

ciales á la circulación y que se forman en la mayoría de los otros sistemas de adoquinado.

Este procedimiento ha sido aplicado en Gratz; su inventor dice que el precio de costo no pasa de 9 francos el metro cuadrado, en tanto que los otros revestimientos varían entre 16,50 á 21 francos.—O.

EFFECTOS DE LA DILATACION EN EL HORMIGON ARMADO

Un tabique de hormigón de longitud l que pasa de 0 á t° , adquiere una longitud $l(1 + kt)$; si las extremidades del tabique están fijas y sin libertad de dilatación, el tabique se dobla y toma una forma parabólica de cuerda l y de flecha f , cuya longitud se expresa aproximadamente por la expresión:

$$l \left(1 + \frac{8}{3} \frac{f^2}{l^2} \right)$$

cuando la relación es $\frac{f}{l}$ es pequeña.

Se puede por lo tanto escribir:

$$l(1 + kt) = l \left(1 + \frac{8}{3} \frac{f^2}{l^2} \right)$$

lo que da:

$$f = -\frac{8}{3} l \sqrt{kt} = 0,0022 \cdot l \sqrt{t},$$

dando á k el valor $1/80.000$, para el hormigón como para el hierro.

Para $t = 36^\circ$, se encuentra $f = 0,012 l$.

Con un tabique de 50 metros la flecha es $0^m,60$, y hay grandes temores de que el tabique se rompa.

Según la *Revue de Genie Militaire*, esto es lo que parece haber producido la catástrofe del tercer depósito de Madrid.—O.

EL CAMINO DE HIERRO DE LA JUNGFRAU

El camino de hierro de la Jungfrau, para la apertura á la explotación de la nueva sección Eigerwand-Eismeer, acaba de alcanzar la altura de 3.162 metros sobre el nivel del mar, altura á que ninguna estación de camino de hierro de Europa había llegado todavía.

Un artículo publicado por *Zentralblatt der Bauverwaltung*, hace una rápida exposición de los estudios y trabajos á que ha dado lugar esta línea hasta el presente. El proyecto se debe al Ingeniero Guyer-Zeller, de Zurich, y la línea ha de alcanzar la cota 4.166, cumbre de la Jungfrau.

La primera parte se comenzó en 1896, estableciéndose una vía estrecha de 1 metro, con cremallera y tracción eléctrica, y cuya pendiente máxima es de 25 por 100.

El camino de hierro de la Jungfrau propiamente dicho, empieza en la cota 2.064, en la estación de la Petite-Scheideck; la línea que se extiende, á partir de aquí, á lo largo de las heleras de l'Eiger, alcanzó en 1898, las estaciones de l'Eigerglietsher á 2.323 metros, después de un recorrido de 2 kilómetros próximamente. En este último punto se abre el túnel de 10 kilómetros de longitud, 3,70 metros de ancho y 4,35 metros de altura, que ha de prolongarse hasta la cumbre.

La primera estación en túnel de Rostock se ha inaugurado en 1899, en la cota 2.530.

La sección Rostock-Eigerwand se construyó de 1899 á 1903, y finalmente, la sección Eigerwand-Eismen acaba de terminarse; la línea ha llegado, pues, al kilómetro 5.700, y se encuentra bajo el collado que separa las dos cumbres de Eiger y del Mönch.

Se trata de hacer en Eismen una estación invernal, punto muy frecuentado por todos los aficionados á los sports de invierno.

Á partir de aquí, se dirigirá hacia el Oeste, con una pendiente máxima de 6,6 por 100, y alcanzará al cabo de 4 kilómetros la estación de Jungfraujoch; después la pendiente se acentúa de nuevo hasta un 25 por 100, hacia la estación terminal, que está en la cota 4.093. La verdadera cumbre, á 73 metros más alta, ó sea en la cota 4.166, será alcanzada con un ascensor eléctrico.

La terminación de la línea requerirá todavía próximamente diez años.

Los resultados de la explotación de la primera parte son ya muy satisfactorios; en el primer año, cuando no se llegaba más que á la estación de Rostock, el número de viajeros fué de 26.000; con la apertura de la estación de Eigerwand, este número ha llegado á 29.000.

Es de notar que el túnel en construcción se abre en una roca caliza muy compacta que dispensa de todo revestimiento; se emplean perforadoras eléctricas sistema Siemens et Halske.

Los trabajos se siguen día y noche, y se han gastado ya 6 millones de francos.—O.

