

á la del que evoluciona en el cilindro. Con una envolvente alimentada como de ordinario, la cantidad de agua líquida que se precipita sobre las paredes metálicas es ciertamente menor que cuando no existe tal envolvente, pero no por eso deja de haberla; con una envolvente más caliente existe un recalentamiento en el cilindro desde el principio de la emisión, lo que prueba que las paredes están absolutamente secas. Este es un asunto muy importante, pues sabido es la economía que resulta de tal hecho, y en la medida en que aumenta el rendimiento.

M. Duchesne añade al generador de vapor un hervidero, destinado únicamente á mantener á la temperatura que se quiere el vapor encerrado en la envolvente: esta invención mejora notablemente el funcionamiento de la máquina de vapor.

M. Sinagaglia, procesor de la Escuela Politécnica de Nápoles, trata en su nota de los medios de mejorar el rendimiento térmico de las máquinas. Los medios son, como ya se sabe: el empleo de camisas de vapor, el aumento de velocidad del émbolo, el fraccionamiento de la expansión y el recalentamiento del vapor; esta última práctica constituye el asunto principal de su informe. Según él, el uso del vapor recalentado es el medio más potente de mejorar el rendimiento térmico de todos los que tanto la teoría como la práctica indica. Se debe, dice, llevar tan lejos como sea posible dicho recalentamiento, sin otro límite que el grado que le asigne la experiencia en cada caso particular.

M. Compere, Director de la Asociación parisién de Propietarios de aparatos de vapor, ha tratado también de una manera muy personal y con numerosos datos experimentales esta cuestión del uso del vapor recalentado, datos y observaciones muy interesantes dada la autoridad indiscutible de su autor. He aquí algunos.

Un ligero recalentamiento á 210 grados no parece reducir el consumo cuando la máquina funciona con envolvente, y este útil accesorio del cilindro parece el indicado; pero más allá de 210 grados se puede prescindir de él.

Los recalentadores independientes no convienen más que á instalaciones de alguna importancia.

Los recalentadores colocados dentro de las calderas deben ser bien estudiados; se debe poder limitar el grado de recalentamiento según las necesidades, y poder poner fuera de servicio los aparatos.

La instalación de los conductos de vapor, tiene en el asunto un papel importante: deben ser cortos, bien aislados y bien contruidos, y su diámetro puede ser más débil que para el vapor saturado; M. Compere admite velocidades de 30 y 40 metros.

Otras muchas cuestiones han sido tratadas en este Congreso, de menor interés que las citadas y cuya exposición nos llevaría demasiado lejos. Nuestro propósito ha sido únicamente citar las más salientes, cuya relación da á conocer, por otra parte, la fisonomía general del Congreso de mecánica aplicada, el cual ha sido, según Aime Witz expresa en el estudio detallado que ha hecho del mismo, y del cual es un extracto lo que llevamos publicado, un Congreso muy moderno y muy de actualidad en sus tendencias; ha atribuido á las cuestiones del día la importancia y el lugar que merecen, relegando á segundo término las que han perdido ya su interés, y ha hecho uso para aclarar ciertos problemas antiguos que aún permanecían oscuros, de los métodos modernos, pidiendo á la teoría lo que ésta puede y debe dar para llegar á resultados verdaderamente prácticos, desechando el empleo de vanas fórmulas.—O.

locomoción, suscita en la práctica el difícil problema de hacer compatible su tránsito por los caminos con el de los vehículos ordinarios, y las exageradas velocidades con que se lanzan sus conductores, aun sin llegar al límite peligroso para los que los utilizan, exceden bien pronto del necesario para garantizar la seguridad del tránsito común. Debido á ello, en todos los países se fijan por los reglamentos restricciones en la velocidad de su marcha que se soportan pesadamente por los aficionados á tales excursiones, y con el fin de eximirse de estas trabas se pensó ya ha tiempo en Inglaterra en construir calzadas especiales por las cuales circulen exclusivamente los automóviles; este pensamiento parece va á verse realizado en breve plazo en Londres.

Según la *Rivista Tecnico-Legale*, en una de las próximas sesiones del Parlamento Británico se presentará la demanda de autorización para construir y explotar, con arreglo al proyecto aprobado, una carretera para el servicio exclusivo de automóviles, que pondrá en comunicación directa las ciudades de Londres y Brighton, desarrollando su trazado á lo largo de la costa meridional de Inglaterra.

La nueva vía, proyectada por el Ingeniero Sir Douglas Fox tendrá su punto de partida en el distrito de Horbury y estará empalmada directamente con la carretera general que actualmente existe. Desde el citado punto la vía automovilista se dirigirá en dirección casi rectilínea y siguiendo en la mayor parte de esta sección, de 40 millas de longitud, el trazado de la vía férrea, hasta llegar á Patcham, en donde se unirá de nuevo con la carretera general.

La nueva calzada será completamente independiente de los demás caminos públicos, y en los cruzamientos con ellos se establecerán empalmes, por medio de los cuales los automóviles que marchen por las vías ordinarias puedan con toda comodidad introducirse en su vía especial.

No se ha determinado aún con carácter definitivo el ancho que ha de darse á la vía en proyecto. Se ha propuesto por algunos que se construyese en dos secciones independientes paralelas, una para cada sentido del movimiento; pero sin duda para disminuir el gasto de las obras se cree probable que se lleve á cabo una calzada única, dividida en toda su longitud por una barrera central.

Las pendientes mayores del perfil de la nueva vía serán del 3 por 100 y los radios mínimos de las curvas de 280 metros.

La solución radical adoptada permitirá á los automovilistas sustraerse á la fiscalización de las autoridades y á las limitaciones reglamentarias de la velocidad.—L.

INTRODUCCIÓN

AL ESTUDIO DEL CÁLCULO DE CUATERNIONES

Y OTRAS ÁLGEBRAS ESPECIALES

POR

DON FRANCISCO PÉREZ DE MUÑOZ

Ingeniero de Caminos, Canales y Puertos.

(CONTINUACIÓN)

CARRETERAS ESPECIALES PARA LOS AUTOMÓVILES

El desarrollo creciente de la industria de los automóviles, efecto y causa á la vez de la afición progresiva á esta clase de

154. Presentaremos, al llegar á este punto, algunos ejercicios y problemas en los cuales pueda el lector adquirir expedición en el manejo de este cálculo, al mismo tiempo que ver cuán admirablemente se adapta á toda clase de problemas, tanto de geo-

metría como de dinámica, de física, etc., etc., y la enorme potencia de raciocinio que en sí encierra, fuera de comparación con la de los métodos cartesianos.

a) Recordemos ante todo que:

$$q = Sq + Vq = Tq \cdot Uq \quad (1) \text{ Núm. (135)}$$

$$Kq = Sq - Vq = Tq \cdot UKq \quad (2) \text{ Núm. (138)}$$

$$q \cdot Kq = (Tq)^2 \quad (3) \quad "$$

$$q^{-1} = \frac{1}{Tq} Uq^{-1} = \frac{1}{Tq} U \cdot Kq \quad (4) \quad "$$

$$K(q + q') = Kq + Kq' \quad (5) \quad "$$

$$y \quad K \cdot qq' = Kq \cdot Kq' \quad (6) \text{ Núm. (147)}$$

Además, sustituyendo los tensores á las intensidades en las fórmulas en las que habíamos empleado esta notación por carecer aún de la noción del tensor, tenemos que:

$$\frac{\beta}{\alpha} = q = \frac{T\beta}{T\alpha} \cos \theta + \frac{T\beta}{T\alpha} \sin \theta \cdot \varepsilon \quad (7) \text{ Núm. (134)}$$

$$\beta\alpha = -T\beta \cdot T\alpha \cos \theta + T\beta \cdot T\alpha \sin \theta \cdot \varepsilon \quad (8) \text{ Núm. (130, d)}$$

$$2Sq = q + Kq \quad 2Vq = q - Kq \quad (9) \text{ y } (10) \text{ Núm. (149)}$$

Si α es un vector cualquiera, Vq por ejemplo: $\alpha^2 = - (T\alpha)^2$ puesto que el cuadrado de un cuaternión cuadrante produce una inversión en el sentido del vector; luego:

