

Hay que añadir á esto, que su desecación responde casi siempre á altas razones de higiene, ante las cuales queda anulada toda consideración contraria. M. Wolfschütz manifiesta que los drenajes que se ejecutan en grande escala para desecar y mejorar los terrenos, tienen sobre este punto una influencia bastante mayor que la desecación de un estanque ó marisma cualquiera, y sin embargo, á nadie le ha ocurrido la idea de oponerse á aquellas operaciones, puesto que el beneficio agrícola que resulta es bastante mayor que el que resultara por la desecación.

Conclusiones.

Apoyándose en las conclusiones á las cuales han llegado los distintos Ingenieros que han informado en las diversas cuestiones relativas al problema general de la influencia de los bosques y lagunas en el régimen y caudal de los ríos, conclusiones que, según el estado actual de nuestros conocimientos sobre la materia, deben servir de base á los trabajos legislativos allí donde ha habido perfecta conformidad, y de punto de partida para ulteriores investigaciones donde han existido dudas y divergencia de pareceres, el X Congreso de Navegación ha emitido como informe general en la cuestión debatida lo siguiente:

1.º En vista de la unanimidad de opiniones respecto á la influencia bienhechora de los bosques en la consolidación de los terrenos inclinados, impidiendo el desprendimiento de materiales y su arrastre al fondo de los valles, en la formación y permanencia de los manantiales, al menos en los terrenos impermeables y pendientes, y en el mejor régimen de los ríos en sus períodos de bajas aguas y aguas ordinarias, el Congreso entiende que cada uno de los Estados que no lo tengan hecho regulen con leyes claras y severas el derecho privado de hacer cortas en los bosques cuyos terrenos sean pendientes, fijando una atención especial si son impermeables, y no olvidando que nada debe fiarse á los trabajos que puedan ser ejecutados de sostenimiento y de consolidación, porque pueden no ser hechos, ó hacerlo mal, ó ser abandonados con el tiempo. Entiende igualmente, que los Estados deben realizar ellos mismos y á sus expensas la repoblación gradual de todas las superficies despobladas, asociando en esta obra el trabajo del selvicultor con el del Ingeniero.

2.º En vista de la divergencia de opiniones sobre la influencia de los bosques en el clima de cada región, en la absorción y circulación de las aguas subterráneas en los terrenos llanos, y en la formación de las crecidas extraordinarias, el Congreso considera necesario, para aclarar estos puntos, que se organice en grande escala, una serie de observaciones sistemáticas, dándoles la mayor publicidad y la mayor difusión posible; y

3.º Vista la muy alta y universal importancia que tales experiencias tienen para la agricultura; vistas las controversias que pueden surgir toda vez que casi todos los grandes ríos de Europa interesan sucesivamente dos y aun tres Estados diferentes, y vista la necesidad de dar á estos estudios esa universalidad y esa conformidad de dirección que tan necesarias son en los trabajos estadísticos, el Congreso emite igualmente su opinión de que los estudios sean, siempre que sea posible, dirigidos y concertados por el Instituto internacional de Agricultura que acaba de ser fundado en Roma.—O.

INSTALACIÓN DE LOS PARARRAYOS

El Comité inglés de investigaciones llamado *Lightning Research Committee*, ha publicado recientemente una instrucción general sobre la instalación de los pararrayos. Según el Comité, debe haber dos barras conductoras, una á cada lado de cada campanario, chimenea, torre, etc., desde la parte más elevada hasta tierra, y siguiendo el camino más directo posible. En todo caso, los diferentes conductores verticales correspondientes á

cada edificio deben ir unidos entre sí por conductores horizontales, uno en el arranque del techo y otro cerca del suelo. El conductor superior horizontal irá provisto de puntas cada 6 ú 8 metros. Á lo largo de toda elevación secundaria de la construcción (torrecillas, etc.), se colocarán barras verticales unidas al conductor horizontal superior. Las partes metálicas de las techumbres, canalones, chimeneas, etc., deberán ir también unidas al conductor horizontal. Las piezas metálicas de masa considerable que entren en la construcción deberán estar en comunicación con tierra, bien directamente, bien por medio del conductor inferior. Allí en donde los techos estén totalmente ó en parte considerable recubiertos de metal, se unirán á tierra por barras verticales colocadas en diferentes puntos. Las tuberías de gas deberán colocarse tan lejos como sea posible de los conductores eléctricos, y, como protección secundaria, deberá cuidarse de que las canalizaciones de servicio que conducen al contador tengan una conexión metálica directa con los tubos análogos que del contador salgan.