INTRODUCCIÓN

AL ESTUDIO DEL CÁLCULO DE CUATERNIONES

Y OTRAS ÁLGEBRAS ESPECIALES

POR

DON FRANCISCO PÉREZ DE MUÑOZ

Ingeniero de Caminos, Canales y Puertos.

(CONTINUACIÓN)

170. Son estas las peculiares y exclusivas suyas, en las que entran los símbolos selectivos: S , V , T , U , K , y las más íntimamente ligadas con ellas y que de modo más inmediato se deducen.

a) Sea en primer lugar, el cuaternión puesto en función de su escalar y su vector:

$$q = S'q + Vq$$

Diferenciando por la fórmula (2) del párrafo anterior se tiene:

$$dq = d(S'q + Vq) = d \cdot S'q + d \cdot Vq$$

pero como dq es un cuaternión cualquiera:

$$dq = S \cdot dq + V \cdot dq$$

luego:

$$d \cdot S'q + d \cdot Vq = S \cdot dq + V \cdot dq;$$

pero como en esta expresión, tanto $d \cdot S'q$ como $S \cdot dq$ son escalares, igualando partes escalares á escalares y vectores á vectores, tendremos:

$$d \cdot S'q = S \cdot dq \quad (1)$$

$$d \cdot Vq = V \cdot dq \quad (2)$$

fórmulas que conviene no olvidar, y que, traducidas al lenguaje

vulgar nos dicen que los símbolos S y V son conmutativos con el d .

b) La otra forma fundamental del cuaternión, es la escrita en función del tensor y del versor, á la cual puede aplicarse la fórmula (3) del producto, lo cual nos da:

$$d q = d (T q \cdot U q) = d T q \cdot U q + T q \cdot d U q \quad (3)$$

expresión que para hacerla útil hace falta asociarla á la que se deduce de la diferenciación de la expresión:

$$(T q)^2 = q \cdot K q,$$

la cual da, teniendo en cuenta que el primer miembro es escalar,

$$2 T q \cdot d T q = d q \cdot K q + q \cdot d K q = d q K q + q \cdot K d q \quad (4);$$

y considerando que

$$K q = \frac{T q}{U q} = T q (U q)^{-1},$$

puede ponerse $d T q$, bajo la forma:

$$d T q = S \frac{d q}{U q} \quad (5)$$

y también:

$$\frac{d T q}{T q} = S \frac{d q}{q} \quad (6).$$

Dividiendo ahora por q , ó sea multiplicando á q^{-1} por el primero y último miembros de la (3), se obtiene inmediatamente:

$$\frac{d q}{q} = \frac{d T q}{q} + \frac{d U q}{U q} \quad (7)$$

y por comparación con la (6) obtenemos en seguida:

$$\frac{d U q}{q} = V \frac{d q}{q} \quad (8),$$

fórmulas todas ellas de mucha aplicación.

En el caso en que el cuaternión q degenera en un vector ρ , las fórmulas se convertirán en

$$\frac{d T \rho}{T \rho} = S \frac{d \rho}{\rho} \quad (9).$$

$$\frac{d U \rho}{U \rho} = V \frac{d \rho}{\rho} \quad (10).$$

Puesto que las fórmulas (8) y (10) nos aseguran que $\frac{d U}{U}$ aplicado como operador, ya sea á un cuaternión, ya sea á un vector, nos da siempre un resultado vectorial, escribiendo que el resultado de tomar su parte escalar es nulo, tendremos un nuevo modo de escribirlas, que puede ser útil en ocasiones. Así:

$$S \frac{d U \rho}{U \rho} = 0 \quad (11).$$

$$S \frac{d U \rho}{U \rho} = 0 \quad (12).$$

(1) Para pasar del penúltimo al último miembro de la (4), téngase presente que el penúltimo es de la forma $p K q + q K p$, y que tal binomio puede transformarse como sigue:

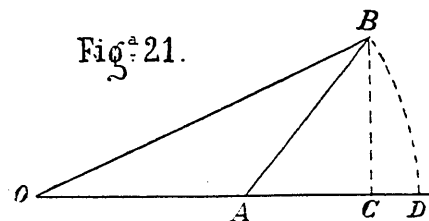
$$p K q + q K p = (S p + V p)(S q - V q) + (S q + V q)(S p - V p) = 2(S p \cdot S q - S \cdot V p V q) = 2 S \cdot p K q = 2 S \cdot q K p.$$