$$(Vq)^2 = (T \cdot Vq)^2 \quad (11)$$

b) De estas fórmulas y de los principios establecidos, deducirá fácilmente el lector, con sólo tenerlos en la memoria:

$$q \cdot Kq = (Sq)^2 - (Vq)^2 = (Sq)^2 + (TVq)^2 \quad (12)$$

$$q^2 = (Sq)^2 + 2Sq \cdot Vq + (Vq)^2 \quad \left\{ \begin{array}{l} Sq^2 = (Sq)^2 + (Vq)^2 \\ Vq^2 = 2Sq \cdot Vq \end{array} \right. \quad (13)$$

$$\begin{aligned} (\alpha\beta)^2 &= \alpha\beta \cdot \alpha\beta = [(S\alpha\beta)^2 + (V\alpha\beta)^2] + 2S\alpha\beta \cdot V\alpha\beta \\ &= [(S\alpha\beta)^2 - (TV\alpha\beta)^2] + 2S\alpha\beta \cdot V\alpha\beta \\ &= [S\alpha\beta]^2 - (V\beta\alpha)^2 - 2S\alpha\beta \cdot V\beta\alpha \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \alpha\beta \cdot \beta\alpha &= \alpha \cdot \beta\beta \cdot \alpha = \alpha\beta^2\alpha = - (T\beta)^2\alpha^2 = (T\alpha)^2 (T\beta^2) \\ &= (S\alpha\beta)^2 - (V\alpha\beta)^2 = (S\alpha\beta)^2 + (TV\alpha\beta)^2 \end{aligned} \quad (15)$$

$$(\alpha \pm \beta)^2 = (\alpha \pm \beta) \cdot (\alpha \pm \beta) = \alpha^2 + 2S\alpha\beta + \beta^2 \quad (16)$$

c) Si q, r y s son tres cuaterniones:

$$\begin{aligned} Sqr &= S[(Sq + Vq)(Sr + Vr)] \\ &= S(Sq \cdot Sr + Sq \cdot Vr + Vq \cdot Sr + Vq \cdot Vr) \end{aligned}$$

y como los dos términos del centro del último paréntesis son puros vectores, sus escalares serán nulos, luego:

$$Sqr = Sq \cdot Sr + S \cdot Vq Vr \quad (17)$$

pero también se tiene, según ya sabe que: $S \cdot Vq Vr = S \cdot Vr Vq$ y por lo tanto

$$Sqr = Srq \quad (18)$$

Puesto que el cuaternión r puede ser cualquiera, podemos sustituirlo por el rs , y por lo tanto, aplicando la fórmula anterior:

$$Sqrs = Srsq = Srs \cdot sq = Ssqr \quad (19)$$

igualdades que traducidas al lenguaje vulgar nos dicen que e escalar de un producto de cuaterniones no cambia mientras no cambie el orden cíclico de los factores. Esta fórmula es cierta para el caso en que los factores sean vectores puros $\alpha; \beta, \gamma$, luego:

$$S \cdot \alpha\beta\gamma = S \cdot \beta\gamma\alpha = S \cdot \gamma\alpha\beta \quad (20)$$

Pero si el orden cíclico se altera, el escalar cambia de signo, en este último caso de vectores puros, porque:

$$S \cdot \alpha\beta\gamma = S \cdot \alpha (S\beta\gamma + V\beta\gamma)$$

pero como $\alpha S\beta\gamma$ es un vector, no da contingente escalar en el resultado, luego:

$$S \cdot \alpha\beta\gamma = S \cdot \alpha V\beta\gamma = -S \cdot \alpha V\gamma\beta = S \cdot \alpha (S\gamma\beta + V\gamma\beta)$$

puesto que por la misma razón, puede añadirse el término $S\gamma\beta$ dentro del paréntesis sin alterar el resultado; luego sustituyendo en lugar de la suma, dentro de él, su igual $\gamma\beta$ tendremos:

$$S\alpha\beta\gamma = -S\alpha\gamma\beta \quad (21)$$

c) Hé aquí dos fórmulas muy interesantes y de mucho uso, la deducción de las cuales ejercitará al lector en el manejo de este cálculo. Por la fórmula (10) y teniendo presente que los productos $\beta\gamma$ y $\gamma\beta$ son dos cuaterniones conjugados, tendremos:

$$2V\beta\gamma = \beta\gamma - \gamma\beta$$

y multiplicando por α á ambos miembros:

$$2\alpha V\beta\gamma = \alpha(\beta\gamma - \gamma\beta)$$

Tomando ahora los vectores de ambos miembros, ó dicho de otro modo, multiplicando por V (multiplicación lógica):

$$2V \cdot \alpha V\beta\gamma = V \cdot \alpha(\beta\gamma - \gamma\beta)$$

Añadamos ahora al segundo miembro la suma: $\beta\alpha\gamma - \beta\alpha\gamma$ idénticamente nula y tendremos:

$$2V \cdot \alpha V\beta\gamma = V(\alpha\beta\gamma + \beta\alpha\gamma - \beta\alpha\gamma - \alpha\gamma\beta)$$

Saquemos ahora á γ factor común de los dos primeros términos del segundo miembro, y descompongamos en los otros dos, que son ambos negativos, ó por mejor decir que aparecen ambos con el signo menos ($-$), en suma de escalar más vector al producto $\alpha\gamma$, tendremos:

$$\begin{aligned} 2V \cdot \alpha V\beta\gamma &= V(\alpha\beta + \beta\alpha)\gamma - V(\beta S\alpha\gamma + \beta V\alpha\gamma + \\ &\quad S\alpha\gamma \cdot \beta + V\alpha\gamma \cdot \beta) \end{aligned}$$

Pero: $\alpha\beta + \beta\alpha = 2S\alpha\beta$ y además en el paréntesis afectado del signo menos, los términos $\beta S\alpha\gamma$ y $S\alpha\gamma \cdot \beta$ son idénticos puesto que el factor escalar puede permutarse de lugar con cualquiera otro. Además, los dos términos $\beta V\alpha\gamma$ y $V\alpha\gamma \cdot \beta$ son dos cuaterniones conjugados y por lo tanto al tomar los vectores, como se indica fuera del paréntesis por medio del factor lógico V se obtendrá con ambos, resultados iguales y contrarios que se destruirán. Luego podemos escribir:

$$2V \cdot \alpha V\beta\gamma = V(2S\alpha\beta)\gamma - V(2\beta S\alpha\gamma)$$

ó sea dividiendo por el factor 2, que como escalar puede llevarse á ocupar el primer puesto de cada término:

$$V \cdot \alpha V\beta\gamma = \gamma S\alpha\beta - \beta S\gamma\alpha \quad (22)$$

en el segundo miembro de cuya igualdad, se han suprimido los factores V á causa de que los productos son ellos por sí solos vectores puesto que son producto de un vector por un escalar. Esta fórmula es de mucho uso.

Poniendo esta fórmula bajo la forma

$$V(\alpha V\beta\gamma) = V(\gamma S\alpha\beta - \beta S\gamma\alpha)$$

y añadiendo dentro de los paréntesis de ambos miembros el término $\alpha S\beta\gamma$ tendremos:

$$V(\alpha V\beta\gamma + \alpha S\beta\gamma) = V(\alpha(V\beta\gamma + S\beta\gamma)) = V\alpha\beta\gamma \\ = V(\alpha S\beta\gamma - \beta S\gamma\alpha + \gamma S\alpha\beta)$$

ó sea

$$V\alpha\beta\gamma = \alpha S\beta\gamma - \beta S\gamma\alpha + \gamma S\alpha\beta \quad (23)$$

fórmula en cuyo segundo miembro se ha podido suprimir el factor V , como, y por la misma causa que anteriormente. Esta fórmula es aún de más uso que la anterior.