INTRODUCCIÓN

AL ESTUDIO DEL CÁLCULO DE CUATERNIONES

Y OTRAS ÁLGEBRAS ESPECIALES

POR

DON FRANCISCO PÉREZ DE MUÑOZ

Ingeniero de Caminos, Canales y Puertos.

(CONTINUACIÓN)

VI

El cálculo diferencial é integral de los cuaterniones.

164. Así como en el álgebra ordinaria, á las operaciones de suma, resta, multiplicación y división, elevación á potencias y extracción de raíces de índices cualesquiera, se hace seguir la sustitución de una variable por su límite en las funciones en que ésta entre, y se constituye con los procedimientos adecuados al caso el algoritmo infinitesimal, así ahora en el cálculo de cuaterniones vamos á exponer los principios correspondientes á los del citado algoritmo, no completamente análogos á aquéllos como no lo han sido tampoco los de todas las operaciones hasta ahora explicadas con los correspondientes á los de las que en aquella ciencia hacían sus veces, sino, por el contrario, bastante diferentes, como son los de la multiplicación de este cálculo comparadas con los de la multiplicación algebraica, motivando precisamente esta diferencia la misma causa que motivaba aquella, á saber, la no conmutabilidad de los factores.

Á diferencia de otros inventores de métodos ó procedimientos matemáticos, que sólo dejan de ellos las ideas fundamentales, y aun á veces por casualidad, Hamilton y Grassman dejaron los suyos acabados y perfectos hasta un grado que raya en lo inverosímil. El primero se vió conducido á establecer los principios del cálculo infinitesimal y notó desde el comienzo de su empresa que no eran aplicables los métodos de Leibnitz, por lo cual, abandonándolos, comenzó el estudio de estos problemas «como Newton los hubiera estudiado si se hubiese visto privado de la propiedad de la conmutabilidad de los factores de un producto», según asegura en sus *Elements of quaternions*. Y la verdad es que, paisano de Newton y menos separado de él por el tiempo, es más probable que acertara con las ideas que se hubieran desarrollado en la mente de éste, que no Halley y Chasles con las que bulle- ran en las de Apolonio y Euclides mientras escribían sus seccio-

nes cónicas y sus porismos. Y sin embargo, nos aseguran los doctos que éstos han sido *adivinados* por aquéllos.

Con motivo del ejemplo puesto para desenvolver el método, puramente vectorial, de trazar las tangentes á una parábola (121, a), expusimos, algo de paso (122), el fundamento del método infinitesimal tal cual es aplicable al cálculo de cuaterniones, pero con lo allí expuesto es seguro que el lector, nuevo en estas cosas, se verá apurado si quiere aplicación de ellos. Para dejar bien sentados los fundamentos, comenzaremos exponiendo los dos mismos ejemplos que de mano maestra, como elegidos por la suya, presenta Hamilton en sus elementos.

165. El concepto de *función* es análogo cuando se trata de cantidades á cuando se trata de entidades matemáticas, solamente que si se quiere desmenuzar más el problema, se puede considerar la entidad matemática como función de tantas variables cuantas sean las unidades irreducibles que entran en su composición. De cualquier manera, á la entidad matemática que se considere como variable independiente, se le puede dar un *estado*, dando valor á los coeficientes de las unidades que la definen, y otro estado diferente, dando valores diferentes también á dichos coeficientes. La distinción de uno del otro, constituirá un nuevo estado de la entidad matemática, al cual se denomina *diferencia* de la variable independiente. Si á cada estado de ella ha correspondido un estado y sólo uno, de la función tendremos para la entidad función, una *diferencia* de la función, *correspondiente ó simultánea* á la diferencia de la variable. Denominaremos *diferenciales ó fluxiones simultáneas ó correspondientes* á los límites de equimúltiplos de diferencias correspondientes y decrecientes sin límites, siendo claro que en general, el número n por el cual se multiplican *ambas* diferencias simultáneas y decrecientes sin límites, deberá crecer sin ellos para que los equimúltiplos de ellas tiendan á alguno fijo y determinado. La relación de equimúltiplos de las diferencias, es constantemente igual á la de las mismas en cualquier estado en que estén, y la relación de los límites de estos equimúltiplos cuando las diferencias se anulen será, si la función es continua, la misma que cuando estén naciendo, será por lo tanto aquella *prima nascentium proportio* medida de la velocidad de crecimiento de la función hecha con el crecimiento de la variable.

