

INTRODUCCIÓN

AL ESTUDIO DEL CÁLCULO DE CUATERNIONES

Y OTRAS ÁLGEBRAS ESPECIALES

POR

DON FRANCISCO PÉREZ DE MUÑOZ

Ingeniero de Caminos, Canales y Puertos.

(CONCLUSIÓN)

184. Como última y más próxima preparación para resolver el problema, definamos una función deducida de cada función φ por un procedimiento constante y á la cual denominaremos función conjugada de φ y que representaremos por φ' . Para ello, su definición va á ser: que si se opera por φ sobre un vector ρ , el resultado se multiplica por otro vector σ y del producto se toma el escalar, se obtenga resultado equivalente operando sobre σ por la nueva función φ' , multiplicando el resultado por ρ y tomando el escalar del producto; esto es:

$$S \sigma \varphi \rho = S \rho \varphi' \sigma \quad (1).$$

Si en algún caso particular la función φ fuese idéntica con la φ' esta función será autoconjugada. Á la autoconjugación de las funciones que entran en las teorías de polos y polares se deben la mayoría de las propiedades recíprocas que gozan unos con respecto á otros y que en tanta geometría analítica se demuestran de maneras muchas veces laboriosas.

Más generalmente, si $\varphi \rho = \Sigma V. q \rho r$ donde q y r son cuaterniones cualesquiera constantes, los cuales naturalmente podrán degenerar en vectores ó aun en escalares, si σ es un vector cualquiera por $S. \sigma$ sobre ambos miembros de la anterior,

$$S. \sigma \varphi \rho = S. \sigma \Sigma V q \rho r = S. \rho \Sigma V q \sigma r = S \rho \varphi' \sigma \quad (2).$$

Por lo tanto, si φ se expresa por la (2) del párrafo anterior, φ podrá expresarse por

$$\varphi' \rho = \alpha S' \alpha' \rho + \beta S' \beta' \rho + \gamma S' \gamma' \rho \quad (3).$$

185. Veamos ahora el modo de hallar la inversa de φ , ó sea de despejar σ de la ecuación

$$\sigma = \varphi \rho \quad (1)$$

y escribir

$$\rho = \varphi^{-1} \sigma \quad (2),$$

siendo menester buscar la forma de esta función φ^{-1} . Si nosotros consiguiéramos hallar una relación que nos ligase ρ con el resultado de operar una vez con φ sobre ρ , de operar dos veces y de operar tres veces, ó sea una relación que nos ligue ρ con $\varphi \rho$, con $\varphi^2 \rho$ ($\varphi \rho$) = $\varphi^2 \rho$, y con $\varphi^3 \rho$ ($\varphi^2 \rho$) = $\varphi^3 \rho$, y esta relación fuera lineal, tendríamos el problema resuelto. En efecto; operando por el operador desconocido φ^{-1} sobre el trinomio que nos hubiera resultado

$$- \varphi^3 \rho = x \rho + y \varphi \rho + z \varphi^2 \rho \quad (3)$$

tendríamos

$$- \varphi^2 \rho = x \varphi^{-1} \rho + y \rho + z \varphi \rho,$$

expresión de la cual una simple transposición de términos nos permite conocer $\varphi^{-1} \rho$, ó sea σ . Todo, si x, y, z son independientes de ρ ; de manera que para tener seguridad en cuanto va dicho hay que examinar si realmente existe esta independencia ó no. Basta para ello considerar que $\varphi \rho$ es lineal y homogénea con respecto á ρ , y además es vectorial; luego φ actuará sobre

$\varphi \rho$ del mismo modo que actuó sobre ρ , es decir, que $\varphi^2 \rho$ es también lineal y homogénea, y lo mismo sucede con $\varphi^3 \rho$; luego, cualquiera que sea ρ tendremos paralelepípedos semejantes con tres aristas $\rho, \varphi \rho, \varphi^2 \rho$ y una diagonal $\varphi^3 \rho$ y, por tanto, x, y, z , relaciones de entre aristas y diagonales unas con otras son independientes con la magnitud absoluta de ellos. Si pues, consiguiéramos escribir una relación tal como la (3), en la cual conociéramos á los tres parámetros x, y, z , tendríamos resuelto el problema de la inversión de φ .

