

CHAPA DE MADERA DE APOYOS DE CARRILES

El Ingeniero Conde G. Borine, Director de los ferrocarriles del Reggio Emilia, ha publicado recientemente un opúsculo, en el que poniendo en evidencia los inconvenientes que lleva consigo el contacto directo de la traviesa con el carril, ó la interposición de las placas de hierro homogéneo, preconiza el empleo de un nuevo tipo de chapa ideado por él mismo. La chapa propuesta se compone de dos partes: una tablita de madera y una armadura metálica que contiene á la primera. La tablita ha de ser de extremada dureza y duración, y para ella se indica el haya inyectada ó alguna de las especies más duras de los trópicos.

El autor hace notar que el oficio que desempeñan las placas de apoyo es el aumento de estabilidad de la vía y alargar la duración de las traviesas, acrecentando con su interposición la superficie comprimida por los carriles, y atribuye á la chapa de su invención las siguientes ventajas sobre las placas de asiento ordinarias:

1.^a El contacto entre la base del carril y la tablilla resulta preferible al de las dos superficies metálicas de carril y placa, por la mayor flexibilidad de la madera, sobre todo si se encuentra inyectada.

2.^a La superficie de apoyo por la que se comunica á la traviesa la presión del carril es de mayor extensión.

3.^a La elasticidad de la tablita neutraliza una parte de la compresión que los trenes transmiten á las traviesas en los sistemas ordinarios de vía.

4.^a Las condiciones de unión entre carriles y traviesas resultan mejoradas con el uso de las chapas armadas de referencia, para cuya fijación se puede economizar el gasto de tirafondos, siempre superior al de las escarpas corrientes.

5.^a Por todos los motivos enumerados, la duración de las traviesas es mayor, y aún apunta el autor, que, dada la íntima adaptación de la chapa y de la traviesa, la compresión de aquella transmite en parte á la segunda una parte del antiséptico de que la segunda está impregnada.

La Inspección oficial de ferrocarriles ha autorizado, desde principios de Julio último, la aplicación de este elemento en las líneas de los ferrocarriles que dirige el autor, en concepto de ensayo para estudiar sus efectos en la práctica.—O.

PUENTES COLGANTES EN LOS FERROCARRILES

El Ingeniero y constructor Mr. Arnodin publicó el año último en los *Anales de Puentes y Calzadas* una interesante nota acerca de la aplicación del sistema de puentes colgados en los claros de grandes luces salvados por las líneas de los ferrocarriles.

Principiando por exponer las ventajas de la suspensión en cables de alambre de acero, desde los puntos de vista de la economía, de la seguridad, de la duración y de la elegancia, describe en el citado trabajo las aplicaciones del sistema á las vías férreas, citando dos ejemplos en América; y respecto á Europa, el puente sobre el canal del Danubio en Viena.

Saliendo al paso de la única objeción que se podría hacer al sistema, que es la referente á la rigidez, indica para remediarla el empleo de la viga rígida, cuya acción limita las deformaciones á tal punto que no pueden perturbar en nada la circulación de los trenes de ferrocarril.

El autor sienta como resumen de su trabajo la conclusión de que en tales condiciones el puente colgado puede ser empleado tan útilmente en los caminos de hierro como en las carreteras.—L.

INTRODUCCIÓN

AL ESTUDIO DEL CÁLCULO DE CUATERNIONES

Y OTRAS ÁLGEBRAS ESPECIALES

POR

DON FRANCISCO PÉREZ DE MUÑOZ

Ingeniero de Caminos, Canales y Puertos.

(CONTINUACIÓN)

El versor i convierte α en β ; el j , β en γ y el k , γ en α . Uno cualquiera de ellos, el $\widehat{BC} = j$ por ejemplo, aplicado dos veces, una sobre $OB = \beta$ y otra sobre su producto $j \cdot \beta$ da:

$$OB' = -OB = (-1)\beta.$$

Luego (conf. 130, c) $j^2 = -1$. Análogamente: $i^2 = -1$ y $k^2 = -1$.

Si sobre el vector $OA = \alpha$ actuamos por multiplicación por medio del programa versorial $\widehat{AB} = i$ y sobre el resultado $i \cdot \alpha$ operamos otra vez por medio del versor $\widehat{BC} = j$ obtendremos el vector $OC = \gamma$, es decir, el mismo que hubiéramos obtenido operando sobre $OA = \alpha$ con el versor $\widehat{AC} = -\widehat{CA} = -k$ por medio de una sola multiplicación. Luego:

$$i \cdot k \alpha = -j \alpha \quad \text{ó sea:} \quad i \cdot k = -j$$

análogamente.

Pero si sobre $OC = \gamma$ hubiéramos operado por vía de multiplicación primero por medio de $i = \widehat{CB}$ y luego por medio de $k = \widehat{BO}$ sobre el resultado de la primera operación, hubiéramos obtenido: $k \cdot i \gamma = \alpha = j \cdot \gamma$; luego $k \cdot i = j$ y análogamente para los otros pares de productos.

En resumen:

$$\left. \begin{array}{l} i^2 = j^2 = k^2 = -1 \\ i j = -j i = k \\ j \cdot k = -k j = i \\ k \cdot i = -i k = j \end{array} \right\} (1)$$

cuadro exactamente igual al análogo del (130, c). La terna de versores cuadrantes goza, pues, de las mismas propiedades que la terna de vectores unidades trirectangulares.