Si q , r y s son variables, independientes ó no entre sí, y se designan con estas letras estados simultáneos de ellas, otros nuevos estados serán los designados por:

$$q + \Delta q; \quad r + \Delta r; \quad s + \Delta s$$

donde: Δq , Δr y Δs son diferencias simultáneas ó correspondientes. Los equimúltiplos $n \Delta q$, $n \Delta r$ y $n \Delta s$ pueden tender haciendo crecer n y decrecer Δq , Δr , Δs á un sistema de estados límites, perfectamente determinado, y cuando suceda tal cosa llamaremos á estos límites las diferenciales de q ; r y s que designaremos, siguiendo la notación general, por $d q$, $d r$, $d s$.

a) Sea la función del álgebra:

$$y = x^2$$

en la cual consideraremos x como la variable independiente y y como la función.

Incrementando á x en la diferencia Δx tendremos:

$$y + \Delta y = (x + \Delta x)^2$$

y por lo tanto, como es sabido:

$$\Delta y = 2x \Delta x + (\Delta x)^2$$

Multiplicando por n á ambos miembros tendremos la igualdad, idéntica á la anterior:

$$n \Delta y = 2x \cdot n \Delta x + \frac{1}{n} (n \Delta x)^2 \quad (1)$$

en la cual si se hace que Δx decrezca sin límites, y al mismo tiempo, crezca también sin ellos n , de manera que el producto $n \Delta x$ tienda hacia un límite arbitrario y finito a ó $d x$, y si al mismo tiempo *suponemos* que tiende hacia cero Δy , tendiendo sin embargo, hacia un límite b ó $d y$ el equimúltiplo de $n \Delta x$; $n \Delta y$ la igualdad última nos da inmediatamente:

$$\begin{aligned} \lim n \Delta y = b &= 2x \cdot \lim (n \Delta x) + \lim \frac{1}{n} \cdot \lim (n \Delta x)^2 \\ &= 2x a + \lim \frac{1}{n} \cdot a \end{aligned}$$

ó sea:

$$d y = 2x \cdot d x \quad (2)$$

puesto que el último término del segundo miembro se anula. Luego las dos fluxiones correspondientes $d y$ y $d x$ guardan entre sí la relación:

$$\frac{d y}{d x} = 2x \quad (3)$$

Añade Hamilton, que no hubieramos *mejorado* sino por el contrario hubieramos *viciado* la ecuación (3) si en ella hubieramos conservado, para mayor exactitud, el último término de la (1) ó escrito el término $(\Delta x)^2$ por analogía con la expresión pues este término es rigurosamente nulo cuando el valor de n sea mayor que todo límite.

Particularizando el ejemplo, sean, siguiendo siempre á Hamilton:

$$x = 2; \quad y = x^2 = 4 \quad d x = 1000$$

Por lo tanto:

$$n \Delta x = 1000 \quad y \quad n \Delta y = 4000 + \frac{1}{n} (1000)^2$$

y creciendo n sin límites:

$$d y = 4000$$

y el cociente de las fluxiones correspondientes, ó sea la derivada en la notación de Leibnitz, será

$$\frac{d y}{d x} = \frac{4000}{1000} = 4.$$

Este límite del cociente de las fluxiones es, como se ve en este ejemplo, independiente de la diferencia Δx y también de la diferencial $d x = 1000$ y al mismo cociente 4 se hubiera llegado tomando $d x = 500$ por ejemplo. Así se sabe que sucede en las funciones que estudia el álgebra.

