

fijo. El carbón en pedazos de 6 á 37 milímetros arde más pronto que el partido en pedazos más pequeños ó más gruesos.

5.º Las cenizas, cuando el carbón está seco, y en una proporción hasta del 15 por 100, no parece disminuir sensiblemente la utilización.

6.º La humedad reduce algo la utilización.

7.º La presencia del azufre no parece disminuir la utilización de los combustibles, á menos que no se encuentre bajo forma de compuestos tales, que con las cenizas forme escorias pastosas adherentes á la parrilla.

8.º La mayor parte de los combustibles, cuando se emplean bajo forma de brisquetas, pueden quemarse más rápidamente que en estado natural, dan menos humo ó no dan ninguno.

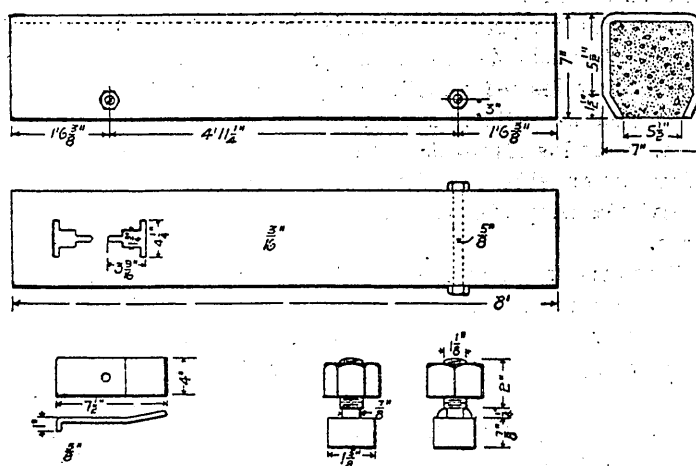
9.º La limpia de los carbones por el lavado permite una combustión más rápida; no tiene influencia en la disminución del humo y en el aumento de la utilización del combustible, á menos que la proporción en cenizas ó en piritas del carbón, antes del lavado, no sea muy elevada.

10. El carbón graso da la mejor utilización cuando se carga por pequeñas cantidades, y cada tres ó cuatro minutos, y cargando solamente cada vez la mitad de la parrilla. Hasta una velocidad media de combustión se puede evitar completamente la producción de humo dejando las puertas del hogar parcialmente abiertas durante un corto espacio de tiempo después de haber cargado la parrilla. El espesor más conveniente para la capa de combustible es de 12 á 25 centímetros con un tiro de 12 á 17 milímetros de agua en el sitio del registro.

11. Los lignitos dan buenos resultados cuando la diferencia de presiones en la base de la chimenea y en el cenicero está comprendida entre 37 y 50 milímetros de agua. La combustión se efectúa mejor cuando la parrilla se carga cada seis ú ocho minutos, extendiendo los pedazos en toda la superficie de la parrilla. El empleo de parrillas móviles es recomendable para los lignitos.

12. Con la carga á mano, cuando se quema carbón graso ó lignitos, hay interés en emplear cámaras de combustión y colocar disposiciones que favorezcan la mezcla de los gases.—O.

Esta traviesa, inventada por Mr. John G. Snyder [d'Altoona, Pa, está en servicio desde hace dos años en una vía de estación



de la «Central Iron & Steel Company», en Harrisburg, Pa, que fabrica y vende la traviesa.

La traviesa «American» está igualmente en ensayo en la gran línea del «Pensilvania Railroad», en una vía de la división de Conemaugh, donde se han colocado 3.000 durante el mes de Septiembre de 1907.

También está en servicio, en escala más reducida, en otros caminos de hierro. El «American Steel Tie Company, 90, West Street, New-York City», tiene la propiedad y la venta.—O.

LA TRAVIESA DE ACERO «AMERICAN»

La traviesa de acero «American», que es, para hablar más exactamente, una traviesa mixta, consiste en una envolvente de palastro de acero en forma de gamella invertida rellena de una mezcla de asfalto y piedra machacada. La figura da á conocer los detalles de construcción. Las dimensiones son las siguientes: 2,44 metros de longitud, 178 milímetros de ancho en la cara superior, 140 milímetros de ancho en la base y 178 milímetros de espesor.