Una cosa análoga puede hacerse con la fórmula (6); de modo que puede escribirse como resumen:

$$V \frac{d T ()}{T ()} = 0 \quad (14).$$

$$S \frac{d U ()}{U ()} = 0 \quad (15).$$

La fórmula (9) es susceptible de una interpretación geométrica que conviene conocer. Sea $O A = \rho$ (fig. 21), y sea $A B$



$= d O A = d \rho$; tratemos de encontrar en la figura la representación de $d T \rho$. Escribamos para ello la serie de igualdades que siguen, partiendo de la (9):

$$S \frac{d \rho}{\rho} = \frac{d T \rho}{T \rho} = \frac{d T \rho}{T d \rho} \cdot \frac{T d \rho}{T \rho} = \frac{d T \rho}{T d \rho} S \frac{d \rho}{\rho} \frac{1}{\cos \theta} \quad (16),$$

en donde θ es el ángulo que forman ρ y $d \rho$, ó sean $\overline{O A}$ y $\overline{O B}$. El escribir, en esta serie de igualdades, $S \frac{d \rho}{\rho} \frac{1}{\cos \theta}$ como equivalente de $\frac{T d \rho}{\rho}$, conviene aclararlo como sigue:

$$S \frac{d \rho}{\rho} = S \frac{A B}{O A} = \frac{\overline{A B}}{\overline{O A}} \cos \theta = \frac{\overline{A C}}{\overline{O A}}.$$

Considerando ahora el primero y último miembro de la (16), y dividiendo por $S \frac{d \rho}{\rho}$ se deduce:

$$1 = \frac{d T \rho}{T d \rho} \frac{1}{\cos \theta}$$

de donde:

$$d T \rho = T d \rho \cos \theta = \overline{A B} \cos \theta = \overline{A C} \quad (17).$$

Trazando en la figura 31 el arco de circunferencia $B D$ el segmento $\overline{A D}$ será $\Delta T \rho$; vemos aquí nuevamente cómo no son la misma cosa las diferencias y las diferenciales. Dividiendo $A B = d \rho$ en n partes, y viendo el límite á que tiende

$$n \left[T \left(C A + \frac{A B}{n} \right) - T O A \right],$$

se puede demostrar geoméricamente la fórmula (17), demostración que puede servir de ejercicio al lector.

c) Puesto que

$$K q = S q - V q \quad \text{y} \quad d S q = S d q, d V q = V d q,$$

deducimos inmediatamente que

$$d K q = K d q \quad (18).$$

171. Como puede ser conveniente conocer algunas fórmulas que se deriven de la diferenciación de operadores algo más complejos de los que se presentan en este cálculo, presentare-

mos como ejemplo las que se deduzcan del operador rotacional $q () q^{-1}$. Escribamos para ello la serie de igualdades que siguen:

$$1 = (Tq)^2 = q \cdot Kq = q q^{-1} = q^{-1} q.$$

Diferenciando deducimos:

$$0 = dq \cdot Kq + q dKq = dq \cdot q^{-1} + q \cdot dq^{-1} = dq^{-1} \cdot q + q^{-1} \cdot dq.$$

No olvidando en todo ello lo expresado por los dos primeros miembros de la serie primera de igualdades. Por lo tanto, en particular

$$S \cdot dq \cdot Kq = 0 \quad (1) \quad dq \cdot q^{-1} = -q \cdot dq^{-1} \quad dq^{-1} \cdot q = q^{-1} dq$$

transformando las dos últimas

$$dq = -q dq^{-1} q \quad (2)$$

$$dq^{-1} = q^{-1} dq q^{-1} \quad (3);$$

y como los segundos miembros de estas igualdades son productos de cuaterniones necesariamente coplanarios, los primeros miembros deben ser vectores puros. Deducimos, por lo tanto, que dq y dq^{-1} son vectores, y además que también lo es $dq \cdot Kq$, puesto que su escalar es nulo.