Si ahora consideramos diferencias que sean una millonésima parte de las diferenciales, que supondremos las mismas de antes:

$$\Delta x = 1000000' \cdot 1000 = 0,001$$

$$\Delta y = 0,004001$$

y el cociente $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ no es igual á 4 pero se aproxima tan más á este número cuanto menor sean Δx y Δy y el límite de la relación será precisamente 4. Este ejemplo, que no por ser sencillo, deja de decir de quién es, hace ver con mucha claridad la relación que existe entre el método de Newton de las fluxiones y el de Leibnitz de las derivadas.

b) El ejemplo geométrico es tanto ó más instructivo que el anterior. Sea (fig. 20) el rectángulo $A B C D$ cuya área miraremos como función de los lados $A B$ y $A C$, y por lo tanto, si á éstos los convertimos en $A E$ y $A G$, el área se habrá convertido en la del rectángulo $A H$ habiendo sufrido el incremento finito $C B E F G D C$ á causa de los incrementos del mismo gé-

nero $B'E$ y $D'G$ dados á los lados. El incremento del rectángulo AC se compone, pues, de tres partes, á saber: el rectángulo CE , el CG y el CF constituyendo la figura denominada gnomon en el segundo libro de Euclides. Tracemos ahora la diagonal CF y señalemos en ella un punto P que consideraremos como móvil y que se acerca indefinidamente al punto C , y proyectémoslo paralelamente á los lados del rectángulo sobre sus

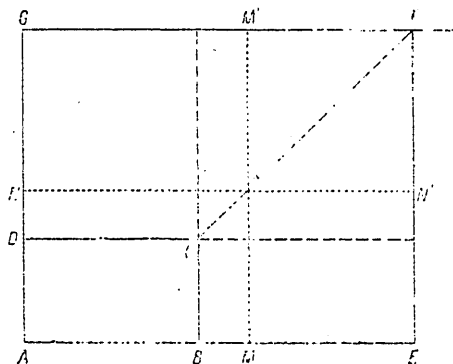


Figura 20.

propias prolongaciones $B'E$ y $D'G$, en las cuales señalará segmentos BM y DN equidivisores de los $B'E$ y $D'N$, siendo la relación entre ellos la misma que entre los dos segmentos de la diagonal CP y CF . Si consideramos ahora los dos incrementos DN y BM y queremos formar con ellos equimúltiplos á fin de obtener límites de ellos para tener las diferenciales, tendremos que el incremento del rectángulo será el nuevo gnomon $CBMPND$, suma de tres rectángulos NC , CM y CP . Formando con los incrementos ó diferencias de los lados, los equimúltiplos $B'E$ y $D'G$, que miraremos como diferenciales simultáneas ó correspondientes de los lados, para formar la diferencial del área, habremos de tomar equimúltiplos de los tres sumandos del gnomon, según la definición dada al principio, y sumarlos. El equimúltiplo del rectángulo CM es el CE ; el de el CN es el CG y el de el rectángulo CP será el CF ó bien el CM , pero no el CF como podría aparecer á primera vista; de manera que vemos que la diferencial difiere de la diferencia en algo más que el rectángulo PF y que los tres sumandos de que se compone la diferencial no recubren, por superposición, á la diferencia correspondiente á las diferenciales cuando éstas no han sido consideradas como tales, sino solamente como diferencias. Es natural que así suceda y para que fuera de otra manera sería preciso que el rectángulo CP guardase con cualquiera de los dos CM ó CN una relación finita cuando sus lados decreciesen indefinidamente siendo así que esta es por el contrario infinitésima á causa de ser la del producto de los dos lados de CP al de los dos de CM , por ejemplo, ó sea la de DN á BC , la cual es en el límite rigurosamente cero á causa de ser este el límite del numerador DN y ser constante el denominador BC . Si, por lo tanto, quisiéramos mejorar nuestra operación introduciendo el rectángulo CP y haciéndolo crecer hasta que recubriese al CF , la viciáramos introduciéndolo en vez de un término que tiene un límite cero cuando los otros sumandos lo tienen finito.

Habiéndonos dado cuenta exacta, mediante el estudio de los dos ejemplos acabados de ver, de la naturaleza del método que hemos de seguir, podemos empezar su exposición.