El versor en general y el versor cuadrante en particular, es una entidad matemática que requiere tres números para su definición, es, pues, un verdadero vector en el sentido dado á esta voz en el capítulo I. Dijimos allí (103), que en el vector podía considerarse un programa rotacional, con tal que fuera idéntico para todos, y que el de translación podía mirarse como variable en ellos y proporcional á su intensidad; aquí nos encontramos con que el versor cuadrante y el vector unidad son, en cuanto operadores, una sola y misma cosa. También lo son en cuanto entidad matemática, luego son una sola cosa, y, por lo tanto, el doble simbolismo empleado para la terna de vectores unidades y para la de versores cuadrantes, puede reducirse á un simbolismo único, para el cual conservaremos i , j y k , que fué el empleado primeramente.

El cuaternión cuadrante difiere del versor cuadrante solamente en el factor escalar *tensor*, del mismo modo que el *vector* difiere del vector unidad solamente en la *intensidad*, que es también un factor escalar; pero si el versor cuadrante y el vector unidad son idénticos en esencia y propiedades, sus productos, por un escalar, deben necesariamente serlo también, luego el *vector*, *no unidad*, y el *cuaternión cuadrante*, *no versor puro*, son también la misma entidad matemática. Luego *todo vector es un cuaternión cuadrante cuyo tensor es su intensidad*. Véase por qué

el programa operatorio rotacional del vector es una rotación igual á $\frac{\pi}{2}$, la misma para todos los vectores.

Conviene recordar que los principios y propiedades de la terna trirrectangular de vectores unidades fueron establecidos con completa independencia de toda noción de cuaternión y ni aun de versor. Hemos venido á parar, pues, á un mismo resultado, á unos mismos operadores y leyes de operaciones por medio de conceptos distintos; esto prueba la perfecta naturalidad dentro de la aparente complicación de las leyes de este cálculo.

En la técnica de un álgebra cualquiera, tiene más importancia la entidad matemática como operador que como operado, así que el concepto de tensor predomina en este cálculo sobre el de intensidad y lo absorbe por completo. Por lo tanto, sabiendo lo que hacemos, no hay inconveniente ninguno en designar las intensidades con el símbolo T de los tensores. Si α es un vector, es al mismo tiempo un cuaternión cuadrante, y como tal, expresable así: $T\alpha \cdot U\alpha$, que puede traducirse de estas dos maneras:

$$\begin{array}{ll} \text{Tensor de } \alpha & \times \text{ Versor de } \alpha \\ \text{Intensidad de } \alpha & \times \text{ Unidad de } \alpha \end{array}$$

bien entendido que el versor es cuadrante.

Este es, y sentimos no haberlo expuesto aun con más claridad, uno de los rasgos característicos, al mismo tiempo que uno de los que fueron más criticados cuando apareció este álgebra del cálculo de los cuaterniones; la identificación del versor cuadrante y el versor unidad, y sin embargo no hay nada más natural y que, como tal, pidan más la naturaleza de las entidades geométricas y la sencillez de las leyes formales.

Una sencilla mención de algún principio del álgebra vectorial de Gybbbs nos lo hará ver más adelante.

146. Consecuencia importante de esto y de los conceptos de cuaternión inverso y cuaternión conjugado es que: *a*) el inverso de un vector es otro vector paralelo, de signo contrario y de tensor numéricamente inverso del de el vector primitivo, *b*) el conjugado de un vector es un vector paralelo al dado, de signo contrario y de tensor igual al tensor del vector primero.

147. Conviene, antes de seguir adelante, demostrar que el conjugado de un producto de dos cuaterniones es igual al producto de los conjugados de los factores y que el conjugado de una suma de dos cuaterniones es igual á la suma de los conjugados de ambos sumandos. El concepto de cuaternión conjugado, ya hemos dicho (138) que si bien de escasa importancia científica es de gran importancia técnica, en la especial de este cálculo.

Lo segundo es inmediato; el cuaternión suma de los cuaterniones directos tiene su escalar, suma de los escalares y su vector suma de los vectores de los dos sumandos; por otra parte, el cuaternión suma de los dos conjugados tiene su escalar suma de los escalares de los dos sumandos y como cada sumando es igual á cada uno de los de la suma anterior, la suma será forzosamente igual puesto que la suma de escalares es una operación unívoca ó de interpretación única. El vector de la suma será suma de los dos vectores de los cuaterniones conjugados y como cada uno de éstos es de sentido (ó signo) contrario al correspondiente de los cuaterniones directos, la suma será también de signo contrario á la suma de vectores de los cuaterniones directos. Tenemos pues dos sumas, una de los dos cuaterniones directos, otra de los dos conjugados; la primera tiene su escalar igual al de la segunda, la segunda tiene su vector de signo contrario al de la primera, luego la segunda es un cuaternión conjugado del cuaternión primero suma de los dos directos. Por lo tanto, el conjugado de una suma es la suma de los conjugados de los sumandos.

Esta propiedad es cierta para cualquier número de sumandos, como es fácil asegurarse de ello.

La operación de tomar el conjugado de un cuaternión, operación que hemos simbolizado con la letra K , puede considerarse

como una operación llevada á cabo sobre el cuaternión q por medio del programa K , y como este programa es definible con entera independencia de la entidad operada, la operación es una verdadera multiplicación (22 y 24) entrando en la clase de las multiplicaciones lógicas. Su simbolismo está expresado por la fórmula:

$$K(q + q') = Kq + Kq' \quad (1)$$

La multiplicación por K es pues distributiva con respecto á la suma de cuaterniones.