La envolvente de acero, que tiene 4,8 milímetros de espesor, está replegada en la base para contener el hormigón y dos pernos de 16 milímetros impiden que se abra.

La unión al carril es por el sistema de grapa. La extremidad exterior de la grapa está doblada en una longitud de 25,4 milímetros y se introduce en una ranura abierta en la plancha de la traviesa, y la otra extremidad está replegada formando un ángulo para salvar el patín y apoyarse contra el alma del carril. Los pernos de las grapas son de cabeza cuadrada; ésta se introduce en un agujero cuadrado practicado encima de la traviesa; después se empuja hacia el lado del carril de manera que la varilla se introduzca en una mortaja y la cabeza se apoya contra la cara inferior de la capa cuando la grapa está en su sitio y apretado el tornillo.

REAL ACADEMIA DE CIENCIAS EXACTAS, FÍSICAS Y NATURALES

DEL DISCURSO LEÍDO POR EL NUEVO ACADEMICO

SR. D. VICENTE GARCINI

Ingeniero de Caminos, Canales y Puertos

EL DÍA 7 DEL CORRIENTE

La ley de interés compuesto, una vez aceptada como buena, establece la condición de igualdad entre las obligaciones de las partes contratantes cuando ambas se evalúan en fecha igual, bien sea la de alguno de los vencimientos, bien otra cualquiera elegida arbitrariamente; por la razón fundamental de que valores idénticos en un mismo instante y que han de variar con el tiempo de idéntica manera, serán siempre iguales siendo coetáneos.

Y como en todas las operaciones financieras ofrece una de las partes cantidades de numerario que pagará en fechas determinadas, á cambio de otras cantidades de dinero que le son entregadas ú ofrecidas por la otra parte para fechas diferentes, claro es que se obtiene la ecuación del problema al igualar las sumas de valores presentes de los respectivos compromisos. La clásica fórmula $c = c_0 (1 + r)^n$, de todos conocida, expresa la ley de variación del capital con el tiempo.

El primer estudio que puede hacerse es el relativo á los diferentes valores que alcanza el mismo capital inicial al cabo de igual tiempo, cuando á la vez se subdividen, en número idéntico de partes iguales, el plazo de composición del rédito con el capital y el tipo del interés.

Para hacer más notoria esa ley puedo decirlos, por ejemplo, que á los veinte años, un capital de 1.000 pesetas, al 6 por 100 anual, se convierte en otro de 3.207 pesetas; al fin de ochenta trimestres, y al 1 $\frac{1}{2}$ trimestral, llega á valer 3.290,66; al fin de los siete mil trescientos días que tienen los veinte años, y al $\frac{6}{365}$ por 100 de rédite diario, llegarán á valer las 1.000 pesetas 3.320,07; pero si continuamos componiendo los intereses por minutos ó segundos, el valor que llegue á tomar dicho capital al fin de aquellos veinte años no podrá llegar á la cifra de 3.320 pesetas 12 céntimos, límite de la expresión $1.000 \left(1 + \frac{0,06}{n}\right)^{20n}$ cuando n crece indefinidamente.

He dicho todo esto para hacer notar que no es lo mismo colocar el dinero á interés compuesto al 6 por 100 anual, al 3 por 100 semestral, al $\frac{1}{2}$ por 100 mensual, etc., etc.; pero la influencia de la pequeñez del tipo del interés, aplicado á periodos de tiempo que decrezcan en la misma proporción, tiene mucha influencia en las primeras subdivisiones y muy poca cuando se llevan muy lejos.