166. Si $r = F(q)$ es una función explícita del cuaternión q , pudiendo ser r bien un cuaternión ó bien un vector ó un escalar, siendo, en el primer caso, función cuaterniónica de un cuaternión, función vectorial en el segundo y función escalar en el tercero, en cualquiera de ellos el signo F nos representa el programa de operaciones que hay que efectuar en el cuaternión q , que también podrá degenerar en vector ó en escalar, para obtener r . Podemos, por lo tanto, siguiendo nuestros principios,

representar r por Fq , suprimiendo el paréntesis y expresando la operación por el símbolo de una verdadera multiplicación.

La diferencial de esta función r , dr , estará definida por:

$$\begin{aligned} dr = dFq &= \lim_{n \rightarrow \infty} n \left[F\left(q + \frac{dq}{n}\right) - Fq \right] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} n \Delta Fq \end{aligned} \quad (1)$$

según los principios expuestos en el párrafo anterior y como una generalización del método seguido en el (122), y en donde dq puede ser un cuaternión cualquiera, dando valores completamente independientes á los cuatro números que lo definen, y formando, con respecto á q , un conjunto ó comunidad cuádruplemente infinita. El límite de la expresión

$$n \left[F\left(q + \frac{dq}{n}\right) - Fq \right]$$

será, en general, una función de q y de dq , que podemos representar por $f(q, dq)$, pero que, también en general, no podrá ponerse bajo la forma $f(q) dq$ á que estamos acostumbrados en el cálculo de infinitésimos, cuando éstos son escalares.

Si la función es de varios cuaterniones variables independientes, tal como

$$p = F(q, r, s, \dots)$$

su diferencial estará definida por la ecuación

$$\begin{aligned} dp = dF &= \lim n \left[F\left(q + \frac{dq}{n}, r + \frac{dr}{n}, s + \frac{ds}{n}, \dots\right) \right. \\ &\quad \left. - F(q, r, s, \dots) \right] \end{aligned} \quad (2)$$

en la cual, $dq, dr, ds, \dots$ son cuaterniones cualesquiera, cada uno de los cuales forma alrededor de su principal, una comunidad cuádruplemente infinita. Como en el caso anterior, la expresión de la diferencial, podrá ponerse bajo la forma:

$$dF = f(q, r, s, \dots, dq, dr, ds, \dots) \quad (3)$$

pero no en general, bajo la conocida

$$dF = \frac{dF}{dq} dq + \frac{dF}{dr} dr + \dots$$

Como veremos en los ejemplos que seguirán, cada uno de estos coeficientes de las diferenciales parciales es función de las propias diferenciales dq, dr, ds , y lo mismo sucede en las funciones de una sola variable.

167. La función f , que nos define la diferencial de una función, goza de propiedades muy notables, cuyo fundamento es la siguiente:

$$f(q, r + s) = f(q, r) + f(q, s) \quad (4)$$

esto es, que la función es distributiva con respecto á la diferencial de la variable independiente, simbolizada por el cuaternión suma de otros dos: $r + s$, pero no lo será, en general, con respecto á dicha variable independiente.

Para demostrarlo, sea la función de una variable q de la (4), á cuya variable damos el incremento $dq = r + s$. En el caso de ser más de una las variables independientes, la demostración sería la misma. Según la ecuación (1) se tiene:

$$dF = f(q, r + s) = \lim_{n \rightarrow \infty} n \left[F\left(q, \frac{r + s}{n}\right) - Fq \right]$$

y sumando y restando dentro del paréntesis al cual afecta el

símbolo $\lim$, una misma función $F\left(q, \frac{r}{n}\right)$, podremos escribir la serie de igualdades siguientes:

$$\begin{aligned} f(q, r+s) &= \lim_{\infty} n \left[F\left(q, \frac{r}{n} + \frac{s}{n}\right) - F\left(q, \frac{s}{n}\right) \right. \\ &+ \left. F\left(q, \frac{s}{n}\right) - F(q) \right] = \lim_{\infty} n \left[F\left(q, \frac{r}{n} + \frac{s}{n}\right) \right. \\ &- \left. F\left(q, \frac{s}{n}\right) \right] + \lim_{\infty} n \left[F\left(q, \frac{s}{n}\right) - F(q) \right] \\ &= f(q, r) + f(q, s) \end{aligned}$$