Como su segundo miembro no cambia permutando α con γ deducimos que tampoco cambia el primero y por lo tanto que:

$$V\alpha\beta\gamma = V\gamma\beta\alpha$$

fórmula que el lector puede extender al caso de varios factores.

d) Hé aquí una inmediata aplicación de estas últimas identidades. Si α , β , γ y δ son cuatro vectores, tendremos que:

$$V.V\alpha\beta V\gamma\delta = -V.V\gamma\delta V\alpha\beta$$

Considerando en esta igualdad á $V\alpha\beta$ como un vector no descomponible y descomponiendo á $V\gamma\delta$ en sus dos factores con objeto de aplicarle la fórmula (22), tendremos, aplicándosela al segundo miembro:

$$-V.V\gamma\delta V\alpha\beta = \delta S.\gamma V\alpha\beta - \gamma S.\delta V\alpha\beta$$

y si se tiene en cuenta que en el segundo miembro, el escalar de los productos de $\gamma V\alpha\beta$ y $\delta V\alpha\beta$ es el mismo que el escalar de los productos $\gamma\alpha\beta$ y $\delta\alpha\beta$:

$$-V.V\gamma\delta V\alpha\beta = \delta S.\gamma\alpha\beta - \gamma S.\delta\alpha\beta$$

Análogamente encontraremos, descomponiendo el factor α y dejando sin descomponer el $\gamma\delta$:

$$-V.V\gamma\delta V\alpha\beta = -\beta S.\alpha\gamma\delta + \alpha S.\beta\gamma\delta$$

Igualando estas dos últimas expresiones, despejando de la igualdad resultante uno cualquiera de los términos, el $\delta S.\alpha\beta\gamma$, por ejemplo, y teniendo en cuenta la identidad (21) se encuentran inmediatamente

$$\delta S.\alpha\beta\gamma = \alpha S.\beta\gamma\delta + \beta S.\gamma\alpha\delta + \gamma S.\alpha\beta\delta, \quad (24)$$

identidad que puede escribirse bajo la forma siguiente, más fácil de recordar, por conservarse siempre el orden cíclico de los cuatro factores

$$\alpha S.\beta\gamma\delta - \beta S.\gamma\delta\alpha + \gamma S.\delta\alpha\beta - \delta S.\alpha\beta\gamma = 0. \quad (25)$$

e) Finalmente, si α , β y γ son tres vectores no coplanarios, un cuarto vector δ , puede expresarse por medio de la fórmula

$$\delta = x V\alpha\beta + y V\beta\gamma + z V\gamma\alpha.$$

Multiplicando sucesivamente por α , β y γ á ambos miembros de la anterior igualdad, y tomando en ellos sus escalares, ó sea, para acostumbrar al lector al lenguaje cuaterniónico, operando sucesivamente por $S.\alpha$; $S.\beta$; $S.\gamma$; tendremos

$$S.\alpha\delta = x S.\alpha V\alpha\beta + y S.\alpha V\beta\gamma + z S.\alpha V\gamma\alpha \\ = x\alpha^2 S.V\beta + y S.\alpha\beta\gamma + z\alpha^2 S.V\beta.$$

El primero y último término del último miembro, son nulos (confróntese la tabla de multiplicación del núm. 152), luego

$$S.\alpha\delta = y S.\alpha\beta\gamma.$$

Análogamente:

$$S\beta\delta = z S.\alpha\beta\gamma \quad \text{y} \quad S\gamma\delta = x S.\alpha\beta\gamma,$$

despejando de estas igualdades los escalares x , y y z , sustituyéndolos en la expresión de δ y quitando el denominador común, $S.\alpha\beta\gamma$, se tendrá sin dificultad

$$\delta.S.\alpha\beta\gamma = V\alpha\beta.S\gamma\delta + V\beta\gamma.S\alpha\delta + V\gamma\alpha.S\beta\delta. \quad (26)$$

El modo de operar para encontrar esta fórmula es muy usado en estas álgebras, tanto en ésta como en la de Grassmann y otras.

155. Conviene echar ahora una mirada hacia atrás para ver que, en cuanto llevamos expuesto, no se ha dado por conocida más noción de trigonometría que la de la hipotenusa, en función de los catetos y la línea del ángulo adyacente ú opuesto, y esta propiedad se deduce inmediatamente de la definición de seno y coseno de un ángulo, definición que puede darse con completa independencia de las de líneas trigonométricas de los arcos, como hacen, sin ir muy lejos, nuestro Jiménez Rueda, de manera que cualquier fórmula de trigonometría que nosotros deduzcamos con ayuda de nuestro cálculo, y sin más que las nociones expuestas, será deducida absolutamente sin ninguna petición de principio.

Los tres vectores AB , BC y AC , lados de un triángulo plano cualquiera. están ligados por la igualdad, no identidad,

$$\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{BC}.$$

Operando por $S.\overline{AC}$ sobre ambos miembros, se tiene:

$$S.\overline{AC}\overline{AC} = (\overline{AC})^2 = S.\overline{AC}(\overline{AB} + \overline{BC}) \\ = S.\overline{AC}\overline{AB} + S.\overline{AC}\overline{BC}.$$

Y designando los lados y los ángulos, del modo en uso en la trigonometría y teniendo presente quiénes son los escalares de los productos diversos, podemos escribir:

$$-b^2 = -bc \cos A - ab \cos C,$$

ecuación entre términos escalares, en la cual, dividiendo b , se tiene

$$b = c \cos A + a \cos C, \quad (1)$$

ecuación fundamental en trigonometría plana, que muchos autores presentan como principal entre todas.

Si en lugar de operar por $S.\overline{AC}$, operamos por $V.\overline{AB}$, tendremos

$$V.\overline{AB}\overline{AC} = V.\overline{AB}(\overline{AB} + \overline{BC}) = V.\overline{AB}^2 + V.\overline{AB}\overline{BC} \\ = V.\overline{AB}\overline{BC},$$

pasándose de la penúltima á la última igualdad, porque el vector del cuadrado de un vector tiene que ser forzosamente nulo. Sustituyendo en lugar de los lados y los ángulos las notaciones ordinarias en trigonometría, y recordando las expresiones de las partes vectoriales de los productos que entran en el primero y último miembro, y prescindiendo de los miembros intermedios, podremos escribir

$$cb \sin A = ca \sin B,$$

repetiendo el cálculo con otro par de lados cualesquiera por su- mandos, llegamos fácilmente á la conocida fórmula

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}. \quad (2)$$

Si α , β y γ son tres vectores unidades coplanarios, y C , A y B

son los ángulos que forman entre sí α con β ; β con γ ; y γ con α ; la identidad

$$\frac{\gamma}{\alpha} = \frac{\gamma}{\beta} \cdot \frac{\beta}{\alpha} \quad \text{ó sea} \quad \gamma \alpha^{-1} = \beta \gamma^{-1} \cdot \beta \alpha^{-1}$$

conduce del modo más sencillo y elegante á las conocidas fórmulas que dan el seno y coseno de la suma de dos ángulos en función de las líneas de cada uno de los sumandos. Puesto que los tensores de los vectores que entran en la identidad son iguales á la unidad, tendremos que, valiéndonos de nuestras fórmulas (7) del número anterior, podremos escribir inmediatamente

$$\cos B + \gamma \cdot \sin B = (\cos A + \gamma \sin A) (\cos C + \gamma \sin C),$$

siendo γ un tercer vector unidad perpendicular al plano de los tres α , β y γ . Haciendo las multiplicaciones, desdoblando la ecuación en dos, una entre escalares y otra entre vectores, y teniendo presente que $\gamma^2 = -1$, podemos escribir

$$\cos(A + C) = \cos A \cos C - \sin A \sin C; \quad (3)$$

$$\sin(A + C) = \sin A \cos C + \cos A \sin C, \quad (4)$$

puesto que siendo coplanarios por hipótesis los tres vectores; $B = A + C$, tomando con signo conveniente los tres ángulos A , B y C y cualquiera que sea la posición relativa de los tres vectores.