No es igual, como hemos visto, componer los intereses por años, al tipo r , que componerlos por fracciones de año y á un tipo que sea igual fracción de r . Fácilmente se demuestra que, componiendo los intereses anualmente al tipo r , y componiéndolos en fracciones $\frac{1}{n}$ de año, sólo se obtendrán valores iguales y coetáneos para un mismo capital inicial, cuando sea el tipo de interés para el segundo caso $\frac{r'}{n}$, y cuando entre r' y r exista la relación siguiente:

$$r' = n \left[(1 + r)^{\frac{1}{n}} - 1 \right].$$

Del mismo modo se demuestra que, componiendo los intereses anualmente al tipo r y componiéndolos por múltiplos m de años, sólo se obtendrán valores iguales y coetáneos para un mismo capital inicial, cuando el tipo de interés para el segundo caso sea mr' , estando ligadas r y r' por la relación siguiente:

$$r' = \frac{(1 + r)^m - 1}{m}.$$

El valor que haya de adquirir un capital dado C_0 al fin del tiempo $\frac{m}{n}$ de año, y al tipo r de interés anual, podrá calcularse, por consiguiente, dando al tiempo el valor entero m , con tal de sustituir r por $\frac{r'}{n}$ tipo de interés para el enésimo de año, equivalente al r anual. De esta manera se establece el carácter general de la fórmula clásica para tiempos fraccionarios. Demostrada la generalidad de dicha fórmula, no está justificado que se la aplique sólo á valores enteros del tiempo y emplear otra diferente para valores fraccionarios.

La composición de intereses podría hacerse en tiempos infinitamente pequeños expresados por $\frac{1}{n}$ del año, siendo n un número indefinidamente creciente. Cuando n se hace infinitamente grande y el período infinitamente corto, el valor r' correspondiente al r anual es lo que se llama *rédito anual en la composición continua é infinitesimal*. Como $C \left(1 + \frac{r'}{n}\right)^{mn}$ ha de ser igual á $C(1 + r)^m$, cuando n es infinito, el valor de r' estará enlazado con el de r , en este caso límite, por la relación $e^{r'} = (1 + r)$ ó $r' = l(1 + r)$.

Todas las fórmulas en que aparezcan potencias $(1 + r)$ pueden sustituirse por potencias iguales de $e^{r'}$, y de este modo se

obtienen fórmulas en apariencia muy diferentes de las que suelen ofrecer los libros elementales que tratan de esas cuestiones, pero idénticas en el fondo, y que son de gran utilidad en muchas ocasiones.

No entraré en detalles acerca de los problemas prácticos á que dan lugar los descuentos; para ellos se emplean las fórmulas llamadas de descuento á interés simple, á interés compuesto y comercial. El problema se reduce á calcular el valor presente de una promesa de pago de cierta cantidad para tiempo futuro, dentro de la ley general del interés compuesto, aplicable, como hemos visto, á tiempos enteros ó fraccionarios. Se resolverá dando al exponente el valor negativo del tiempo que ha de transcurrir hasta que se haga efectiva la promesa. La diferencia entre la cantidad que se paga al contado y la prometida, ó valor nominal del documento, es la diferencia de ordenadas de la curva de valores del capital, y se llama descuento á interés compuesto.

No por ser más fácil el cálculo, sino por ser más beneficioso para el que paga de presente, que generalmente es el banquero, se sustituye la ley general ó descuento á interés compuesto por el descuento á interés simple; éste da la misma cifra si el plazo es exactamente un año, pero da una cifra mayor cuando el plazo es inferior, como sucede casi siempre en la práctica del descuento de efectos comerciales. Y tampoco suele emplearse esa ley del interés simple, sino otra llamada del descuento comercial, que favorece al banquero todavía más.

Desde el punto de vista puramente matemático no tienen razón de ser tales excepciones.

El problema más general no consiste en determinar el valor presente de una sola promesa de pago; por lo común pueden ser muchos los vencimientos y en épocas venideras diferentes; pero claro es que, sabiendo calcular el valor de cada uno, bastará sumar todos ellos para tener el que corresponde á la totalidad de las promesas. Cuando las cantidades ofrecidas para cada vencimiento son iguales, y los vencimientos equidistantes, forman lo que se llama una *renta*, que podrá ser perpetua é inmediata, perpetua pero diferida, inmediata y temporal, ó diferida y temporal.

Los valores presentes de todos ellos son siempre iguales á cierta suma de términos de una progresión por cociente, cuya razón es una potencia negativa, entera ó fraccionaria, del binomio formado por la unidad y el tipo de interés correspondiente al período de tiempo de la composición de réditos, el cual á su vez podrá ser igual ó diferente del plazo que separa dos vencimientos sucesivos de la renta.