Para demostrar igual propiedad con respecto á la multiplicación de los mismos, volvamos atrás á nuestra figura 15 y examinemos lo que es el producto de dos cuaterniones y el de sus conjugados, pero considerando á cada uno no como una suma de su escalar y de su vector, sino como un producto de su tensor por su versor. Los tensores de dos cuaterniones conjugados son iguales; los versores son de sentidos contrarios (138). Sabemos también que el tensor de un producto es el producto de los tensores (139). Prescindiendo de los tensores, puros factores numéricos del género escalar, tendremos que:

$$\overline{AC} = K.q \quad \overline{CB} = Kq' \quad \text{y} \quad \overline{AB} = K.qq'$$

Pero al mismo tiempo $\overline{AB}$ es el versor resultante de $\overline{AC}$ y $\overline{CB}$, es por lo tanto el producto por $\overline{AC}$ de $\overline{CB}$, ó sea de $Kq.Kq'$, luego podemos escribir:

$$Kq.q' = Kq.Kq' \quad (2)$$

La multiplicación por K es pues distributiva con respecto á la multiplicación de cuaterniones.

148. Veamos como última propiedad del producto de dos cuaterniones, si la multiplicación de ellos es distributiva con respecto á la suma, ó sea si es cierta é idéntica, ó no, una igualdad tal como:

$$(p + q)(r + s) = pr + ps + qr + qs$$

siendo en ella p, q, r y s cuaterniones cualesquiera y pudiéndose conmutar en el segundo miembro, todos los sumandos entre sí, pero de ningún modo los factores que entran en cada producto de él, de tal modo que el segundo miembro no será en general igual á: $(r + s)(p + q)$ pero sí lo será á: $(q + p)(s + r)$. Esto último es evidente porque siendo la suma de cuaterniones conmutativa, $(p + q)$ y $(q + p)$ son idénticamente equivalentes y por lo tanto (46 y 47) pueden sustituirse uno por otro siempre que se quiera en el curso de una misma álgebra.

Examinemos primeramente si la igualdad que deseamos demostrar es cierta para el caso particular de cuaterniones con escalares nulos ó sea de vectores. La igualdad (3) del (143) ya demostrada, nos lo asegura, pues si:

$$\frac{\beta}{\alpha} + \frac{\gamma}{\alpha} = \frac{\beta + \gamma}{\alpha}$$

podemos escribir:

$$\beta\alpha^{-1} + \gamma\alpha^{-1} = (\beta + \gamma)\alpha^{-1}$$

y como α^{-1} , inverso de un vector, es (146) otro vector, α^{-1} puede reemplazarse por el signo de un vector, que como puede ser cualquiera no hay inconveniente en representar por la misma letra α ; luego:

$$\beta\alpha + \gamma\alpha = (\beta + \gamma)\alpha \quad (1)$$

Si ahora α fuese igual á $\lambda + \mu$ reemplazando α por su equivalente $\lambda + \mu$ en ambos miembros, escribiendo la igualdad en sentido inverso y aplicando la propiedad distributiva expresada en la igualdad (1) al segundo miembro se tendrá:

$$\begin{aligned} (\beta + \gamma)\alpha &= (\beta + \gamma)(\lambda + \mu) = \beta\alpha + \gamma\alpha = \beta(\lambda + \mu) \\ &+ \gamma(\lambda + \mu) = \beta\lambda + \beta\mu + \gamma\lambda + \gamma\mu \end{aligned} \quad (2)$$

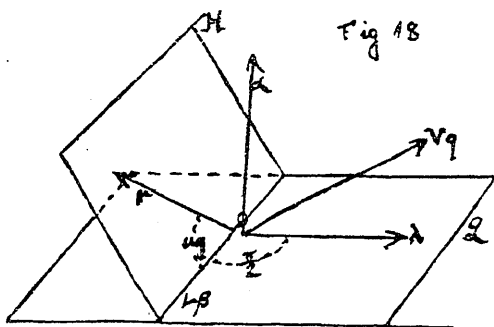
No estará de más una ligera explicación para comprender el paso del cuarto al quinto miembro de la serie de igualdades anterior. La igualdad (1) nos autoriza á hacer la multiplicación distributiva con respecto al multiplicador pero no con respecto al multiplicando; sin embargo, el cambio de papeles entre multiplicando y multiplicador, sabemos que produce en el producto sólo un cambio de signo en su parte vectorial, y como este cambio de signo tiene lugar en ambos miembros cuarto y quinto la igualdad es cierta.

Por último, si a es un escalar, α un vector y q un cuaternión, vamos á demostrar que:

$$(a + \alpha) q = a q + \alpha q$$

de la cual se deduce inmediatamente la propiedad general:

Sea ahora Q el plano del cuaternión q (fig. 18) y sea β un vector paralelo á la intersección del plano Q con un plano H



perpendicular á α . Puesto que α y β son perpendiculares, su producto será perpendicular á ambos, sea $\lambda = \alpha \beta$ y por tanto:

$\alpha = \frac{\lambda}{\beta}$. Sea también μ un nuevo vector en el plano Q , tal, que operado por q nos produzca β ó sea que $q = \frac{\beta}{\mu}$. Como además

$a = \frac{a\beta}{\beta}$ podemos escribir:

$$\begin{aligned} (a + \alpha) q &= \left(\frac{a\beta}{\beta} + \frac{\lambda}{\beta} \right) q = \frac{a\beta + \lambda}{\beta} \cdot \frac{\beta}{\mu} = \frac{a\beta + \lambda}{\mu} \\ &= a \frac{\beta}{\mu} + \frac{\lambda}{\mu} = a \frac{\beta}{\mu} + \frac{\lambda}{\beta} \cdot \frac{\beta}{\mu} = a q + \alpha q \end{aligned} \quad (3)$$

Serie de igualdades que, deducidas unas de otras según los principios que hemos venido estableciendo, nos demuestran lo que deseábamos.