Si α , β y γ son tres vectores unidades trazados desde el centro de una esfera de radio unidad, á los tres vértices A , B , y C de un triángulo esférico, ó sea, si los tres vectores anteriores no son coplanarios, la identidad sigue siendo cierta, solamente que ya no tenemos: $B = A + C$, ni tampoco un vector γ perpendicular á la vez á los tres vectores, pero siempre podremos escribir:

$$\begin{aligned} \frac{\gamma}{\alpha} &= \frac{\gamma}{\beta} \cdot \frac{\beta}{\alpha} = \left(S \frac{\gamma}{\beta} + V \frac{\gamma}{\beta} \right) \left(S \frac{\beta}{\alpha} + V \frac{\beta}{\alpha} \right) \\ &= S \frac{\gamma}{\beta} \cdot S \frac{\beta}{\alpha} + S \frac{\gamma}{\beta} V \frac{\beta}{\alpha} + V \frac{\gamma}{\beta} \cdot S \frac{\beta}{\alpha} + V \frac{\gamma}{\beta} \cdot V \frac{\beta}{\alpha} \end{aligned}$$

Tomando la parte escalar de ambos miembros, tendremos, teniendo en cuenta: que en el segundo todos aquellos términos productos de un escalar por un vector, son vectores puros y no dan por lo tanto contingente ninguno escalar; que empleando la notación ordinaria en los triángulos esféricos, $S \frac{\gamma}{\alpha} = \cos b$, $S \frac{\gamma}{\beta} = \cos a$ y $S \frac{\beta}{\alpha} = \cos c$; y por último que:

$$\begin{aligned} S \left(V \frac{\gamma}{\beta} V \frac{\beta}{\alpha} \right) &= S \left(I V \frac{\gamma}{\beta} U V \frac{\gamma}{\beta} \cdot I V \frac{\beta}{\alpha} U V \frac{\beta}{\alpha} \right) \\ &= I V \frac{\gamma}{\beta} \cdot I V \frac{\beta}{\alpha} \cdot S \left(U V \frac{\gamma}{\beta} \cdot U V \frac{\beta}{\alpha} \right) \end{aligned}$$

y teniendo en cuenta que

$$I V \frac{\gamma}{\beta} = \sin a \quad I V \frac{\beta}{\alpha} = \sin c$$

y

$$S \cdot U V \frac{\gamma}{\beta} U V \frac{\beta}{\alpha} = \cos B$$

nos quedará por último:

$$\cos b = \cos a \cos c + \sin a \sin c \cos B \quad (5)$$

que es la fórmula fundamental en trigonometría esférica.

La sencillez verdaderamente sorprendente con que se dedu-

cen, por medio de este cálculo, todas las fórmulas de la trigonometría, tanto las relativas á funciones angulares como las de los triángulos planos ó esféricos, no debe extrañar. Por medio de este cálculo se *empieza* el estudio de la trigonometría en plena posesión de la fórmula de Moivre, que por el método corriente de estudiar esta ciencia es una consecuencia ó generalización de todas ó la mayor parte de las demás.

Entrando en más desarrollos sobre la forma exponencial de los cuaterniones, podemos presentar muchas más aplicaciones de este álgebra á la trigonometría, todas ellas igualmente aptas para demostrar la extraordinaria potencia de raciocinio que posee este álgebra.

Aun sin ello, que haremos en el capítulo siguiente, pero sin entrar en aplicaciones, podemos hallar una preciosa expresión que encierra en sí toda la trigonometría esférica. Si α , β y γ son, como antes, los tres vectores unidades que van del centro de la esfera unidad al de los tres vértices de un triángulo esférico cualquiera, y α' , β' y γ' tres vectores análogos para el triángulo suplementario, la identidad:

$$\frac{\beta'}{\alpha'} \cdot \frac{\alpha'}{\gamma'} \cdot \frac{\gamma'}{\beta'} = 1$$

puede transformarse como sigue. $\frac{\beta'}{\alpha'}$ es un cuaternión de tensor unidad (puesto que vectores unidades son los dos términos de la fracción) cuyo eje es el vector γ y cuyo ángulo es $2 - C$, medidos los ángulos con el recto, ó

$$2 - \frac{C}{\pi} = 2 - \frac{2C}{\pi}.$$

Luego:

$$\frac{\beta'}{\alpha'} = \gamma^{2 - \frac{2C}{\pi}}; \quad \frac{\alpha'}{\gamma'} = \beta^{2 - \frac{2B}{\pi}}; \quad \text{y} \quad \frac{\gamma'}{\beta'} = \alpha^{2 - \frac{2A}{\pi}}$$

y por tanto:

$$\gamma^{2 - \frac{2C}{\pi}} \cdot \beta^{2 - \frac{2B}{\pi}} \cdot \alpha^{2 - \frac{2A}{\pi}} = 1$$

Si esta igualdad se multiplica sucesivamente por los tres factores:

$$\frac{2C}{\pi} \cdot \frac{2B}{\pi} \cdot \frac{2A}{\pi}$$

quedará:

$$\gamma^2 \cdot \beta^2 \cdot \alpha^2,$$

y como este producto es igual á -1 , se deduce que el producto de los tres factores por los cuales se ha multiplicado es precisamente -1 luego:

$$\frac{2C}{\pi} \cdot \frac{2B}{\pi} \cdot \frac{2A}{\pi} = -1$$

ó permutando los factores sin alterar el orden ciclico:

$$\frac{2A}{\pi} \cdot \frac{2B}{\pi} \cdot \frac{2C}{\pi} = -1 \quad (6)$$

Que es la fórmula que deseábamos obtener.

156. Dejaremos aquí estas aplicaciones trigonométricas que de un modo tan inmediato y elemental se deducen de los prime-

ros principios de este cálculo y, dejando de lado para un capítulo de aplicaciones las geométricas, cinemáticas y dinámicas, terminemos éste aumentando el caudal de fórmulas que con sólo las cuatro reglas aprendidas podamos determinar, ó por mejor decir algunas de las que podamos determinar, pues como poder, se pueden hallar tantas, tan curiosas y tan interesantes, que emplearíamos demasiado espacio.

a) Desde luego podemos interpretar las dos fórmulas ó expresiones:

$$S\alpha\beta = 0 \quad (1) \quad V\alpha\beta = 0 \quad (2)$$

como las condiciones para los dos vectores α y β sean, perpendiculares si satisfacen á la primera condición y paralelos si cumplen con la segunda. Esto es consecuencia inmediata de las expresiones de la parte escalar y vectorial del producto de los dos vectores (130. 1).

Como ejercicio puede el lector escribir los vectores α y β en función de tres vectores rectangulares i, j y k y encontrará inmediatamente las condiciones de paralelismo y perpendicularidad en la forma en que se presentan en las geometrías analíticas.

b) Hallemos el escalar del producto de tres vectores α, β y γ :

$$\alpha\beta\gamma = (S\alpha\beta + V\alpha\beta)\gamma = S\alpha\beta\gamma + V\alpha\beta\gamma.$$

El primer término del último miembro es un vector cuyo escalar es, por lo tanto, nulo; luego tomando escalares del primero y último miembros tendremos:

$$S\alpha\beta\gamma = S(V\alpha\beta\gamma).$$

Si θ es el ángulo de α y β , y η un vector unidad ($T\eta = 1$) perpendicular al plano de α y β y cuyo ángulo con el vector γ designaremos por φ :

$$V\alpha\beta = T\alpha T\beta \sin \theta \cdot \eta$$

y

$$S'V\alpha\beta\gamma = T\alpha T\beta \sin \theta S'\eta\gamma$$

pero:

$$S'\eta\gamma = -T\eta T'\gamma \cos \varphi = -T'\gamma \cos \varphi$$

luego:

$$S'(V\alpha\beta\gamma) = S\alpha\beta\gamma = -T\alpha T\beta T'\gamma \sin \theta \cos \varphi \quad (3).$$