Para obtener la fórmula más general posible, en la que estén comprendidos todos los casos particulares, llamaremos:

a al importe de la cuota constante pagadera á cada vencimiento.

n al número de cuotas separadas por vencimientos equidistantes que constituyen la renta.

t_1 al lapso de tiempo que corresponde á la composición de los réditos con el capital.

r al tipo de interés correspondiente al lapso de tiempo t_1 .

t_2 al lapso de tiempo constante que separa dos vencimientos consecutivos de cuotas de renta.

t_3 al de tiempo que ha de transcurrir hasta el vencimiento de la primera cuota.

c á la relación de t_2 á t_1 .

k á la diferencia $\frac{t_2}{t_1} - \frac{t_3}{t_1}$; si k es positivo, se dice que la renta es diferida; si k es negativo, que es anticipada; si k es nula, que es inmediata; cuando n es finito, la renta es temporal; cuando n es infinito, que es perpetua.

La fórmula del valor presente de cualquier renta será:

$$V = \frac{a}{(1+r)^k} \left(\frac{1}{(1+r)^c - 1} \right) \left\{ 1 - \frac{1}{(1+r)^{nc}} \right\}.$$

Si es inmediata, k será nula y la fórmula se convierte en

$$V = \frac{a}{(1+r)^c - 1} \left\{ 1 - \frac{1}{(1+r)^{nc}} \right\},$$

si además $t_1 = t_2$, que es el caso de las rentas anuales ordinarias cuando la composición de réditos es anual, se convertirá en

$$V = \frac{a}{r} \left(1 - \frac{1}{(1+r)^n} \right),$$

y por último, si además fuera perpetua, en $V = \frac{a}{r}$.

En las fórmulas relativas á las rentas intervienen cuatro variables: la cuantía de cada pago, supuesta igual para todos ellos; el número de pagos; el tipo del interés ó rédito anual de la unidad, y el valor presente de la renta. De esas cuatro variables serán datos tres y podrá encontrarse el valor de la desconocida.

Si la incógnita es el tipo del interés, su determinación ofrece alguna dificultad por ser de grado superior la ecuación que ha de resolverse.

Bayli, distinguido matemático inglés, consiguió establecer una fórmula para encontrar directamente la solución del problema sin acudir á los procedimientos generales del Álgebra, que resultarían demasiado laboriosos. En el caso de ser el rédito anual de la unidad superior á seis centésimas, la fórmula de Bayli no da resultados suficientemente aproximados; pero Charlón estableció otras que permiten encontrar un nuevo valor mucho más cercano al verdadero en función del que proporciona directamente la fórmula de Bayli.

La fórmula de Bayli para el caso de rentas inmediatas ordinarias de n términos y en las que los vencimientos de las cuotas están separados por el lapso de tiempo que se toma como base para la composición de los réditos con el capital y para la definición del tipo del interés, es la siguiente:

$$r' = h \cdot \frac{1 - \frac{n-1}{12}h}{1 - \frac{n-1}{6}h};$$

en ella es: $h = \left(\frac{v}{an} \right)^{\frac{2}{n-1}} - 1$; a la cuota anual, n el número de cuotas que forma la renta; V el valor presente, y r' el tipo *aproximado* del interés.

Para las rentas diferidas por d años, y de n cuotas iguales á a , llamando V_d su valor presente, la fórmula de Bayli, en las mismas hipótesis del caso anterior, sería:

$$r' = h \frac{12(2d+n+1) - h(n^2-1)}{12(2d+n+1) - 2h(n^2-1)},$$

siendo

$$h = \left(\frac{V_d}{na} \right)^{\frac{2}{2d+n+1}} - 1;$$

la de Charlón sería para el primer caso:

$$r = r' + \frac{1 - (1+r') - n - \frac{r'V}{a}}{\frac{V}{a} - n(1+r') - (n+1)}$$

y para el segundo:

$$r = r' + \frac{(1+r') - d - (1+r') - (d+n) - \frac{V_d r'}{a}}{\frac{V_d}{a} + d(1+r') - (d+1) - (n+d)(1+r') - (d+n+1)}$$

La fórmula que da el valor presente de una renta inmediata y temporal, en la que cada vencimiento es, por ejemplo, anual, y anual también la composición de intereses al tipo adoptado, puede escribirse descompuesta en dos sumandos; es uno de ellos, el valor presente de la totalidad de los pagos multiplicado por el tipo de interés, y es el otro, el valor presente de un capital idéntico al importe de cada cuota, pagadero al vencimiento de la última anualidad.

