay otra comprobación posible que rehacer los cálculos muchas veces; pero en el caso de usar la segunda, encontró Morgán un procedimiento de comprobación que permite averiguar en todo momento si existe algún error en los cálculos efectuados, y en caso de haberle, facilita los medios de buscar donde se cometió.

(Se continuará.)