Esta fórmula tiene una sencilla interpretación que conviene conocer: $T\alpha T\beta \sin \theta$ es la medida del área del paralelogramo construido sobre α y β y $T'\gamma \cos \theta$ es la altura, relativa á este lado, del paralelepípedo cuyos lados sean $T'\alpha, T'\beta$ y $T'\gamma$; luego el producto: $T'\alpha \cdot T'\beta \cdot T'\gamma \cdot \sin \theta \cos \varphi$ es el volumen de dicho paralelepípedo. Si

$$\begin{aligned} \alpha &= x i + y j + z k & \beta &= x' i + y' j + z' k \\ \gamma &= x'' i + y'' j + z'' k \end{aligned}$$

haciendo el producto de los tres vectores y tomando la parte escalar hallará el lector fácilmente:

$$S'\alpha\beta\gamma = -x''(y z' - z y') - y''(z x' - x z') - z''(x y' - y x') \quad (4)$$

que podemos escribir bajo forma de determinante así:

$$S'\alpha\beta\gamma = - \begin{vmatrix} x & x' & x'' \\ y & y' & y'' \\ z & z' & z'' \end{vmatrix} \quad (5)$$

expresión ya conocida en geometría analítica como representando el volumen del paralelepípedo ya dicho. Como el deter-

minante cambia de signo cuando se cambian dos líneas ó columnas consecutivas tenemos una comprobación de que:

$$S\alpha\beta\gamma = -S'\alpha\beta\gamma$$

como ya sabíamos (154, 21).

c) Remedando el modo de deducción de la fórmula (15) del número (154, b) podemos escribir:

$$\begin{aligned} [T(qr)]^2 &= qr Kqr = qr \cdot r q = (Sqr + Vqr) \\ (Sqr - Vqr) &= (S'qr)^2 - (V'qr)^2 \end{aligned} \quad (6).$$

En donde q y r son dos cuaterniones cualesquiera:

$$\begin{aligned} q &= w + x i + y j + z k \\ r &= w' + x' i + y' j + z' k. \end{aligned}$$

Pero como también podemos escribir: $(Tqr)^2 = (Tq)^2 \cdot (Tr)^2$ tendremos:

$$(Tq)^2 \cdot (Tr)^2 = (Sqr)^2 - (Vqr)^2$$

y haciendo las multiplicaciones y separando en los productos la parte escalar de la vectorial, escribiremos:

$$\begin{aligned} & (w^2 + x^2 + y^2 + z^2)(w'^2 + x'^2 + y'^2 + z'^2) \\ &= (ww' - xx' - yy' - zz')^2 + (wx' + w'x + yz' - y'z)^2 \\ &+ (wy' + w'y + zx' - z'x)^2 + (wz' + w'z + xy' - yx')^2 \end{aligned} \quad (7)$$

identidad conocidísima entre los estudiantes de álgebra elemental con el nombre de identidad de Euler.

d) Si tres vectores son coplanarios, el volumen del paralelepípedo formado sobre ellos es nulo, y por lo tanto:

$$S\alpha\beta\gamma = 0 \quad (9)$$

será la condición para que los tres vectores α, β y γ estén en un plano; su producto será, pues, siempre un vector.

Si los tres vectores son: α, β y α^{-1} , como α y α^{-1} son paralelos α, β y α^{-1} serán coplanarios, y por lo tanto el producto será un vector que designaremos por ρ escribiendo:

$$\rho = \alpha\beta\alpha^{-1} \quad (9)$$

operando por esta igualdad sobre la identidad $\alpha = \alpha$ y tomando escalares se tiene:

$$S \cdot \rho \alpha = S' \cdot \alpha \beta \alpha^{-1} \alpha = S\alpha\beta$$

ó sea designando por θ y θ' los ángulos de ρ con α y α con β :

$$T\rho T\alpha \cos \theta = T\alpha T\beta \cos \theta'$$

Pero como el tensor del producto es igual al producto de los tensores de los factores:

$$T\rho = T\alpha T\beta T\alpha^{-1} = T\alpha \cdot T\beta \frac{1}{T\alpha} = T\beta$$

por lo tanto la igualdad anterior nos dice que: $\cos \theta = \cos \theta'$ de manera que β y ρ forman ángulos iguales con α pero de sentidos contrarios.

e) Con más generalidad podemos tratar el problema anterior averiguando qué representará el operador

$$q () q^{-1} \quad (10)$$

ó qué efecto producirá sobre un cuaternión colocado en el paréntesis, ó sobre un vector, como caso particular. En primer lugar, el cuaternión r sobre el cual se opere conservará su tensor porque llamando s al resultado de la operación, tendremos:

$$Ts = Tq T r T q^{-1} = Tq T r \frac{1}{Tq} = T r.$$

Podemos, por lo tanto, considerar solamente el efecto rotacional ó versorial de los cuaterniones q y q^{-1} , y para ello, sea (figura 19) $\widehat{A'B} = Uq = \widehat{B'A'}$ y A el punto de intersección del plano de q con el del cuaternión r sobre el cual se opera, que supondremos sea $Ur = \widehat{A'C}$ contado á partir del mismo punto A . Entonces el arco $\widehat{B'C}$ será igual á $Ur \cdot Uq^{-1}$ puesto que si designamos por p á un nuevo cuaternión cuyo versor sea $\widehat{B'C}$ podremos escribir: $Ur = Up \cdot Uq$ y multiplicando por ambos miembros de esta igualdad á Uq^{-1} tendremos: $Ur \cdot Uq^{-1} = Up \cdot Uq \cdot Uq^{-1} = Up$. Del mismo modo veremos que: $r' = qp$ suprimiendo el signo del versor para simplificar la escritura. Tenemos, por lo tanto, la siguiente serie de identidades:

$$r' = qr = qpqq^{-1} = q \cdot p \cdot q \cdot q^{-1} = qrq^{-1} = s$$

Luego $r' = A'C'$ ha sido el resultado de operar sobre r por medio del operador $q(\)q^{-1}$. El cuaternión r' cuyo versor es $\widehat{A'C'}$, y cuyo tensor es el mismo del de el cuaternión r es tal, que su versor sólo difiere del de r en estar en otro plano, de manera que la operación ha dado el resultado de hacer girar el plano de r alrededor del eje de q , ó sea de OP , un ángulo medido por el arco $\widehat{ABA'}$ doble del de el versor de q . Es una rotación alrededor de un eje no perpendicular al del cuaternión girado, una rotación en la cual el eje del cuaternión r , operado, describe un cono de revolución cuyo semiángulo es el ángulo de Uq .

Si sobre una entidad geométrica cualquiera, un vector por ejemplo, operásemos primero $q(\)q^{-1}$ y luego por $q'(\)q'^{-1}$ el resultado sería el mismo que el obtenido operando de una vez por:

$$q'q'(\)q'^{-1}q^{-1} = s(\)s^{-1} \quad (11)$$

ó sea componiendo en una las dos rotaciones; de manera, que este operador nos proporciona un medio de tratar analíticamente las rotaciones y su composición.

Si R es un cuerpo sólido definido por los vectores de sus puntos referidos á un origen, qRq^{-1} será la expresión de este mismo cuerpo girado el ángulo doble del versor de q alrededor del eje de q .

Si quisiéramos girar al cuerpo R un ángulo que guardase con el del cuaternión q una relación determinada, elegiríamos la potencia de q conveniente para que q^t tuviera el versor deseado; de manera que si θ es la magnitud angular del versor de q y φ el ángulo que se quiere que el sistema rígido gire alrededor del eje de q : $t\theta = \frac{\varphi}{2}$ de donde $t = \frac{2\theta}{\varphi}$ y esta será la potencia apropiada de q que nos permita obtener el resultado deseado.

Por analogía con esta notación podemos adoptar otra para expresar la traslación de un cuerpo rígido una longitud igual al tensor de un vector y paralelamente al mismo, generalizando lo que hicimos en el párrafo 99. El cuerpo R quedará representado en su nueva posición por $\alpha + R$; y si este nuevo cuerpo se gira por medio del operador $q(\)q^{-1}$ quedará convertido en $q(\alpha + R)q^{-1} = q\alpha q^{-1} + qRq^{-1}$. Estas expresiones son particularmente útiles en astronomía donde evitan laboriosas fórmulas de trigonometría. El operador que allí más se emplea es siendo λ un vector paralelo al eje de rotación de la tierra y h el ángulo horario de una estrella cualquiera:

$$\left(\cos \frac{h}{2} - \lambda \sin \frac{h}{2} \right) (\quad) \left(\cos \frac{h}{2} + \lambda \sin \frac{h}{2} \right) \quad (12)$$

tomándose negativo el vector λ á causa de que el movimiento aparente de los astros es negativo, ó sea como las agujas del reloj.