Si hubiéramos de pagar sólo anualmente los intereses de capital que se entregó de presente, como valor de la renta, deberíamos satisfacer lo que vale el primer sumando; el segundo corresponderá al reintegro del capital, y, por lo mismo, debe ser tal que, colocándolo cada año á interés compuesto y al tipo adoptado, formarían todas esas entregas, al vencimiento de la última anualidad, un capital idéntico al que se entregó, lo que permitiría reintegrarle entonces de una vez. Es bien fácil comprobar esa condición.

Pero si en vez de hacer lo que hemos dicho, entregamos al acreedor toda la *renta*, reintegramos cada año una porción del capital y cada vez que se paga una anualidad sólo quedará en pie una parte de la deuda, que llamaremos *resto*. El valor del resto será el de una renta inmediata de igual cuota y de tantas anualidades como sean las que no vencieron todavía. Lo que se amortiza al pagar la sexta anualidad, por ejemplo, será la diferencia entre los restos quinto y sexto.

De esa manera podremos encontrar la porción de capital que cada año se amortiza, y formar el cuadro de amortización de obligaciones cuando el préstamo se repartió en títulos iguales y se destinó al pago de intereses y amortización de todos ellos la renta constante inmediata y temporal que resultó necesaria.

La fórmula correspondiente sería:

$$R_{p-1} - R_p = \frac{a}{(1+r)^{n-p+1}}$$

y dando á p los valores sucesivos desde uno hasta n , tendremos las amortizaciones parciales que á cada año corresponden.

Aunque una operación financiera se contrate ó se calcule sobre la base de un tipo de interés y con arreglo á él se establezca el valor de cada título, tanto para el cobro de intereses como para el reintegro, el mercado fija en realidad el valor presente, quedando como nominal el que sirvió de base al cálculo de la anualidad ó renta que ha de pagar de todos modos la entidad que negoció el préstamo.

Siempre que el valor de emisión de los títulos es diferente del valor nominal, surge el problema de hallar el tipo efectivo de interés á que realmente resulta efectuada la operación, problema de que ya me ocupé.

Este mismo problema puede resolverse en cualquier instante, conociendo la *edad* de las obligaciones y, por tanto, las anualidades futuras y el número de obligaciones que subsistan en circulación como partícipes en el valor de aquéllas. Claro es que nos darán también el valor presente, que será el de su cotización en el mercado, ó el aceptado en la transacción que sirva de base á la determinación del tipo de interés.

Los problemas de arbitrajes de valores exigen la comparación de los precios que deberían tener obligaciones ó títulos de empréstitos diferentes para que el dinero produzca un mismo tipo de interés. Para ello se calcula: primero, el tipo de interés que corresponde, según la cotización que alcancen y la edad que

tengan determinados títulos que se toman como término de comparación, aceptando su valor efectivo como valor matemático, y segundo, el valor presente ó *cotización matemática*, que corresponde á los otros títulos ú obligaciones, adoptando para el cálculo el tipo de interés antes encontrado. Este valor matemático de los segundos títulos podrá resultar igual, mayor ó menor que su valor corriente en el mercado. Si es igual, hay *paridad* entre las deudas que se comparan; si es menor, se dice que los segundos títulos están *preferidos*, y si mayor que están *postergados*. Todo ello, claro está relativamente á los primeros que se tomaron como tipo de comparación.

Si la cuantía del rédito no comprendiese una apreciación relacionada con la mayor ó menor seguridad de que se cumplan ó no los ofrecimientos de pago, no habría razón para la preferencia ó postergación, y debería existir siempre paridad entre toda clase de títulos; pero de todos modos, en virtud de los cálculos á que me acabo de referir, podrá verse cuál es la importancia de la preferencia ó postergación que el mercado otorga á unos y otros, y aceptarla ó no el tenedor, según sus apreciaciones personales, eligiendo en definitiva los que en su concepto estén menos apreciados de lo que merecen.