Q. E. D.

Es evidente, que si x es un escalar cualquiera, se puede aplicar la proposición anterior á la función

$$f(q, xr) = f(q, r + r + r \dots),$$

con lo que obtendremos:

$$f(q, xr) = x f(q, r) \quad (5)$$

esta propiedad es la que constituye la esencia de la función homogénea, y como el factor por el cual se multiplica la variable, sale factor común de la función elevada tan sólo á la primera potencia, deducimos que la función f que nos define la diferencial de una función de cuaterniones variables, es homogénea y de primer grado con respecto á las diferenciales de las variables independientes. Es, pues, dicho de otro modo, una función *lineal y homogénea* con respecto á las dichas diferenciales de las variables independientes.

168. Siguiendo el orden que generalmente se lleva en la exposición de los principios del cálculo diferencial, daremos inmediatamente después de la definición el número de ejemplos estrictamente necesarios para hacernos de un caudal de reglas prácticas suficiente para resolver más adelante cuantos casos se nos presenten, acudiendo en el menor número posible de ellos á la aplicación de la regla general, ó sea de la definición dada por la fórmula (1) del número anterior ó por la (2) si la función es de más de una variable independiente. Para ello diferenciemos funciones que hagan en este cálculo el papel que en el diferencial ordinario hacen las llamadas en él funciones simples.

a) Sea en primer lugar la función:

$$p = a + q$$

donde a se supone ser un cuaternión constante y q una variable. Inmediatamente vemos que

$$\begin{aligned} dp &= \lim n \left[\left(a + q + \frac{dq}{n} \right) - (a + q) \right] \\ &= \lim n \frac{dq}{n} = dq \end{aligned} \quad (1)$$

fórmula completamente análoga á la equivalente en el cálculo de escalares.

b) Representando p , a y q lo mismo que en el caso anterior, diferenciemos la función

$$p = aq.$$

Siguiendo la regla dada por la definición, se tiene inmediatamente

$$dp = \lim n \left[a \left(q + \frac{dq}{n} \right) - aq \right] = a \cdot dq, \quad (2)$$

sin que puedan permutarse los dos factores del último miembro, á no ser que a haya degenerado en un escalar.

c) Sea ahora la función potencial:

$$p = q^a$$

donde a supondremos que es un escalar constante y entero. Por la regla general tendremos inmediatamente:

$$\begin{aligned} dp &= \lim n \left[\left(q + \frac{dq}{n} \right)^a - q^a \right] \\ &= \lim n \left[q^a + \frac{1}{n} \left(q^{a-1} dq + q^{a-2} dq \cdot q + q^{a-3} dq \cdot q^2 + \dots \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{n^2} (\dots) + \dots q^a \right] \end{aligned}$$

y haciendo crecer n indefinidamente, todos los paréntesis en que salen factores comunes, las diferentes potencias negativas de n se reducirán á cero, á excepción del primero, luego:

$$\begin{aligned} dp &= q^{a-1} dq + q^{a-2} dq \cdot q + q^{a-3} dq \cdot q^2 + \dots \\ &= \sum q^{a-m} dq q^{m-1} \end{aligned} \quad (3)$$

expresión que podrá simplificarse en el caso en que el cuaternión q degenera en un vector; pero en este caso la función p toma una forma tan sencilla, que es mejor valerse de ella y diferenciar directamente.

En este ejemplo se ve la imposibilidad material de poner la expresión de la diferencial de la función p bajo la forma $dp = f(q) dq$, sino que, por el contrario, queda bajo la $dp = f(q, dq)$ como habíamos anunciado. En cambio, en las dos funciones que han dado origen á las expresiones (1) y (2) nuestro cálculo ha dado lugar á fórmulas completamente análogas á las del cálculo ordinario.

169. Debíamos seguir el estudio de las funciones de una variable independiente, diferenciando seguidamente la función exponencial y las trigonométricas, tanto circulares como hiperbólicas, pero estas funciones sólo se usan en las altas aplicaciones de este cálculo, y su diferenciación á más de llevarnos muy lejos nos enseñaría pocas consecuencias de verdadera utilidad práctica, á no ser que nos llevaran al descubrimiento de algún teorema recóndito y desconocido.