Si, pues, el operador $q () q^{-1}$ se aplica al cuaternión constante $a + \alpha$, en el cual a es la parte escalar y α la vectorial, tendremos, en virtud del carácter distributivo de este operador con respecto a la suma,

$$q(a + \alpha)q^{-1} = qa q^{-1} + q\alpha q^{-1} = a + q\alpha q^{-1}.$$

Diferenciando ahora la igualdad formada por los primero y último miembros, se tiene:

$$d \cdot q(a + \alpha)q^{-1} = 0 + d \cdot q\alpha q^{-1} = d \cdot q \cdot \alpha q^{-1} + q d\alpha \cdot q^{-1} + q\alpha \cdot dq^{-1}.$$

El segundo término del tercer miembro es nulo por serlo $d\alpha$, diferencial de un vector constante, y el tercero puede transformarse mediante la (3) con lo cual se obtiene, multiplicando además todos los términos, por $q q^{-1} = 1$:

$$dq(a + \alpha)q^{-1} = dq \cdot q^{-1}(q\alpha q^{-1}) - (q\alpha q^{-1})dq \cdot q^{-1} = 2Vdq \cdot q^{-1}(q\alpha q^{-1}) = 2Vq dq q^{-1}(q\alpha q^{-1}) \quad (5).$$

172. Las diferenciaciones sucesivas no ofrecen dificultad ninguna. Sólo hay necesidad, como en el cálculo ordinario, de tener en cuenta desde qué orden de diferenciación deben ser constantes las diferenciales. No se obtienen, evidentemente, las mismas fórmulas si $d^n q$ es constante, y por lo tanto, $d^{n+1} q = 0$, que si fuera variables.

173. En la diferenciación de las funciones de funciones debe tenerse especial cuidado para evitar las dificultades que provienen de la no existencia de derivada en las funciones de cuaterniones; pero sin que sea necesario dar ninguna regla especial para obtener la diferencial de una función de función, cualesquiera que sean los órdenes de la función y de la diferencial. Podemos simbolizar la fórmula de diferenciación como sigue. Sean $\psi \cdot \varphi$ y f características ó programas funcionales diferentes, y sea:

$$s = \psi q = \varphi(fq).$$

Entonces, si representamos por

$$\psi_{\infty}(q \cdot dq),$$

la diferencial de s obtenida mediante la función ψ , la que obtenemos mediante las dos funciones φ y f será:

$$ds = \varphi_{\infty}(fq, f_{\infty}(q \cdot dq)) \quad (1)$$

y ésta será la fórmula más general que pueda obtenerse.

174. Y con lo expuesto tenemos lo suficiente para presentar al lector, indudablemente, el más poderoso operador que nos da este cálculo, el operador ∇ , descubierto por Hamilton, aunque poco trabajado por él, llamado «nebla» por Robertson Smith, por la pretendida semejanza que su figura presenta con el arpa asiríaca, y cuyas propiedades han sido estudiadas y aplicadas por Tait con una habilidad que hizo decir á Maxwell que había sido aquél el mejor tocador del nebla. Este autor emplea profusamente este operador en su gran tratado de electricidad y magnetismo.

Sea ρ un vector, variable independiente. Si este vector está trazado desde un origen O , su extremidad nos marcará, para cada valor de él, un punto del espacio. Sea P un escalar variable, cuyo valor dependa de la posición de la extremidad del vector ρ , función, por lo tanto de ρ , y sea además P función simple de ρ , de manera que se tenga un valor de P , y sólo uno, para cada valor del vector variable independiente ρ . Por ejemplo, si ρ indica la posición de un punto en el espacio, P podrá indicar la temperatura en ese punto, ó su potencial ó la presión hidrostática, etcétera, etc.; en general, cualquier escalar cuyo valor dependa de la posición del punto ó más en general del valor de ρ . Podremos escribir:

$$P = F\rho \quad (1),$$

donde F es el operador característico funcional, y tal que aplicado á un vector nos dé, sin embargo, un escalar P y no otro vector ni menos un cuaternión.

Si atribuimos á P un cierto valor P_0 , la ecuación $F\rho = P_0$ nos representará una superficie, lugar de los puntos para los cuales P tiene este valor particular P_0 . Tendremos otra superficie para otro valor P_1 , etc., etc., y vemos inmediatamente que dos superficies de éstas no pueden cortarse porque si lo hicieran dejaría de ser simple la función F .