Aunque en todo lo que llevo dicho se han supuesto las rentas anuales y que anualmente se hace la composición de intereses, claro es que podrá ser menor el plazo que separa cada pago de la renta con tal de ser iguales todos esos plazos, y podrá efectuarse la composición de intereses en períodos menores de un año, iguales ó diferentes del período que separe de los pagos sucesivos de la renta. Las fórmulas se complican un poco, sobre todo en este último caso; pero en definitiva, y, como ya hicimos ver, el valor presente de la renta se obtiene sumando los términos de una progresión.

No sucede lo mismo cuando no es constante la cuota de la renta, ó no lo es el intervalo de tiempo que separa el vencimiento de dos cuotas sucesivas. El problema se plantea siempre de idéntica manera, pero las fórmulas á que podremos llegar en algunos casos son muy diferentes. Si no hay ley ninguna que rijan la cuantía de las cuotas y los lapsos de tiempo que separan cada dos vencimientos consecutivos, no hay más remedio que calcular aisladamente el valor actual de cada término y sumarlos todos; pero si existe alguna ley que los rijan, lo que hasta ahora fueron progresiones se convierten en series, que á veces pueden reducirse á fórmulas sumatorias que evitan cálculos penosos.

No entraré en el examen de la infinidad de problemas que en tal concepto podrían plantearse; sólo me ocuparé breves instantes de las rentas uniformes con relación al tiempo y cuya cuota ó anualidad varía según leyes sencillas.

Cuando el importe de las anualidades es constante podemos llamar á la renta *paralela*, porque la ley de variación de su cuota con el tiempo estaría representada por una paralela al eje de los tiempos. Si la cuota anual creciese ó decreciese con uniformidad, estaría representada por una oblicua respecto del eje de los tiempos, y por lo mismo podríamos llamarla *lineal*, conteniendo dicha cuota dos argumentos ó coeficientes: el valor a de la primera y su incremento representado por b .

Los términos que forman en este caso el valor presente de una renta de n cuotas serían de la forma $\frac{a \pm pb}{(1+r)^{p+1}}$, y dicho valor sería igual á la suma de términos sucesivos de esta serie entre los valores de p , cero y $p = n-1$. Dicha serie puede sumarse por descomposición y la fórmula de V será:

$$V = \sum_{p=0}^{p=n-1} \frac{a \pm pb}{(1+r)^{p+1}} = \frac{a}{r} \left(1 - \frac{1}{(1+r)^n} \right) \pm \frac{b}{r^2} \left(1 - \frac{1+nr}{(1+r)^n} \right).$$

Esta fórmula puede ponerse bajo la forma siguiente:

$$a = Vr + \frac{a}{(1+r)^n} \pm \frac{b}{r} \left(1 - \frac{1+nr}{(1+r)^n} \right).$$

Si, como sucede muchas veces, el mismo capital V que se entrega es la única garantía ofrecida por el que le recibe y se obliga á pagar la renta equivalente, y si además, por ser esa renta de cuota creciente, es la primera anualidad la más pequeña de todas, el valor de a debe valer, cuando menos, los intereses del capital representados por Vr , y por lo mismo debe ser mayor que cero la suma algebraica de las otras dos.

De la condición

$$\frac{a}{(1+r)^n} - \frac{b}{r} \left[1 - \frac{1+nr}{(1+r)^n} \right] > 0$$

deducimos:

$$b < \frac{ar}{(1+r)^n - [1+nr]};$$

por lo mismo podremos igualar b á la indicada fracción multiplicada por μ , siendo μ un numeral comprendido entre cero y la unidad. Si en la fórmula general de V , reemplazamos b por ese valor, y simplificamos la expresión que resulta, llegamos á la siguiente:

$$V = \frac{a}{r} \left(1 - \frac{1}{(1+r)^n} \right) + \frac{\mu}{r} \frac{a}{(1+r)^n}.$$

Con la renta de cuota mínima a , se puede levantar un empréstito de valor presente $\frac{a}{r} \left(1 - \frac{1}{(1+r)^n} \right)$, luego en el caso de no tener otra garantía que el mismo capital que se ha de recibir, el mayor empréstito á que puede aspirarse, obligándose á pagar rentas lineales crecientes, sólo podrá superar al que podría obtenerse á cambio de una renta constante, de cuota igual á la mínima, en la cantidad $\frac{a}{r(1+r)^n}$.