Pasando, pues, al estudio de las funciones de varias variables, hallemos una expresión de la diferencia descompuesta en suma de otras diferenciales parciales; una cosa análoga, pero no idéntica, á la expresión $dF = \frac{dF}{dx} dx + \frac{dF}{dy} dy + \dots$

Si: $F(q, r, s \dots)$ es la función dada, la aplicación de la fórmula de la definición da:

$$\begin{aligned} dF &= \lim n \left[F\left(q + \frac{dq}{n}, r + \frac{dr}{n}, s + \frac{ds}{n} \dots\right) \right. \\ &- \left. F(q, r, s \dots) \right] = \lim n \left[F\left(q + \frac{dq}{n}, r + \frac{dr}{n}, s + \frac{ds}{n} \dots\right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{ds}{n} \dots \right] - F\left(q, r + \frac{dr}{n}, s + \frac{ds}{n} \dots\right) \\ &+ \lim n \left[F\left(q, r + \frac{dr}{n}, s + \frac{ds}{n} \dots\right) - F\left(q, r, s + \frac{ds}{n} \dots\right) \right] + \dots = d_q F + d_r F + d_s F + \dots \end{aligned} \quad (1)$$

expresión en la cual cada subíndice, aplicado á la característica d , indica que solamente la variable por él indicada ha sufrido variación en la función quedando constantes todas las demás.

a) Sea, como la más sencilla de todas las funciones de varias variables: $F(q, r, s \dots) = q + r + s + \dots$. La inmediata aplicación de la fórmula (1) nos da

$$d(q + r + s + \dots) = dq + dr + ds + \dots \quad (2)$$

b) Analogamente la aplicación de la misma fórmula $q r$ nos conduce á

$$d(qr) = dq \cdot r + q \cdot dr \quad (3)$$

sin que en ella podamos permutar los factores que componen cada uno de los sumandos del segundo miembro.

En general:

$$d(q, r, s \dots) = dq \cdot r s \dots + q \cdot dr \cdot s \dots + q r \cdot ds + \dots \quad (4)$$

de manera que para diferenciar el producto de varios factores todos ellos cuaterniones, se puede seguir la misma regla que se da en el cálculo ordinario sobre escalares, con la única precaución de que cada diferencial de un factor, ha de conservar en el producto el mismo lugar que en él tenía el factor correspondiente.

c) Como producto notable podemos estudiar el, constantemente igual á la unidad, que sigue: $1 = q q^{-1}$. Diferenciándolo se obtiene:

$$0 = dq \cdot q^{-1} + q \cdot dq^{-1}$$

ó sea:

$$dq \cdot q^{-1} = -q \cdot dq^{-1}$$

y multiplicando á ambos miembros de la anterior igualdad por el multiplicador q^{-1} tendremos:

$$q^{-1} dq \cdot q^{-1} = -q^{-1} q \cdot dq^{-1} = -dq^{-1}$$

Sin multiplicar los ejemplos más, á fin de no entretener demasiado al lector, que puede buscar otros para adiestrarse en el manejo del método, pasaremos á estudiar una clase particular de funciones de suma importancia en este cálculo.

(Se continuará.)

EXPERIMENTOS DE TRACCIÓN ELÉCTRICA CON CORRIENTE ALTERNA A 15.000 VOLTIOS

Según el *Elektrotechnik und Maschinenbau*, la fábrica Oerlikon ejecuta desde Enero de 1935, con anuencia de la Dirección de los Caminos de hierro federales helvéticos, ensayos de tracción, en los cuales emplea corriente alterna monofásica á alta tensión. La corriente de régimen es producida por un grupo convertidor, formado por un motor sincrónico de corriente trifásica, que se encuentra unido á la red de distribución de la fábrica (230 voltios, 50 periodos), y que está acoplado á dos generatrices, cada una da 400 kilovatios. Una de estas generatrices produce corriente alterna á 750 voltios y 50 periodos, y la otra corriente, igualmente alterna, á 750 voltios y 15 periodos. Las dos generatrices se unen á transformadores que elevan la tensión á 15.000 voltios.