7) Un operador análogo es el siguiente: $q(\)Kq$, pero no siendo el tensor del conjugado inverso del tensor del cuaternión

directo, sino igual, este operador hará el mismo efecto de giro que el considerado antes, pero acortará ó alargará los tensores de los vectores ó cuaterniones, á los que sea aplicado, en la relación de $\frac{(Tq)^2}{1}$ de modo que si, como anteriormente, un

cuerpo rígido dado por los vectores de sus puntos con respecto á un origen, es operado por este nuevo operador, cada vector se convertirá en otro girado alrededor del eje de q el ángulo consabido, y cuya longitud será $(Tq)^2$ mayor ó menor que la primitiva. Habrá, pues, una deformación al mismo tiempo que un giro, y este operador será especialmente apto para el estudio de las deformaciones, y por tanto para el estudio de la elasticidad, como aquél era precioso para el estudio de las rotaciones.

Puesto este último bajo la forma:

$$(w + xi + yj + zk) (\quad) (w - xi - yj - zk) \quad (13)$$

hace depender la deformación de sólo cuatro números, propiedad que fué conocida y expuesta por Gauss.

Al tratar de aplicaciones cinemáticas y físicas, volveremos á ocuparnos, siquiera sea muy brevemente, de estos interesantes operadores.

Terminaremos, pues, con este capítulo, no sin hacer notar que con la sola exposición de las cuatro reglas de este cálculo, hemos conseguido hacernos de un instrumento de pensamiento, muy superior al que poseíamos conociendo el álgebra ordinaria hasta sus más intrincadas sublimidades.

V.

Potencias, logaritmos y funciones trigonométricas de cuaterniones.

157. En el capítulo anterior hemos anticipado (núm. 151) la noción de potencia y raíz de un cuaternión y de un vector, como caso particular suyo, en extensión suficiente para no dejar incompletas aquellas nociones sobre las cuatro reglas de este cálculo, de un modo análogo á como en álgebra se presenta la noción de potencia como una abreviación de una serie de multiplicaciones del mismo factor. Insistiré aquí brevemente sobre la noción de potencia numérica de un cuaternión, esto es, expresión potencial en la cual la base sea un cuaternión pero el exponente sea un escalar, entero, fraccionario ó inconmensurable, positivo ó negativo, y pasaré después á exponer, más brevemente aún, la interpretación de potencia cuaterniónica de un cuaternión, logaritmo de base cuaterniónica de un cuaternión y de las funciones trigonométricas, seno, coseno, tangente, etcétera, etc., de un cuaternión, funciones sin interpretación como tales operaciones de: repetir un número de veces como factor al cuaternión, marcar un arco igual á él en una circunferencia y bajar la perpendicular al radio ó diámetro que pase por el otro extremo. etc., etc.

158. Si q es un cuaternión que convierte á α en β :

$$\frac{\beta}{\alpha} = q = Tq \cdot Uq = \frac{T\beta}{T\alpha} [\cos \theta + \eta \sin \theta]$$

siendo θ el ángulo de α con β y η un vector unidad perpendicular á α y β , según las fórmulas ya conocidas del lector. Por tanto:

$$Uq = \cos \theta + \eta \sin \theta$$

Siguiendo á Hamilton cambiaremos la letra η por la i y representaremos al versor de q puesto bajo la forma anterior por:

$$Uq = \cos \theta + i \sin \theta \quad (1)$$

ó abreviadamente por:

$$Uq = \text{cis } \theta \quad (2)$$

expresión esta última que, aunque usaremos poco, damos á conocer para que el lector que quiera iniciarse de veras en estos estudios, no se encuentre parado al verse frente á una expresión que no sabe leer. θ es el ángulo del versor y suele emplear para designarlo la notación $\angle Uq$ ó más simplemente $\angle q$ cuando en ello no haya temor de confusión, queriéndose indicar con ello, ó también con la notación: *ang. q.*, no solamente la magnitud angular θ sino esta magnitud como contenida en un plano de orientación determinada y descrito en sentido determinado también. Pero siempre que tratemos de introducir en el análisis la expresión (1) ó su abreviación, la (2), como los senos y cosenos de θ , que en ella figuran, son iguales á los de $2n\pi + \theta$, siendo n un número entero cualquiera, no habrá inconveniente en reemplazar θ por $2n\pi + \theta$ en estas expresiones, y como este ángulo indeterminado $2n\pi + \theta$ es algo anejo al cuaternión q y que hace en el versor de q el mismo efecto que su propio ángulo θ , puede dársele un nombre que haga alusión al dicho cuaternión y se le denomina la *amplitud* de q , designándolo por la notación *am. q.*

En cualquier operación que se lleve á cabo sobre un cuaternión q , llamaremos *valor principal* del resultado de la misma, al obtenido con el ángulo de q , y valores secundarios á los obtenidos con la amplitud en la cual se da á n los valores que dan resultados distintos. De otro modo: valor principal será el correspondiente á $n = 0$, y secundarios los correspondientes á otros valores de n . Con estos principios y las notaciones explicadas, podremos escribir:

$$(3) \quad Uq = \text{cis } am \, q \quad \text{y} \quad q = Tq \cdot \text{cis } am \, q \quad (4)$$

Cuando el valor que se da á n en un cuaternión ó un versor, no es nulo, debe marcarse de alguna manera cuál sea el dado, y esto se hace de alguna de las dos siguientes:

$$am_n \, q \quad \text{ó} \quad \angle_n q$$

Explicadas estas notaciones podemos ya entrar en materia, previa la convención de que $am_0 (-1) = +\pi$ y no $-\pi$ como también podríamos libremente convenir.

159. Es fácil ahora explicar completamente la interpretación de la expresión q^t , donde q es un cuaternión cualquiera y t un escalar cualquiera también, entero ó fraccionario ó inconmensurable, positivo ó negativo. Si es entero y positivo, su interpretación es la ya dicha (151), la repetición de q un cierto número de veces como factor; si es negativo y entero, la unidad partida por q^t . Si t fuese fraccionario, de la forma $\frac{1}{t}$ la interpretación sería aún la que en aquel número dimos, pero habría que examinarla un poco más despacio. Interpretando: $\frac{1}{q^t}$ como equivalente á $\sqrt[t]{q}$ la interpretación estará regulada por la ecuación.

$$\left(\frac{1}{q^t}\right)^t = q$$

y designando por r al resultado:

$$\frac{1}{q^t} = \sqrt[t]{q} = r \quad \text{ó} \quad r^t = q$$

Si ahora expresamos r en función de su tensor y su ángulo ó su amplitud, ambos desconocidos, y q en función de su tensor y de su amplitud, conocidos ambos, tendremos:

$$[Tr [\cos \widehat{\omega} + \eta \sin \widehat{\omega}]]^t = Tq [\cos (\theta + n\pi) + i \sin (\theta + n\pi)]$$

siendo Tr y $\widehat{\omega}$ desconocidos y η un vector unidad cuya dirección, eje del cuaternión r , es también desconocida. $\eta^2 = i^2 = -1$.

Desde luego la ecuación anterior implica que: $Tr = \sqrt[t]{Tq}$.