Dando á μ el valor máximo igual á la unidad, la forma de V sería:

$$V = \frac{a}{r} \left[1 - \frac{1}{(1+r)^n} \right] + \frac{a}{r} \cdot \frac{1}{(1+r)^n},$$

obtenida dando á b el valor limite

$$b = \frac{ar}{(1+r)^n - (1+nr)}.$$

Si en la última fórmula de V , llamamos λ al cociente de dividir el segundo sumando por el primero, encontramos

$$\lambda = \frac{1}{(1+r)^n - 1}.$$

Se puede determinar el tipo de interés que habría de exigir la posibilidad de conseguir determinado valor numérico para λ , con una renta lineal creciente de n cuotas; ese tipo sería:

$$r = 1 - \sqrt[n]{\frac{1+\lambda}{\lambda}}.$$

Si el tipo de interés fuera dato, y quisiéramos encontrar cuántos términos podrían formar una renta de aquella clase,

para que fuera posible conseguir un valor de λ escogido de antemano, el valor de n vendría dado por la fórmula:

$$n = \frac{\log. \left(\frac{1 + \lambda}{\lambda} \right)}{\log. (1 + r)}$$

En todos estos casos, por haber dado á μ el valor uno, habremos impuesto la condición de que la primera cuota a sea exactamente igual al importe del interés anual del capital recibido, y que la amortización comienza desde la segunda anualidad.

En la fórmula general de esta clase de rentas intervienen cinco variables. De ellas dos corresponden á la ley que define completamente todas las cuotas anuales. Tomando arbitrario uno de los coeficientes, ó estableciendo relación entre los dos que definen aquellas últimas, pueden resolverse en esta clase de rentas los mismos problemas que en las paralelas.

Cuando es la incógnita uno de aquellos coeficientes, ó cuando lo es el valor presente de la renta, la solución es muy fácil.

Sin embargo, en este último caso puede surgir un problema interesante. Si fueron escogidos arbitrariamente el importe de la primera cuota, su crecimiento anual, el tipo del interés y el número de las cuotas, y si buscado el valor presente de la renta, el rédito anual que le correspondería superase al valor de la primera anualidad, resultaría que en vez de irse amortizando el préstamo la deuda crecería en los primeros años; habría, digámoslo así, una amortización negativa, que se haría positiva más tarde. Aun suponiendo que el valor presente de lo que se entrega no fuera fungible y pudiera responder al cumplimiento del pacto, habría de exigirse otra especial garantía para el incremento máximo que podía alcanzar la deuda. El problema, que es interesante, tendría, y ha tenido aplicación, el caso de convertirse un colono en propietario mediante el compromiso de pago de una renta de cuota creciente, pero á condición de efectuar antes á su costa, ó con su trabajo, obras ó construcciones en el inmueble bastantes á garantizar el déficit inicial de la renta en los primeros años.

La determinación del importe mínimo de aquella garantía especial, puede hacerse de la manera siguiente. El valor de la deuda, después del pago de cada cuota, será siempre el que tiene la renta inmediata pendiente de pago. Cuando cesa de haber aquel desequilibrio, es decir, cuando la amortización ha de pasar de negativa á positiva, será ya la anualidad suficiente para pagar el interés y comenzar la amortización ó la disminución paulatina de la deuda. Supongamos que esto ocurre después de pagada la cuota K . Si conociéramos ese número, la garantía debiera ser $R_k - r$.

Pero el resto R_k tendrá por expresión:

$$R_k = \frac{a + Kb}{r} \left(1 - \frac{1}{(1+r)^{n-k}} \right) + \frac{b^2}{r^2} \left(1 - \frac{1 + (n-K)r}{(1+r)^{n-k}} \right)$$

Aplicando á esta fórmula los procedimientos que apliqué á la de V , para establecer que la primera cuota $a + kb$ sea por lo menos igual á $R_k r$, obtendríamos una ecuación que nos dará el valor de K . Sustituyendo la parte entera del valor de K en la fórmula de R_k y restando V del resultado, tendremos el importe de la garantía necesaria.