Diferenciando la (1), y representando por f lo mismo que en (167), tendremos:

$$dP = f(\rho, d\rho) \quad (2).$$

Ahora bien: dP es escalar, puesto que lo es P ; por otra parte, su equivalente $f(\rho, d\rho)$ es una expresión lineal y homogénea con respecto á $d\rho$; luego $f(\rho, d\rho)$ será la parte escalar de un polinomio formado con términos, en los cuales entrará en todos ellos $d\rho$ al primer grado; serán, pues, de la forma $S\alpha d\rho$, β , en donde α y β simbolizan todo lo que en cada término antecede y precede á $d\rho$. Como esta parte escalar de cada término es igual, ó igual y de signo contrario á la $S\alpha \beta d\rho$, según que sea ó no vector, tendremos que podremos elegir siempre un vector ν tal que $-S\nu d\rho = \Sigma S\alpha d\rho \beta = f(\rho \cdot d\rho)$, y este vector ν será forzosamente independiente de $d\rho$, puesto que $d\rho$ aparece como factor común en ambos miembros de la igualdad, afectando de igual modo á éstos, toda vez que en ellos sólo se considera la parte escalar. Podremos, pues, escribir con toda legitimidad

$$dP = -S\nu d\rho \quad (3).$$

Si consideramos á P como constante, entonces

$$S\nu d\rho = 0 \quad (4)$$

y ν y $d\rho$ serán perpendiculares. Pero al ser P constante, la función (1) representa una superficie, y $d\rho$ tendrá la dirección de una recta cualquiera tangente á dicha superficie; luego ν será normal á la misma. El vector ν será, pues, siempre un vector normal á las superficies que representan la (1) para los diversos valores de P . Si P no es constante, $d\rho$ formará ángulo con la superficie y el incremento de P , dP , escalar por supuesto, tendrá un valor proporcional á la proyección de $d\rho$ sobre la normal ν ; pues esto es lo que nos dice la (3) al asegurarnos que su valor es igual al escalar del producto $\nu d\rho$, el cual es el producto del tensor de uno de los vectores ν por la proyección del otro $d\rho$ sobre él. Si, pues, α indica una dirección oblicua á la superficie

donde termina ρ y indicamos por $d_{\alpha}\rho$ la diferencial tomada paralelamente a α :

$$d_{\alpha}P = -S \nu d_{\alpha}\rho \quad (5)$$

dP será, pues, para diferenciales de ρ del mismo tensor (de tensor unidad, por ejemplo) máximo cuando $d\rho \parallel \nu$, é irá disminuyendo según vaya aumentando la inclinación entre uno y otro hasta hacerse nulo (4) cuando sean perpendiculares.

Para conocer la dirección de ν no es menester tener trazadas las superficies (que sin alardear de perspicaces podemos llamar superficies de *nivel*), para los cuales P es constante, pues conociendo las proyecciones de ν sobre tres diferenciales $d_{\alpha}\rho$, $d_{\beta}\rho$, $d_{\gamma}\rho$ podremos componerlas en una, y conoceremos la diferencial de ν . Para hacerlo analíticamente, podemos valernos de la fórmula (26) del (154, e), la cual aplicada a ν , $d_{\alpha}\rho$, $d_{\beta}\rho$ y $d_{\gamma}\rho$, nos dará

$$\nu = \frac{V d_{\alpha}\rho d_{\beta}\rho \cdot S \nu d_{\gamma}\rho + V d_{\beta}\rho d_{\gamma}\rho \cdot S \nu d_{\alpha}\rho + V d_{\gamma}\rho d_{\alpha}\rho \cdot S \nu d_{\beta}\rho}{S d_{\alpha}\rho d_{\beta}\rho d_{\gamma}\rho},$$

ó sustituyendo en lugar de $S \nu d_{\gamma}\rho$, *menos* la diferencial de P correspondiente, tendremos la expresión siguiente, cuya importancia es capital

$$\nu = - \frac{V d_{\alpha}\rho d_{\beta}\rho d_{\gamma}P + V d_{\beta}\rho d_{\gamma}\rho d_{\alpha}P + V d_{\gamma}\rho d_{\alpha}\rho d_{\beta}P}{S d_{\alpha}\rho d_{\beta}\rho d_{\gamma}\rho} \quad (6)$$

Separando en ella el operador del operado y llamando ∇ (nebla) al primero, tendremos como expresión del mismo:

$$\nabla = - \frac{V d_{\alpha}\rho d_{\beta}\rho \cdot d() + V d_{\beta}\rho d_{\gamma}\rho \cdot d() + V d_{\gamma}\rho d_{\alpha}\rho \cdot d()}{S d_{\alpha}\rho d_{\beta}\rho d_{\gamma}\rho} \quad (7)$$

Este es, pues, el programa de operaciones que debemos de hacer para, de P , deducir ν , ó sea para deducir de la existencia de una función escalar de puntos del espacio, la dirección de su más rápido crecimiento ó decrecimiento.