Además, con la sola excepción del caso en que $\theta = \pi$, $\eta = i$ pues t giros iguales á $\widehat{\omega}$ sólo pueden ser equivalentes á un giro igual á θ , en el caso en que se hagan en planos paralelos ó sea alrededor de ejes paralelos. En el caso en que $\theta = \pi$, t giros iguales á $\widehat{\omega}$ serán iguales á un solo giro igual á π con tal que lo sea la magnitud angular girada y cualquiera que sea el plano del giro. En este caso, y sólo en él, habrá indeterminación acerca de la dirección del vector unidad η . Además:

$$(\cos \widehat{\omega} + i \sin \widehat{\omega})^t = \cos t\omega + i \sin t\omega = \cos (\theta + n\pi) + i \sin (\theta + n\pi)$$

ó sea:

$$\text{cis } t\omega = \text{cis } (\theta + n\pi)$$

lo cual exige que:

$$\widehat{\omega} = \frac{\theta + n\pi}{t}$$

Luego los elementos que definen al cuaternión r resultado de la operación $\sqrt[t]{q}$ están dados por las ecuaciones:

$$Tr = \sqrt[t]{Tq} \quad (1) \quad \eta = i \quad (2) \quad \omega = \frac{\theta + n\pi}{t} \quad (3)$$

La primera ecuación sólo admite una solución; la segunda, salvo el caso de excepción señalado, tampoco admite más de una solución; pero la tercera admite t soluciones, las cuales se obtienen dando á la indeterminada n los t valores: $1, 2, 3, \dots, t$. Luego la raíz enésima de un cuaternión es problema susceptible de *ene* soluciones.

Si t fuera fraccionario de la forma $\frac{a}{b}$, la discusión sería la misma y el número de soluciones sería el de unidades del denominador b .

Si t fuera inconmensurable, lo reemplazaríamos por fracciones que lo comprendieran, cuyas diferencias haríamos que tendieran hacia cero y cuyos términos, numerador y denominador, crecerían sin límites. Las ecuaciones (1) y (2) tendrían una sola solución, pero la (3), que tendría tantas como unidades el denominador de la fracción $\frac{a}{b}$, tendría infinitas, pues los términos de ella habrían de serlo en el límite cuando fuera igual al número inconmensurable t .

160. La ecuación $r^t = q$ nos presenta á t como el logaritmo escalar del cuaternión q en la base cuaterniónica r .

161. Para buscar ahora interpretaciones á expresiones de la forma:

$$q^r$$

en la cual tanto q como r son cuaterniones cualesquiera, recordemos el procedimiento de que se echa mano en el álgebra para resolver problemas análogos.

El número, en su primer concepto, ó sea en número entero, es el eje alrededor del cual gira toda el álgebra. Cuando el algebrista se forma el concepto del número fraccionario, echa mano de dos números enteros para expresarlo, y cuando avanzando más en el estudio, forma el del número inconmensurable, acude ó bien á infinitos números enteros ó al de dos números enteros que crecen sin límites y forma con ellos fracciones que se aproximan indefinidamente al número inconmensurable que quiere expresar. Finalmente el más complicado y difícil de los números que maneja el algebrista, el número imaginario, lo representa con el auxilio de dos números de cualquiera de las especies que ya á su vez ha representado previamente con el auxilio de los números enteros. En resumen, á la repetición de la

vez, reduce el algebrista todo concepto relativo al número como obtenido por la comparación de magnitudes, que es el segundo y más avanzado modo de concebirlo que tiene.

A lo mismo reduce las operaciones. La suma, es contar sobre uno de los sumandos tantas veces la unidad como unidades tiene el otro; la multiplicación, es sumar un número tantas veces consigo mismo como unidades tiene el otro factor; la elevación á potencias, es formar un producto de factores iguales, tantos en número cuantas sean las unidades del exponente, ó dicho como suele decirse en los tratados de álgebra, es tomar un número tantas veces como factor como unidades tiene el exponente. Todas estas veces son números enteros, pero referidos á él los números de las demás clases y expresados por medio de número finito ó infinito de números enteros, extiende á ellos los conceptos de operaciones, y forma, ó por lo menos expresa con ellos, las operaciones inversas de división y extracción de raíces. Así la

división es una multiplicación por el número $\frac{1}{\text{Divisor}}$; la extracción de raíces es la elevación á la potencia $\frac{1}{n}$. Con estas funciones de la vez, forma el algebrista sus más complicadas funciones algebraicas repitiéndolas y combinándolas en número finito de veces; y combinándolas y repitiéndolas en número infinito de veces, logra expresar las funciones que le proporcionan, ó bien ella misma como las logarítmicas, ó bien otras ramas de las matemáticas como la trigonometría, y á las cuales llama ordinariamente trascendentes, pero que con más propiedad debería llamar *incommensurables*, pues lo son con la vez, bajo el mismo título y por el mismo concepto por el cual el número así llamado lo es con ella, por no poderse expresar adecuadamente por medio de ella, y solo de ella.

Consigue el álgebra con este procedimiento de expresar sus operaciones por medio del número finito ó infinito de funciones de la vez, algo más, que es de mucha importancia en cuanto entra esta ciencia en análisis algo elevados, pues como la repetición de veces es aplicable á todas las cosas y en cambio no todas son aplicables á la repetición de veces, en cuanto consigue expresar una de sus funciones algebraicas ó trascendentes en función de repetición de veces, puede extender el concepto de tal función, sustituyendo á la vez una cosa cualquiera, por ejemplo, la única entidad matemática que maneja el álgebra, cual es el número imaginario. Así, por ejemplo, la elevación de un número á una potencia imaginaria, no tiene interpretación como tal operación de elevación á potencias, ó sea como tal operación de repetir un número por factor tantas veces cuantas son las unidades de otro, porque el número de unidades del número imaginario no lo sabe el algebrista, pero en cuanto éste consigue expresar una potencia cualquiera como repetición de la base y partes alicuotas de la base, no tiene más que sustituir á esta base por la entidad matemática que quiera, y siempre que sea tal entidad matemática y por lo tanto repetible y divisible, la expresión tendrá interpretación como algo compuesto de ella, aunque ella misma no la haya recibido aún por el algebrista, y aunque el número de operaciones que haya que efectuar sea infinito, con tal que sea perfectamente definida la sucesión de ellas y deducción unas de otras.

Por ejemplo: adquirido el concepto de la base de los logaritmos naturales ó neperianos, el álgebra se dedica á evaluarlo y se ve precisada para ello á llevar á cabo el infinito número de operaciones simbolizadas por la expresión:

$$e = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \dots = 2.718281828 \dots \quad (1)$$

Encuentra luego seguidamente y sin gran trabajo que:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1 \cdot 2} + \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots \quad (2)$$

y si en esta expresión, que previamente demuestra que es una serie convergente, sustituye en lugar de x , $x + \sqrt{-1} \cdot y$, la sucesión de operaciones que tenemos que hacer con el nuevo símbolo es perfectamente definida y cada una de ellas tiene perfecta interpretación. Por una generalización muy natural y perfectamente legítima, define el algebrista la expresión que no había conseguido interpretar $e^x + y\sqrt{-1}$, como equivalente á la perfectamente interpretable:

$$e^{x + y\sqrt{-1}} = 1 + \frac{x + y\sqrt{-1}}{1} + \frac{(x + y\sqrt{-1})^2}{2} + \frac{(x + y\sqrt{-1})^3}{3} + \dots \quad (3)$$

Conseguido esto, fácilmente halla que:

$$1 + \frac{x^2}{1^2} + \frac{x^4}{1^4} - \frac{x^6}{1^6} + \dots = \cos x = \frac{1}{2} (e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}}) \quad (4)$$

$$\frac{x}{1} - \frac{x^3}{1^3} + \frac{x^5}{1^5} - \frac{x^7}{1^7} + \dots = \sin x = \frac{1}{2\sqrt{-1}} (e^{x\sqrt{-1}} - e^{-x\sqrt{-1}}) \quad (5)$$

y análogamente las demás líneas trigonométricas:

$$\operatorname{tg} x = \frac{e^{x\sqrt{-1}} - e^{-x\sqrt{-1}}}{\sqrt{-1} (e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}})} \quad (6)$$

$$\sec x = \frac{2}{e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}}} \quad (7)$$

$$\cot x = \frac{\sqrt{-1} (e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}})}{e^{x\sqrt{-1}} - e^{-x\sqrt{-1}}} \quad (8)$$

$$\operatorname{cosec} x = \frac{2\sqrt{-1}}{e^{x\sqrt{-1}} - e^{-x\sqrt{-1}}} \quad (9)$$

y una cosa análoga para las funciones hiperbólicas:

$$\operatorname{sh} x = \frac{1}{2} (e^x - e^{-x}) \quad \operatorname{ch} x = \frac{1}{2} (e^x + e^{-x})$$

$$\operatorname{tg} h x = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} \quad \cot h x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

$$\sec h x = \frac{2}{e^x + e^{-x}} \quad \operatorname{cosec} h x = \frac{2}{e^x - e^{-x}} \quad (10)$$

Sin que una vez interpretada la expresión (3), tenga dificultad ninguna la interpretación de las que le siguen.