Cuando la incógnita es el número de cuotas que deban formar la renta, la solución no es fácil. En el caso de rentas paralelas, era la incógnita un exponente y se reducía fácilmente la ecuación exponencial á ordinaria y de primer grado, tomando logaritmos. En el que ahora examino, aparece la incógnita á la vez como exponente y formando parte de un binomio algebraico; pero como el número de cuotas ha de ser entero en la práctica, lo más cómodo será acudir á procedimientos gráficos para encontrar su valor.

Si la incógnita fuese el tipo del interés no serían aplicables á estas rentas las fórmulas de Bayli y de Charlton, que antes cité; sin embargo, podríamos hallar también para este caso fór-

mulas que dieran un primer valor bastante aproximado, y acercarnos todavía más al verdadero por el método de Newton.

Las rentas de anualidad creciente ó decreciente con uniformidad, puede tener aplicación útil en muchos casos. Cuando se trata de empréstitos destinados á la cooperación en ciertas industrias como, por ejemplo, la de transportes y la de riegos, en las que generalmente no se alcanzan en los primeros años los productos que llegan á conseguirse pasado cierto tiempo, resultará más cómodo y menos arriesgado servir los intereses y la amortización por medio de una renta de cuota anual creciente. Lo contrario deberá hacerse cuando los recursos del deudor hayan de disminuir conforme transcurra el tiempo.

Podría ocuparme en el estudio de otras rentas complejas; de todas ellas sólo mencionaré, sin entrar en detalles, las uniformes en cuanto á los vencimientos, y de cuotas variables según la ley parabólica.

Por ejemplo, en las de segundo grado, el término general de la serie que da su valor actual será:

$$\frac{a + (p-1)b + (p-1)(p-2)c}{(1+r)^p}$$

y el valor presente de la renta es:

$$V = \sum_0^n \frac{[a + (p-1)b + (p-1)(p-2)c]}{(1+r)^p}$$

Esta serie puede también sumarse por descomposición, y la fórmula que da el valor de V será:

$$V = \frac{a}{r} \left[1 - \frac{1}{(1+r)^n} \right] + \frac{b}{r^2} \left[1 - \frac{1 + nr}{(1+r)^n} \right] + 1.2. \frac{c}{r^3} \left[1 - \frac{1 + nr + \frac{n(n-1)}{1.2} r^2}{(1+r)^n} \right]$$

Bien clara se ve la ley general, y puede demostrarse que la renta anual parabólica de grado p tendrá por fórmula:

$$V = \frac{a}{r} \left[1 - \frac{1}{(1+r)^n} \right] + \frac{b}{r^2} \left[1 - \frac{1 + nr}{(1+r)^n} \right] + 1.2. \frac{c^3}{r^3} \left[1 - \frac{1 + nr + \frac{n(n-1)}{1.2} r^2}{(1+r)^n} \right] + \dots 12 \dots p \frac{k}{r^{p+1}} \left[1 - \frac{1 + nr + \frac{n(n-1) \dots (n-p-1)}{12 \dots p} r^p}{(1+r)^n} \right]$$

Las rentas parabólicas de diferentes grados (siempre el grado es menor que el número de cuotas) introducen en la fórmula general nuevas variables; de ellas se relacionan con la ley de variación de la cuota tantos coeficientes, más uno, como unidades tenga el grado de la ley parabólica adoptada. Esto nos proporciona medios de establecer ecuaciones entre mencionados coeficientes para conseguir que se cumplan determinadas condiciones entre algunos de los valores particulares de cada anualidad.

Acerca de esta clase de rentas de cuota variable, efectuó Lecocq estudios muy curiosos. Fué causa de tales estudios el problema planteado para conseguir que los colonos de Argelia pagaran de una manera cómoda y fácil el importe del capital que se les entregaba al ponerlos en posesión de terrenos y edificios que habían de ser de su exclusiva propiedad, si bien quedaban afectos á responder del pago de las anualidades que se comprometían á satisfacer.

(Se continuará.)