El servicio está asegurado por dos locomotoras: la primera, transforma en corriente continua la corriente alterna á 50 periodos, por medio de convertidores giratorios formados de un motor de inducción y de una generatriz de corriente continua. La corriente continua obtenida, alimenta los dos motores de la locomotora, cada una de una potencia de 220 caballos. El peso

de la locomotora es de 55 toneladas y lleva cuatro ejes motores, desarrollando una potencia de 400 caballos y marchando con una velocidad de 36 á 40 kilómetros por hora y 55 kilómetros como máximo (sin carga.) La segunda locomotora es de corriente alterna.

Lleva dos motores conmutadores monofásicos en serie de una potencia de 200 caballos cada uno y cuatro ejes motores. La corriente alterna á alta tensión y á 15 periodos, reduce su tensión de 15.000 á 750 voltios por medio de dos transformadores fijos. El peso de la locomotora es de 42 toneladas y desarrolla la misma velocidad y la misma potencia que la primera locomotora.

Para la canalización con trole de 3 mm. de diámetro, se han adoptado á título de ensayo tres modos de suspensión:

- 1.º Una suspensión rígida para las pequeñas velocidades.
- 2.º Una suspensión elástica por medio de correderas con resortes fijados á los aisladores.

- 3.º Una suspensión elástica por medio de dos hilos fiadores en acero, que se disponen de manera que formen un triángulo.

Los postes están enlazados metálicamente y la toma de corriente se obtiene por el trole llamado de percha y con eje de rotación móvil.

Los viajes de ensayo han sido efectuados con trenes cargados con 150 á 250 toneladas en la sección Seebach-Affoltern que mide 3 km. En ciento veinticinco días se han efectuado 1.746 trayectos y recorrido 5.206 km. lo que da 631.209 toneladas kilométricas brutas. Durante los ensayos se han producido en nueve casos pequeñas perturbaciones, de las cuales, ocho son imputables á la instalación, y una por una avería producida en un aislador.— O.

LA TRACCIÓN ELÉCTRICA EN EL SIMPLÓN

Los electrotécnicos suizos han estudiado con singular empeño el problema de aplicación de la energía eléctrica en la tracción del ferrocarril del túnel del Simplón, desde que se consideró que esta gran obra estaba en vías de ejecutarse. Este pensamiento, germen de meritorios trabajos y estudios de bastantes años, tropezaba con las juiciosas reservas de los Servicios de ferrocarriles, que, sin desconocer las ventajas de la tracción eléctrica en los túneles de gran longitud, no las creían tan decisivas que autorizasen á ensayar este nuevo sistema en una línea internacional de la importancia de la del Simplón.

Tan natural resistencia ha ido cediendo poco á poco por diversas causas, entre las que merecen citarse las dificultades imprevistas surgidas en la ventilación del subterráneo con la tracción de vapor y los ensayos en gran escala últimamente realizados, que tienden á demostrar que la electricidad puede emplearse sin temor alguno como motor, aun en vías férreas de primera importancia, y como á la vez la casa suiza Mrs. Brown, Boveri y C.^{ta}, de Baden, se ofreció á tener dispuesto todo el material eléctrico para la fecha de la apertura del túnel y á poner dicho equipo á disposición de los ferrocarriles federales, con el fin de hacer una seria comparación entre los sistemas de tracción térmica y eléctrica, en un caso tan apropiado para hacer resaltar las ventajas de la última, se comprende que dicha oferta fuese aceptada y planteado el problema de electrificación del ferrocarril del túnel.

Sin embargo, el poco tiempo que quedaba al adoptarse aquella resolución á fines del año pasado, para la inauguración de la línea, fijada para principios de este verano, ha motivado que la proposición no haya podido estudiarse detenidamente y modificar ciertas disposiciones técnicas proyectadas que en condiciones de mayor libertad se hubiesen seguramente conservado.

No habiendo tiempo material para construir locomotoras enteramente nuevas, ha sido preciso aprovechar el material disponible, aceptando dos locomotoras trifásicas, de 900 á 1.000 ca-