186. Para guardarnos de caer en un error, y al mismo tiempo para ilustrar lo dicho en el párrafo (21), harás notar que no deberá intentarse la averiguación del programa φ^{-1} por división

de ρ por $\sigma = \rho$, pues el cociente $\frac{\rho}{\sigma}$ será sí, un programa de operaciones que nos convierta σ en ρ , pero no será el único y por lo tanto, necesariamente φ^{-1} .

187. Procedamos, por último, á investigar el modo de hallar φ^{-1} . Para ello sean λ, μ un par de vectores cualesquiera, é igualemos $\sigma = \varphi \rho$ al vector del producto $\lambda \mu$, así:

$$\sigma = \varphi \rho = V \lambda \mu \quad (1)$$

$\varphi \rho$ será por lo tanto perpendicular simultáneamente á $\lambda \mu$ y por lo tanto

$$S \lambda \varphi \rho = 0 \quad S \mu \varphi \rho = 0 \quad (2),$$

lo cual expresado en función de la conjugada φ' , da las expresiones

$$S \rho \varphi' \lambda = 0 \quad S \rho \varphi' \mu = 0 \quad (3).$$

Los vectores $\varphi' \lambda$ y $\varphi' \mu$ son, pues, perpendiculares á ρ , y por consiguiente un cierto múltiplo de $\rho, m \rho$, será igual al vector del producto $\varphi' \lambda \varphi' \mu$,

$$m \rho = V \varphi' \lambda \varphi' \mu = \psi V \lambda \mu \quad (4).$$

El pasar del segundo al tercer miembro de las igualdades anteriores y ver además que ψ es una nueva función lineal y vectorial de $V \lambda \mu$, al mismo tiempo que vemos también que m es un escalar independiente de λ, μ y ρ , constituye lo típico de este cálculo.

Operando para ello sobre la (1) por φ^{-1} y comparando el resultado con la (4) tenemos

$$m \varphi^{-1} V \lambda \mu = V \varphi' \lambda \varphi' \mu \quad (5).$$

Si, pues, conseguimos encontrar la expresión de m y poner el segundo miembro en función $V \lambda \mu$, ó sea hallar la función ψ , tendremos resuelto el problema de la inversión de φ .

Para hallar m elijamos un vector arbitrario ν y operemos por medio de $S \varphi' \nu$, sin más precaución que la de haber elegido á ν , no coplanario, $\lambda \mu$ sobre la (4) con lo que tendremos

$$m S \varphi' \nu \varphi^{-1} V \lambda \mu = m S \nu \varphi \varphi^{-1} V \lambda \mu = m S \nu V \lambda \mu = m S \lambda \mu \nu = S \varphi' \lambda \varphi' \mu \varphi' \nu,$$

de donde sacamos inmediatamente

$$m = \frac{S \varphi' \lambda \varphi' \mu \varphi' \nu}{S \lambda \mu \nu} \quad (6).$$

Para convencernos de que de esta expresión de m es independiente de λ, μ y ν expresemos en función de ellos, puesto que no son coplanarios, otros tres λ', μ' y ν' tales como

$$\begin{aligned} \lambda' &= x_1 \lambda + y_1 \mu + z_1 \nu & \mu' &= x_2 \lambda + y_2 \mu + z_2 \nu \\ \nu' &= x_3 \lambda + y_3 \mu + z_3 \nu \end{aligned}$$

y las funciones φ' correspondientes para estos nuevos vectores y encontraremos que tanto $S \lambda' \mu' \nu'$, como $S \varphi' \lambda' \varphi' \mu' \varphi' \nu'$ son las expresiones correspondientes para los vectores λ, μ, ν multiplicadas por el determinante

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$$

luego su cociente será independiente de los números x, y, z , y es por lo tanto un invariable absoluto.