De aquí al caso general no hay más que un paso, pues descomponiendo el cuaternión q en suma de escalar más vector y aplicando al último miembro de la (3) el principio por ella misma demostrado y el cual presenta en él solamente en casos particulares, podremos escribir inmediatamente:

$$\begin{aligned} (a + \alpha) (\beta + \beta) &= (a + \alpha) q = a q + \alpha q = a (\beta + \beta) + \alpha (\beta + \beta) \\ &= a \beta + a \beta + \alpha \beta + \alpha \beta \end{aligned} \quad (4)$$

serie de igualdades en cuyo último miembro no ha habido inconveniente en permutar los factores escalares con los vectores en los productos binarios que en él se encuentran, colocando á los escalares como coeficientes de los vectores, pues según hemos visto ya, afectan los tales factores solamente á su intensidad ó, como llamamos ya á esta en este cálculo (145), á su tensor. Si los escalares a y b y los vectores α y β que entran en las igualdades anteriores, los descomponemos en sumas:

$$a_1 + a_2; \quad b_1 + b_2; \quad \alpha_1 + \alpha_2; \quad \beta_1 + \beta_2$$

podremos escribir la serie de igualdades que siguen, que son la demostración del principio distributivo, en su forma más general.

$$\begin{aligned} [(a_1 + a_2) + (\alpha_1 + \alpha_2)] [(b_1 + b_2) + (\beta_1 + \beta_2)] &= (a_1 + a_2) (b_1 + b_2) \\ &+ (a_1 + a_2) (\beta_1 + \beta_2) + (\alpha_1 + \alpha_2) (b_1 + b_2) + (\alpha_1 + \alpha_2) (\beta_1 + \beta_2) \\ &= (a_1 b_1 + a_1 b_2 + a_2 b_1 + a_2 b_2) + (a_1 \beta_1 + a_1 \beta_2 + a_2 \beta_1 + a_2 \beta_2) \\ &+ (b_1 \alpha_1 + b_2 \alpha_1 + b_1 \alpha_2 + b_2 \alpha_2) + (\alpha_1 \beta_1 + \alpha_1 \beta_2 + \alpha_2 \beta_1 + \alpha_2 \beta_2) \\ &= [(a_1 + \alpha_1) b_1 + (a_1 + \alpha_1) \beta_1] + [(a_1 + \alpha_1) b_2 + (a_1 + \alpha_1) \beta_2] \\ &+ [(a_2 + \alpha_2) b_1 + (a_2 + \alpha_2) \beta_1] + [(a_2 + \alpha_2) b_2 + (a_2 + \alpha_2) \beta_2] \\ &= (a_1 + \alpha_1) (b_1 + \beta_1) + (a_1 + \alpha_1) (b_2 + \beta_2) + (a_2 + \alpha_2) (b_1 + \beta_1) \\ &+ (a_2 + \alpha_2) (b_2 + \beta_2) \end{aligned}$$

ó sea representando por p, q, r y s á cada uno de los cuaterniones:

$$a_1 + \alpha_1; a_2 + \alpha_2; b_1 + \beta_1; y b_2 + \beta_2$$

tendremos:

$$(p + q) (r + s) = p r + p s + q r + q s \quad (5)$$

Q. E. D.

Esta demostración es de Tait y ha sido la elegida á causa de estar fundada solamente en los principios del álgebra cuyas reglas operatorias estamos estableciendo y en la medida que hasta el presente han sido establecidos poniendo bien claro y bien de manifiesto sus leyes formales. No da este autor ni importancia ni preferencia á esta demostración, y la presenta como accidental después de haber demostrado el principio distributivo por medio de las propiedades de las cónicas esféricas, demostración esta última que como geométrica, entra por los ojos, pero que lleva la mente muy lejos del cálculo cuaterniónico. Por el contrario, una bonita aplicación del cálculo este sería el, apoyándose en la última igualdad (5) y en la que demostraremos en seguida relativa á la propiedad asociativa de la multiplicación, hallar y demostrar las propiedades de las cónicas esféricas presueltas en las demostraciones de Tait,

148. Las leyes que rigen la multiplicación de dos cuaterniones, pueden hacerse extensivas á productos de más de dos factores de un modo análogo á como en álgebra ordinaria se hace con los productos de números. Si $q_1; q_2; q_3 \dots$ son cuaterniones, su producto: $q = q_1 \cdot q_2 \cdot q_3 \dots q_{n-1} \cdot q_n$ será aquel cuaternión que resulte multiplicado: q_n multiplicando, por q_{n-1} multiplicador, el producto que resulte, que sabemos es un nuevo cuaternión, y por eso esta álgebra es lineal, considerado como multiplicando, se multiplica por q_{n-2} y así sucesivamente hasta multiplicar por q_1 el penúltimo resultado.