La importancia que esto tiene para las ciencias físicas (á no ser que éstas se expongan como en ciertos acreditados textos que no quiero nombrar) es fácil de ver. Con una sola operación sobre la función potencial, hallamos la magnitud y dirección de la fuerza.

Si en lugar de los tres vectores α , β y γ paralelamente á los cuales tomamos las tres diferenciales, empleamos la terna trirectangular i , j y k de vectores unidades, la expresión (7) se simplifica notablemente, sobre todo si las tres diferenciales se toman de tensores unidades, pues entonces el denominador es la unidad y el numerador toma la forma

$$\Delta = i d_i() + j d_j() + k d_k() \quad (8).$$

Finalmente, si á las diferenciales se sustituyen las derivadas de la función con respecto á tres coordenadas variables x , y y z , medidas á lo largo de tres ejes X , Y y Z , paralelos á nuestros tres vectores unidades i , j , k , sustitución legítima, puesto que estas derivadas serán proporcionales á las diferenciales, y sólo variará en la expresión (8) la unidad con que se mida el vector resultante, tendremos

$$\nabla = i \frac{d}{dx} + j \frac{d}{dy} + \frac{d}{dz} \quad (9),$$

que es la denominada *forma canónica* de ∇ . Bajo ella fué descubierto por Hamilton este operador, y con ella llevó á cabo los no muy numerosos trabajos que dejó escritos sobre el particular, en forma en que aún se ven los andadores cartesianos, de los que pronto pudo librarse este cálculo.

175. Antes de pasar adelante, podemos hacer ver que el operador ∇ tiene un cuadrado, muy fácil de hallar de su forma canónica. Multiplicando la (9) por sí misma, se tiene

$$\nabla^2 = - \left[\left(\frac{d}{dx} \right)^2 + \left(\frac{d}{dy} \right)^2 + \left(\frac{d}{dz} \right)^2 \right],$$

que es el operador de Laplace con signo cambiado.

176. Para darnos bien cuenta de la naturaleza del operador, veamos:

a) Que el operador es distributivo, de manera que si se tiene una función f escalar descomponible por vía de suma en otras dos, tales como g y h , de modo que, $f\rho = g\rho + h\rho$, ó escribiendo simbólicamente

$$f = g + h,$$

podemos demostrar que:

$$\nabla f = \nabla g + \nabla h;$$

porque efectivamente

$$df = dg + dh \quad (1).$$

b) Con respecto al producto, sigue la misma ley que la diferenciación; de manera que si $f = g h$

$$\nabla f = \nabla g \cdot h + g \nabla h \quad (2),$$

por análoga razón al caso anterior.

c) Que ∇ es la función de inversión de la ecuación $dF\rho = -S \nu d\rho$, que nos permite despejar ν en función de los otros elementos que entran en ella.

La ecuación $dF\rho = -S \nu d\rho$ se nos convierte, mediante ∇ , en su equivalente $\nu = \nabla F\rho$. Ahora, por hipótesis $F\rho$ es escalar, y por hipótesis también ν es un vector; luego el operador ∇ convierte al escalar en vector. Si pudiera aplicarse á un vector (luego veremos que sí, y aun á un cuaternión también), quizás lo convirtiera en escalar. Diremos que el operador ∇ es un operador vectorial, puesto que vectoriza á los escalares.

d) Puede el operador aplicarse á las funciones de varias variables, siempre que la función sea escalar, por lo menos mientras no ahondemos un poco más en su estudio, y esto con mucha sencillez, puesto que según la (1) del párrafo 169, se tiene que la diferencial de la función $F(p, q, r, \dots)$ es

$$dF = d_p F + d_q F + d_r F + \dots;$$

luego

$$\nabla F = \nabla_p F + \nabla_q F + \nabla_r F + \dots \quad (3).$$

e) Como aplicaciones elementales, puede el lector, teniendo en cuenta las fórmulas que se recuerdan á la izquierda, ir deduciendo las que figuran á la derecha.

$$d S^{\lambda} \rho = S^{\lambda} d\rho \quad (4) \quad \nabla_{\rho} S^{\lambda} \rho = -\lambda \nabla_{\lambda} S^{\lambda} \rho = -\rho$$

$$d \rho^2 = 2 S \rho d\rho \quad (5) \quad \nabla \rho^2 = -2 \rho$$

$$d T \rho = -S U \rho d\rho \quad (6) \quad \nabla T \rho = U \rho$$

(Continuará.)