188. Conocido m por la fórmula (6), veamos de expresar $V\varphi'\lambda\varphi'\mu$ en función de $V\lambda\mu$. Para ello cambiemos φ en $\varphi - g$, siendo g un escalar arbitrariamente elegido. Cambiar φ en $\varphi - g$ quiere decir que el efecto del operador φ sobre un vector ρ , ó sea $\varphi\rho$, se habrá cambiado en $\varphi\rho - g\rho$. Evidentemente $\varphi - g$ será una nueva función lineal, vectorial y homogénea, á la cual podremos calcularle una m correspondiente que denominaremos m_g , y que estará relacionada con ella del mismo modo que la m lo está con φ . La conjugada de esta nueva función es, $\varphi' - g$, donde φ' es la misma conjugada de φ considerada antes. Escribiendo una ecuación análoga á la (6) para esta nueva función $\varphi - g$, afectando á los dos mismos vectores λ y μ anteriores, tendremos:

$$m_g (\varphi - g)^{-1} V\lambda\mu = V(\varphi' - g)\lambda(\varphi' - g)\mu \\ = V\varphi'\lambda\varphi'\mu - g V(\varphi'\lambda\mu + \lambda\varphi'\mu) + g^2 V\lambda\mu \quad (7).$$

El último término del tercer miembro contiene como factor á $V\lambda\mu$; en el primer término se puede poner de manifiesto análogo factor, teniendo en cuenta la (5), que nos dice que es igual á $Vm\varphi^{-1}V\lambda\mu$, luego si el segundo término fuera expresable como función $V\lambda\mu$, lineal y vectorial por supuesto, y llamásemos x á esta función, podríamos escribir:

$$m_g (\varphi - g)^{-1} V\lambda\mu = (m\varphi^{-1} - g x + g^2) V\lambda\mu \quad (8).$$

Si por algo no se puede escribir esta última expresión será por no ser lineal y vectorial de $V\lambda\mu$ la función que hemos designado por x . Sigamos en sus consecuencias á la (6), y si nuestra hipótesis ha sido falsa, ella misma nos lo dirá conduciéndonos á un absurdo.

El valor ó expresión de m_g es análogamente que el de g :

$$m_g = \frac{S \cdot (\varphi' - g)\lambda(\varphi' - g)\mu(\varphi' - g)\nu}{S\lambda\mu\nu},$$

y desarrollando:

$$m_g = \frac{1}{S\lambda\mu\nu} \left[S \cdot \varphi'\lambda\varphi'\mu\varphi'\nu - S(\lambda\varphi'\mu\varphi'\nu + \mu\varphi'\nu\varphi'\lambda + \nu\varphi'\lambda\varphi'\mu)g \right] \\ + S(\lambda\mu\varphi'\nu + \mu\nu\varphi'\lambda + \nu\lambda\varphi'\mu)g^2 - g^3;$$

ó sea, teniendo en cuenta la expresión de m y designando por m_1 y m_2 los dos coeficientes de g y g^2 , tendremos:

$$m_g = m - m_1 g + m_2 g^2 - g^3 \quad (9).$$

Las expresiones de m_1 y m_2 son también invariantes como lo es la de m , porque si en ellas se sustituye en lugar de $\lambda, \lambda + x\mu$ los coeficientes de x se anulan idénticamente.

Si ahora en la (8) sustituimos en lugar de m_g su expresión (9) y operamos por medio $(\varphi - g)^{-1}$ sobre ambos miembros, tenemos:

$$(m - m_1 g + m_2 g^2 - g^3) V\lambda\mu = (\varphi - g)^{-1} (m\varphi^{-1} - g x + g^2) V\lambda\mu.$$