Desde luego, y como primera ley de multiplicación de varios factores cuaterniones, diremos que, no siendo en general equivalentes los productos $q_{n-1} \cdot q_n$ y $q_n \cdot q_{n-1}$, el orden en que aparezcan los factores debe respetarse estrictamente, porque la multiplicación del producto que se haya obtenido hasta llega al factor q_{n-2} , al multiplicarlo por q_{n-1} , nos dará un cierto producto, y uno nuevo al multiplicarlo en seguida por q_n , mientras que aquel mismo producto, multiplicado por q_n , nos dará un producto distinto, y luego, al multiplicar éste por q_{n-1} , no tenemos propiedad ninguna conocida que ni siquiera nos induzca á sospechar que se reproduzca el producto anterior. Hemos, pues, de ir haciendo las multiplicaciones en el orden en que se nos presenten todos los factores de derecha á izquierda, considerando al de la extrema derecha como multiplicando, y al inmediato á la izquierda como multiplicador; este producto debe ser en seguida multiplicado por el inmediato factor de la izquierda, el producto obtenido por el inmediato siguiente de la izquierda también, y así sucesivamente hasta agotar el número de factores que nos hayan presentado.

Con objeto de simplificar la operación en algunos casos particulares ó de distribuir el trabajo entre varios individuos, en el caso de ser muchos los factores, conviene saber antes que nada si la operación es asociativa, es decir, si pueden escogerse grupos de factores y hacer con ellos las multiplicaciones, dejando

el producto parcial en el lugar mismo en que estaba en el producto total y hacer luego los productos de estos productos parciales obtenidos con determinado número de factores cada uno. Puede hacerse esto, y para probarlo, sean q , q' y q'' tres cuaterniones; y vamos a hallar el producto: $q \cdot q' \cdot q''$ y además los $q \cdot q'$, $q' \cdot q''$ y $q \cdot q''$; y veamos si son iguales. Desde luego, los dos primeros sí lo son, porque el primero, $q \cdot q'$, quiere decir que a q'' hay que multiplicarlo por q' , y al producto así obtenido, por q ; y el segundo quiere decir lo mismo, puesto que en él se agrupan los dos factores q'' con q' , que necesariamente quedan agrupados según el orden mismo en que se lleva la operación. No así el tercer producto, porque en él se indica que a q'' hay

que multiplicarlo por producto, previamente formado, de q' por q , cosa distinta de la expresada antes, y que puede conducir a resultado distinto. La demostración analítica más sencilla, consiste en expresar cada uno de los factores en función de sus cuatro números explícitamente y hacer las multiplicaciones de unos por otros, según las reglas de multiplicación de los productos de dos factores; sean, pues,

$$q = w + xi + yj + zk; \quad q' = w' + x'i + y'j' + z'k'; \\ q'' = w'' + x''i + y''j'' + z''k''.$$

El producto de q'' por q' es

$$\begin{array}{c} w'' + x''i + y''j'' + z''k'' \\ w' + x'i + y'j' + z'k' \\ \hline \begin{array}{cccc|cccc|cccc} w'w'' & + & w'x'' & i & + & w'y'' & j & + & w'z'' & k & + & 0 & i & j & + & 0 & j & k & + & 0 & k & i \\ - & x'x'' & + & x'y'' & i & + & x'z'' & j & + & x'w'' & k & + & x'y'' & - & x'z'' & + & y'y'' & - & y'z'' & + & y'w'' & - & z'y'' \\ - & y'y'' & + & y'z'' & i & + & y'w'' & j & + & y'x'' & k & + & y'x'' & - & y'z'' & + & z'y'' & - & z'w'' & + & z'x'' & - & z'y'' \\ - & z'z'' & + & z'w'' & i & + & z'x'' & j & + & z'y'' & k & + & z'y'' & - & z'w'' & + & z'x'' & - & z'y'' & + & z'w'' & - & z'x'' \end{array} \end{array}$$

producto en el cual se han tenido en cuenta todas las propiedades de la terna de vectores trirrectangulares unidades i , j y k .

Para multiplicar este producto por el otro factor, esto es, por q , escribámoslo y dispongamos la operación como sigue:

$$\text{Multiplicando} = q'q'' = \begin{vmatrix} w'w'' & + & w'x'' & i & + & w'y'' & j & + & w'z'' & k \\ - & x'x'' & + & x'y'' & i & + & x'z'' & j & + & x'w'' & k \\ - & y'y'' & + & y'z'' & i & + & y'w'' & j & + & y'x'' & k \\ - & z'z'' & + & z'w'' & i & + & z'x'' & j & + & z'y'' & k \end{vmatrix} \cdot k \quad (1)$$

$$\text{Multiplicador} = w + xi + yj + zk.$$

$$q'q'q'' = \begin{vmatrix} w'w'' & + & w'x'' & i & + & w'y'' & j & + & w'z'' & k \\ - & x'x'' & + & x'y'' & i & + & x'z'' & j & + & x'w'' & k \\ - & y'y'' & + & y'z'' & i & + & y'w'' & j & + & y'x'' & k \\ - & z'z'' & + & z'w'' & i & + & z'x'' & j & + & z'y'' & k \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} w & + & x & i & + & y & j & + & z & k \\ - & x & + & y & i & + & z & j & + & w & k \\ - & y & + & z & i & + & w & j & + & x & k \\ - & z & + & w & i & + & x & j & + & y & k \end{vmatrix} \quad (2)$$