Además, en álgebra, la expresión (2), nos hace ver que aunque x sea imaginario: $e^x \cdot e^{x'} = e^{(x + x')}$ porque multiplicando miembro á miembro las dos igualdades que nos dan los desarrollos en serie de e^x y de $e^{x'}$ se obtiene con facilidad suma, y á causa de que la multiplicación de números, reales ó imaginarios, es conmutativa, el desarrollo en serie de $e^{x + x'}$. No presentamos estos cálculos porque son completamente elementales y porque, si no los recuerda el lector, con sólo escribir las dos series é ir multiplicándolas de manera de obtener la serie producto, ya ordenada, obtendrá fácilmente el resultado y verá por sí mismo el papel que la conmutatividad de los factores juega en la obtención del resultado.

Queda finalmente la interpretación de la expresión de a^b cuando tanto a como b pueden ser imaginarios. Para ello dice el

álgebra ordinaria: Si a y b son reales, y si $e^a = a'$; $a = \lg_e a'$ y si llamo c al resultado de la operación a^b escribiré $a^b = c$ de donde $b \cdot \lg_e a = \lg_e c$ y por lo tanto $e^{b \cdot \lg_e a} = c = a^b$. Como todas estas operaciones siguen teniendo interpretación aunque a y b sean imaginarios, en virtud de las ecuaciones (1) (2) y (3) extenderemos las definiciones de las operaciones, y definiremos en general, sea cualquiera la naturaleza de las entidades representadas por los símbolos, que:

$$a^b = e^{b \cdot \lg_e a} \quad (11)$$

162. Siguiendo los mismos pasos, interpretaremos la expresión e^q cuando q sea un cuaternión cualquiera, como equivalente á:

$$e^q = 1 + \frac{q}{1} + \frac{q^2}{2!} + \frac{q^3}{3!} + \dots = \sum \frac{q^n}{n!} \quad (1)$$

Si r es el resultado, supuesto conocido, del desarrollo en serie anterior:

$$e^q = r \quad \text{y} \quad q = \lg_e r \quad (2)$$

siendo r un cuaternión, puesto que no puede obtenerse otra cosa en la prosecución de las operaciones indicadas por los términos de la serie (1).

Si p es otro cuaternión:

$$e^p = \sum \frac{p^n}{n!} \quad \text{y} \quad e^p \cdot e^q = \sum \frac{p^n}{n!} \cdot \sum \frac{q^n}{n!}$$

y esto será distinto de $e^{p+q} = \sum \frac{(p+q)^n}{n!}$ en tanto que

$p^h q^h$ no sea idéntico con $q^h p^h$, pero si en algún caso particular la multiplicación de cuaterniones se hace conmutativa, entonces, y sólo entonces, podremos escribir: $e^p \cdot e^q = e^{p+q}$; pero en general, esta igualdad, no será más cierta que los milagros de Mahoma. Tal caso particular se encuentra cuando los dos cuaterniones p y q son coplanarios, porque entonces la multiplicación de cuaterniones es conmutativa, pues ambos factores podrán ponerse bajo la forma:

$$S'q + V'q \quad \text{y} \quad S'p + V'p$$

y multiplicando ambos factores se encuentra

$$[S'q S'p + (n V'q)^2] + (S'p + n S'q) V'q$$

expresión en la cual todos los términos tienen sus factores conmutativos.

Otro caso particular es $e^q = e^{S'q + V'q} = e^{S'q} \cdot e^{V'q}$ igualdad que puede ser de utilidad.

Tanto el cuaternión inverso como el conjugado, son coplanarios con el directo, de modo que, siempre:

$$e^q \cdot e^{q^{-1}} = e^q + q^{-1} \quad (3) \quad \text{y} \quad e^q \cdot e^{Kq} = e^q + Kq = e^{2S'q} \quad (4)$$

Si en la serie (1) de este número, escribiéramos, en lugar de q , Kq , encontraríamos la misma parte escalar en cada uno de los términos y en cambio aquellos que dieran parte vectorial la darían de signos contrarios, luego el resultado que nos diera esta serie poniendo en ella q y Kq serían dos cuaterniones conjugados, luego:

$$K e^q = e^{Kq} \quad (5)$$

Fórmulas ya conocidas (130,1), nos dicen que: $e^q K e^q = (T e^q)$ luego en virtud de las anteriores:

$$e^q \cdot e^{Kq} = (T e^q)^2 = e^{2S'q} = (e^{S'q})^2$$

luego

$$T e^q = e^{Kq} \quad (6)$$

y como:

$$e^q = T e^q \cdot U e^q = e^{S'q} + V'q = e^{S'q} \cdot e^{V'q}$$

se deduce que:

$$U e^q = e^{V'q} \quad (7)$$

Si en esta igualdad expresamos $U e^q$ en función del coseno y seno del cuaternión e^q y sustituimos en la serie (1), y separamos en ella la parte escalar de la vectorial, obtendremos los desarrollos en series de los senos y cosenos de Uq .

Directamente pueden presentarse las fórmulas de estos desarrollos en serie de los senos y cosenos, definiendo como hicimos en el número anterior con las fórmulas (4) al (10), las siguientes funciones de cuaterniones:

$$\cos q = 1 - \frac{q^2}{2!} + \frac{q^4}{4!} - \frac{q^6}{6!} + \dots = \frac{1}{2} (e^{vq} + e^{-vq}) \quad (8)$$

$$\sin q = \frac{q}{1} - \frac{q^3}{3!} + \frac{q^5}{5!} - \dots = \frac{1}{2v} (e^{vq} - e^{-vq}) \quad (9)$$

$$tg q = \frac{v(e^{vq} + e^{-vq})}{e^{vq} - e^{-vq}} \quad (10) \quad \cot q = \frac{v(e^{vq} - e^{-vq})}{e^{vq} + e^{-vq}} \quad (11)$$

$$\sec q = \frac{2}{e^{vq} + e^{-vq}} \quad (12) \quad \operatorname{cosec} q = \frac{2v}{e^{vq} - e^{-vq}} \quad (13)$$

En cuyas expresiones v representa $U V q$ y por lo tanto $v^2 = -1$

Suprimiendo v de las expresiones (8) al (13), obtendríamos definiciones análogas á las (10) del párrafo anterior para las funciones hiperbólicas de un cuaternión.

Finalmente, en virtud de la igualdad (2) y por analogía con lo hecho antes definiremos como equivalentes los dos miembros de la siguiente igualdad:

$$p^q = e^{q \lg_e p} \quad (14)$$

donde el signo $\lg$ indica un logaritmo neperiano cuaterniónico.

163. Todo lo acabado de exponer, no es un análisis de las cuestiones á que dan lugar las nociones de las funciones logarítmicas, trigonométricas é hiperbólicas de cuaterniones, es solo un índice, y aun rudimentario, de las cuestiones á que dan lugar. La convergencia de la serie (1) del párrafo anterior y el hallar el número de soluciones entre reales é imaginarias que pueden tener las diferentes expresiones que definen las diversas funciones, son cuestiones importantísimas en cuyo examen no podemos ni siquiera pensar en entrar.

Algo de ello hicimos al estudiar las raíces de los cuaterniones, pero aun aquel análisis fué incompleto, pues sólo se estudiaron (159) las soluciones reales de q^n dejando sin investigar as $n(n-1)$ soluciones imaginarias que junto con las n reales suman el total de n^2 soluciones. Mirando, pues, lo dicho sólo como un índice, el lector puede entrar en el estudio de estas cuestiones consultando los Elementos de Hamilton, que yo paso á exponer los principios del cálculo diferencial é integral de los cuaterniones.

(Se continuará.)