Haciendo operaciones, simbólicas todas ellas, en el segundo miembro, destruyendo términos semejantes é igualando los coeficientes de las diversas potencias de g , puesto que siendo g arbitraria, esta ecuación debe ser satisfecha idénticamente, se tiene:

$$m_2 = \varphi + x \quad m_1 = \varphi x + m\varphi^{-1}.$$

Entre cuyas ecuaciones podemos eliminar la función auxiliar x , con lo que tenemos

$$m_1 = \varphi(m_2 - \varphi) + m\varphi^{-1},$$

y operando por φ y trasponiendo términos

$$m - m_1 \varphi + m_2 \varphi^2 + \varphi^3 = 0 \quad (10),$$

cúbica simbólica que encierra la solución de la ecuación lineal y vectorial, puesto que operando en ella por φ^{-1} , φ^{-2} ó φ^{-3} , según que uno, dos ó tres coeficientes *mes* sean nulos, se tiene una función que liga á φ^{-1} con las diversas potencias de φ y con coeficientes m, m_1 , y m_2 que siempre podemos calcular.

Constituye la anterior investigación una de las más admiradas de Hamilton, y desde luego puede asegurarse que es una de aquéllas más sin precedentes en las ciencias matemáticas. En la tierra de los precedentes y de las simetrías hubiera ciertamente naufragado.

189. La cúbica (10) se denomina la cúbica simbólica, y su papel es importantísimo en multitud de investigaciones puramente matemáticas, dinámicas y físicas. Si igualamos á cero el segundo miembro de la (9), tenemos:

$$m - m_1 g + m_2 g^2 - g^3 = 0,$$

que es la cúbica *latente* de la función φ , y sus raíces se denominan raíces latentes de φ . Sean g_1, g_2 y g_3 estas raíces, podremos escribir ambas cúbicas latentes y simbólica como sigue:

$$(g - g_1)(g - g_2)(g - g_3) = 0 \quad (11),$$

$$(\varphi - g_1)(\varphi - g_2)(\varphi - g_3) = 0 \quad (12).$$

La misma ecuación (12) se satisface por la función conjugada φ' , luego podemos escribir

$$S(\varphi' - g_1)\alpha \cdot (\varphi' - g_2)(\varphi' - g_3)\beta = S\alpha(\varphi - g_1)(\varphi - g_2)(\varphi - g_3)\beta = 0,$$

siendo α y β dos vectores arbitrariamente elegidos. El vector $(\varphi' - g_1)\alpha$ es, por lo tanto, perpendicular al $(\varphi - g_2)(\varphi - g_3)\beta$, y como α y β son completamente arbitrarios, uno de los anteriores $(\varphi' - g_1)\alpha$ ó $(\varphi - g_2)(\varphi - g_3)\beta$ debe ser paralelo á una dirección fija en el espacio, y como $(\varphi' - g_1)\alpha$ no lo es en general se deduce que debe serlo el otro. Lo mismo sucederá con el producto de otro vector cualquiera por el producto de otros dos de los binomios $(\varphi - g)$, luego el producto por un par de estos binomios sobre un vector lo convierte en otro de dirección fija.

Hay, pues, asociada á cada función lineal y vectorial φ tres direcciones fijas en el espacio, denominadas *ejes* de la función.

190. Añadamos para terminar, que si φ y φ' son dos funciones conjugadas, su suma $\varphi + \varphi'$ tendrá por conjugada

$$\varphi' + \varphi = \varphi + \varphi',$$

ó sea, ella misma. De modo que si

$$\Phi = \varphi + \varphi'$$

es una función Φ es autoconjugada, y tenemos una regla fácil y sencilla para construir funciones de esta naturaleza.

191. Hemos terminado este capítulo, y con él toda la parte teórica que nos propusimos exponer al emprender este trabajo. Pensaba reservar un capítulo para exponer las más importantes de sus aplicaciones; pero después de varios intentos he debido modificar mi propósito, pues por muy condensadas que estas aplicaciones se presenten, es imposible encerrarlas en tan estrechos límites. Reservo, pues, para una segunda serie de artículos esta exposición, pensando detenerme principalmente en las aplicaciones físicas y dinámicas, ciencias de tan capital importancia en las artes del Ingeniero y cuyos programas y exposición no han estado siempre á la altura de los tiempos en diversas escuelas de nuestras especialidades. Espero que el lector podrá notar las ventajas de este cálculo, y principalmente su gran potencia de raciocinio, en los artículos que sigan.—(Fin de la primera serie.)