Este producto, cuya formación habrá hecho recordar al lector la teoría de las matrices, está constituido por todas las letras que en él entran, de manera que pueden permutarse los acentos de ellas sin que sufran alteración los coeficientes de los términos, vectores y escalar. Luego si hubiéramos multiplicado primero q' por q y después a q'' por aquel producto el resultado será tal que pueda deducirse del (2) con sólo permutar los acentos convenientemente, lo cual no altera en nada los coeficientes en cuanto son combinaciones de letras. Tampoco altera los signos de cada producto de letras (las cuales son símbolos del álgebra ordinaria) porque los signos están dados por los productos de i , j y k unos por otros y por sí mismos, y estos signos no se alteran mientras el orden en que se hace la multiplicación de unos por otros no se cambie y este orden es el mismo en la multiplicación $q'q'q''$ que en la $q'q' \cdot q''$. El producto, por lo tanto debe permanecer invariable, luego:

$$q'q'q'' = q'q' \cdot q'' \quad (3).$$

La multiplicación de cuaterniones es, pues, asociativa para tres factores y fácilmente se generaliza la ley para cualquier número de ellos.

149. El método desarrollado en la demostración anterior, es sólo un ejemplo del método puramente analítico en el cálculo de los cuaterniones, con ayuda del cual pueden demostrarse con mucha facilidad sinnúmero de teoremas.

a) Por ejemplo: si hallamos el producto $q \cdot q'$ y lo comparamos con el $q' \cdot q$ veremos inmediatamente que sus escalares son

idénticos pero que las tres componentes según i , j y k del vector del uno son iguales y de signos contrarios a los del otro y sucede lo mismo con su suma, el vector del cuaternión; luego ambos cuaterniones $q'q'$ y $q'q$ son conjugados, luego:

$$q'q = \bar{K} \cdot q'q' \quad (1)$$

propiedad de la cual es un caso particular la demostrada en el (130, b), para vectores.

Como consecuencia:

$$q'q' + q'q = q'q' + Kq'q' = 2S \cdot q'q' \quad (2)$$

$$q'q' - q'q = q'q' - Kq'q' = 2V \cdot q'q' \quad (3).$$

b) Sabemos por la (1) del 130 que:

$$q \cdot Kq = (Tq)^2$$

Si $q = w + xi + yj + zk$; $Kq = w - xi - yj - zk$

$$q \cdot Kq = Tq^2 = w^2 + x^2 + y^2 + z^2$$

$$Tq = \sqrt{w^2 + x^2 + y^2 + z^2} \quad (4)$$

$$\text{y por tanto } Uq = \frac{q}{Tq} = \frac{w + xi + yj + zk}{\sqrt{w^2 + x^2 + y^2 + z^2}} \quad (5).$$

Suele llamarse *norma* al cuadrado del tensor $(Tq)^2$ y suele indicársela por la mayúscula N . Luego:

$$Nq = w^2 + x^2 + y^2 + z^2 \quad (6).$$

Un cuaternión real, ó sea de aquéllos en los cuáles w, x, y, z son números reales, será nulo cuando, y solamente cuando, lo sean su tensor ó su norma.

c) La fórmula $q \cdot Kq = (Tq)^2$ suele escribirse en algunos casos así: $q \cdot q = Nq$, donde q es otro modo de escribir Kq . De cualquier manera que se escriba, si multiplicamos ambos miembros por q^{-1} , tendremos:

$$q^{-1} \cdot q \cdot Kq = q^{-1} Nq,$$

y reduciendo y dividiendo nuevamente por el escalar Nq ,

$$\frac{Kq}{Nq} = q^{-1}, \quad (7)$$

fórmula importante y de frecuente uso.

d) Si $q = w + xi + yj + zk$ y $q' = w' + x'i + y'j + z'k$, el productor $q \cdot q'$ hemos hallado que es:

$$q \cdot q' = ww' - xx' - yy' - zz' + (wx' + xw' + yz' - zy')i + (wy' + yw' + zx' - xz')j + (wz' + zw' + xy' - yx')k.$$

Si calculamos la norma de este producto ó su tensor, que para el caso es lo mismo, nos encontraremos después de hacer reducciones con:

$$Nq \cdot q' = (Tq \cdot q')^2 = (w^2 + x^2 + y^2 + z^2) (w'^2 + x'^2 + y'^2 + z'^2) = Nq \cdot Nq' \quad (8)$$

e) En el cuaternion $q = w + xi + yj + zk$, se tiene según las notaciones empleadas:

$$Sq = w \quad Vq = xi + yj + zk$$

y también:

$$T \cdot Vq = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad U \cdot Vq = \frac{xi + yj + zk}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \quad (9) \text{ y } (10)$$

fórmula esta última en la cual debe recordarse que el símbolo U denota el versor del vector Vq , y por lo tanto un versor cuadrante, y también la unidad del vector Vq .

f) El cociente de dos cuaterniones tal como se ha definido en el (144); $\frac{q}{q'} = q \cdot q'^{-1}$ es un nuevo cuaternion, cuyos cuatro números podemos hallar facilmente empleando la notación que venimos usando en este párrafo. Sea:

$$\frac{q}{q'} = \omega + \xi i + \eta j + \zeta k$$

el cuaternion desconocido. Multiplicando q' por ambos miembros y suponiendo que q y q' son los mismos que en el apartado (d) de este párrafo:

$$\begin{aligned} q &= w + xi + yj + zk = \\ &= (\omega + \xi i + \eta j + \zeta k) (w' + x'i + y'j + z'k) = \\ &= (\omega w' - \xi x' - \eta y' - \zeta z') + (\omega x' + \xi w' + \eta z' - \zeta y')i + \\ &\quad + (\omega y' + \eta w' - \xi z' + \zeta x')j + \\ &\quad + (\omega z' + \zeta w' + \xi y' - \eta x')k \end{aligned}$$

identificando ambos miembros, parte escalar con parte escalar y partes vectoriales paralelas unas con otras, nos encontramos con un sistema de cuatro ecuaciones entre escalares, por medio de las cuales podemos determinar las cuatro incógnitas ω, ξ, η, ζ . Es-

tas ecuaciones, de primer grado, tienen un determinante cuya matriz

$$\begin{vmatrix} w' & -x' & -y' & -z' \\ x' & w' & z' & -y' \\ y' & -z' & w' & x' \\ z' & y' & -x' & w' \end{vmatrix}$$

es pseudosimétrica teniendo al mismo tiempo iguales todos los elementos de la diagonal principal. En el caso de que los cuaterniones degeneren en vectores puros, los elementos de la diagonal serán ceros y la matriz será hemisimétrica. En ambos casos es desarrollable en suma de cuadrados, lo cual da lugar á importantes desarrollos debidos á Cayley y Sylvester el entrar en los cuales nos llevaría mucho más lejos de nuestro propósito.

150. Dijimos (145) que una comparación de los principios de este cálculo con los del álgebra vectorial de Gybbs, nos haría ver la superioridad del de cuaterniones sobre aquél. Si á los símbolos i, j, k se les hace, más ó menos arbitrariamente, obedecer á las leyes:

$$i^2 = j^2 = k^2 = +1; jk = i; ki = j; ij = k; kj = -i; ik = -j; ji = -k$$

entonces la multiplicación no es asociativa sino *disociativa*, porque:

$$i \cdot ij = i \cdot k = -j \text{ mientras que: } i \cdot ij = i^2 \cdot j = j$$

y la multiplicación es innecesariamente más complicada que en el cálculo de cuaterniones, á pesar de lo cual afirman sus autores que uno de sus principales objetos al establecerla ha sido el evitar las dificultades intrínsecas al cálculo de cuaterniones. No lo entiendo.

151. Antes de dejar estos principios de las cuatro reglas de este cálculo, conviene decir algo sobre las potencias de cuaterniones y vectores. El producto de dos cuaterniones iguales $q \cdot q$ se denomina como en álgebra ordinaria el cuadrado de q y lo denotaremos por q^2 y análogamente el cubo, cuarta potencia, etcétera. Pero $q = Tq \cdot Uq$ de manera que: $q^2 = (Tq \cdot Uq)^2 = Tq \cdot Uq \cdot Tq \cdot Uq$; pero Tq es un factor escalar y como tal puede permutarse con otro cualquiera, luego:

$$q^2 = (Tq)^2 \cdot (Uq)^2$$

representando por $(Uq)^2$ la repetición dos veces sobre una misma entidad matemática (vector ó cuaternión) del operador Uq . En general, $q^n = (Tq)^n (Uq)^n$ será la expresión de la potencia enésima de q . En esta expresión entendemos que el tensor del cuaternión potencia es la enésima potencia del tensor del cuaternión base y que el versor es tal que hace de una sola vez un giro igual á *ene* giros iguales al que hace el versor Uq en el mismo plano en que cada uno de estos giros se lleve á cabo. La analogía entre esto y la fórmula de Moivre es patente.

Si el exponente n fuese negativo ó fraccionario ó aun inconmensurable, la interpretación de la potencia del cuaternión sería la misma; solamente si n fuese imaginario habría que buscar á dicha potencia nueva interpretación.

Si q es un cuaternión cualquiera y α un vector perpendicular á su plano, sera posible siempre elegir un número n tal que la

magnitud angular del versor de q , Uq , sea *ene* veces $\frac{\pi}{2}$, ver-

sor de α , y al mismo tiempo podemos elegir la intensidad ó tensor de α , $T\alpha$, de manera que $(T\alpha)^n = Tq$, ecuación puramente aritmética esta última; luego un cuaternión cualquiera puede ser representado por una potencia apropiada de un vector cuya dirección sea perpendicular al plano del cuaternión, el índice de

la potencia, la relación de $Ang. Uq$ á $\frac{\pi}{2}$, y el tensor del vec-

tor, $\sqrt[n]{Tq} \cdot \alpha^n$ puede ser pues un cuaternión cualquiera, el exponente es el cuarto dato numérico que nos hacía falta para que

el vector nos representase el programa de operación que deseábamos nos representase en (103). La ecuación cuaterniónica:

$$q = a^n$$

es susceptible de solución, siendo n la incógnita, en términos reales para dicha incógnita.

152. Así como hasta ahora hemos considerado las operaciones entre las entidades matemáticas que manejamos en este cálculo, así podemos ahora considerar operaciones entre las entidades lógicas que hemos definido, principalmente entre los símbolos de operaciones que no han sido siempre entidades matemáticas. Las cinco operaciones de tomar el escalar, el vector, el conjugado, el tensor y el versor de un cuaternión, son verdaderas multiplicaciones lógicas de la especie definida en (24) y pueden llevarse a cabo dos ó más sobre un mismo cuaternión sucesivamente, directamente sobre él la primera y sobre los resultados de las operaciones anteriores las sucesivas. Pero un grupo de ellas podría ser quizás sustituido por una operación única cuyo programa será el producto de los programas de las operaciones aisladas. El símbolo de cualquier grupo de operaciones podrá ser ó no el de alguna de ellas ó de las restantes, ó, por el contrario, podrá ser distinto, pero en este caso se emplea la combinación de ellos sin introducir más símbolos de nuevas operaciones. Así, por ejemplo, tomar el vector de q y luego el escalar del resultado, da uno evidentemente nulo, luego el símbolo del elemento nulo, 0, es el único adecuado para representar el producto de las dos operaciones S . V . Tomar el conjugado de q y luego el conjugado del resultado es lo mismo que no hacer operación ninguna sobre q y el producto K . K = K^2 estará adecuadamente simbolizado por la unidad. Si del cuaternión q tomamos el vector y del resultado el conjugado, obtendremos como resultado el vector de q con signo contrario, luego el producto de K . V = $-V$. Así podremos multiplicar los ejemplos que en resumen presentamos en forma de tabla de doble entrada estando en ella los multiplicadores en las líneas y los multiplicandos en las columnas de manera que la primera operación que se lleve a cabo, la que recae sobre el cuaternión, base de operaciones, es la indicada en la columna y la que se hace sobre el resultado de la operación anterior, es la indicada en la línea. Como los tres símbolos de los vectores unidades, son muy empleados en este cálculo y como sus operaciones son asociativas, unimos á los cinco símbolos S , V , K , T y U , los tres i , j y h , formando así la siguiente tabla:

MULTIPLICANDO

	i	j	h	S	V	K	T	U
i	-1	h	$-j$	iS	iV	iK	iT	iU
j	$-h$	-1	i	jS	jV	jK	jT	jU
h	j	$-i$	-1	hS	hV	hK	hT	hU
S	Si	Sj	Sh	S	O	S	T	SU
V	Vi	Vj	Vh	O	V	$-V$	O	VU
K	Ki	Kj	Kh	S	$-V$	1	T	KU
T	T	T	T	hS	TV	T	T	U
U	Ui	Uj	Uh	U	UV	UK	U	U

Las particularidades de esta tabla debe verlas y examinarlas por sí el lector, considerando uno á uno todos los productos de ella. Sólo hará notar, el que esto escribe, la concordancia que existe entre el producto T . S y lo dicho en los números (35) y (83), pues los dos conceptos de escalar y tensor presentan al número como procedentes de operaciones de tal naturaleza, que el primero nos lo presenta desnaturalizado, en cierto modo, por el signo, mientras que el segundo nos lo presenta en toda su pureza, y por eso al multiplicar por el tensor, por el símbolo del número en toda su pureza, al escalar, número en cuarentena, hay que reintegrarle su patente limpia, como se hace mediante el signo $\pm$ del cual se debe tomar el mismo que afecte al escalar para que si es positivo lo deje como está, y si es negativo lo haga positivo, ó por mejor decir neutro. Los demás productos de la anterior tabla no ofrecerán dificultad ninguna al lector.

153. No dejaremos estas cuatro reglas del cálculo de cuaterniones sin insistir sobre la expresión:

$$q = w + xi + yj + zk \quad (1)$$

fundamental en la teoría analítica de este cálculo. El parámetro w es, según sabemos, un número escalar del álgebra ordinaria, y como tal, provisto de su signo. La suma de los otros tres términos es un vector cualquiera, en todo conforme al concepto que de esta entidad matemática nos hemos formado en los párrafos del 89 al 96. Pero ya advertimos (92), que cuanto allí se decía, se refería al espacio euclideo de tres dimensiones, pero que el concepto de vector era capaz de generalización al espacio, euclideo ó no, de cualquier número de dimensiones, ó sea, era capaz de ser incluido en una concepción generalizada del espacio. Si así lo hiciéramos, nos encontraríamos con que el vector necesitaría de tantos datos numéricos cuantas fuesen las dimensiones del espacio en que estuviese sumergido, ó si se quiere, podríamos decir que entenderíamos por vector aquella entidad matemática definible por datos numéricos en número igual al de dimensiones del espacio en consideración y que fuese proyectivo sobre la recta de aquel espacio, ó si se quiere, sobre el lugar determinado por la relación cualitativa de dos puntos de dicho espacio. En este caso la expresión de un vector sería de la forma:

$$a = x_1 i_1 + x_2 i_2 + \dots + x_n i_n$$

y del ene-mas-uno-ion de la:

$$q = w1 + x_1 i_1 + x_2 i_2 + \dots + x_n i_n \quad (2)$$

sería pues una suma (26) de productos de números; $w; x_1; x_2; \dots x_n$ por unidades $1; i_1; i_2; \dots i_n$. Los números reales ó imaginarios obedecen á las leyes del álgebra ordinaria, mas no así las unidades, de las que solamente la *vez*, 1, pertenece al dominio de aquella ciencia, las cuales obedecerán á leyes de operaciones y combinaciones de unas con otras y unas sobre otras, especiales y exclusivas, no sólo del espacio en cuestión, sino, en cierta medida, también del arbitrio ó intento particular de quien esté estableciendo los principios de tal álgebra. Así vemos, que en el espacio objeto de nuestra experiencia diaria, podemos hacer: $i^2 = j^2 = k^2 = -1$, etc., etc. (cálculo de cuaterniones), ó $i^2 = j^2 = k^2 = 1$, etc., etc. (análisis vectorial de Gybbs). De cualquier manera que se establezcan los principios de cálculos de esta naturaleza, denominaremos ordinarios á los números del álgebra ordinaria, y extraordinarios á las unidades especiales del álgebra que se estudie, y que obedecerá á leyes particulares, mucho, poco ó nada, semejantes á las del álgebra ordinaria.

(Se continuará.)