

los ejercicios prácticos propuestos en los exámenes de Geometría elemental de la Escuela de Caminos, ha figurado el mismo problema, y casi todos los alumnos lo han resuelto bien.

Con la narración de estos hechos, no pretendo molestar á los Doctores en ciencias matemáticas; porque ellos van por un camino y los Ingenieros por otro. En éste, como decía muy bien el señor Inchaurrendieta, hay virtualmente una declaración grabada que dice: que no pasa por él, quien no domine los problemas elementales sin preocupación ni fatiga; y en el de los doctores en ciencia: que no podrá seguirlo el que no tenga por lo menos noticia de la existencia de todas las teorías matemáticas. Por eso los programas de éstos, tienen mucha más extensión que los de aquéllos; pero lo que ganan en extensión, lo pierden en profundidad, por ley ineludible. Los Ingenieros deben estudiar los conocimientos matemáticos que les sean necesarios para aplicarlos en su profesión; los que si no son muchos, en cambio han querido con excelente criterio, que se sepan muy bien.

Para hacer resaltar esas diferencias, me fijé en el programa del Sr. Octavio de Toledo, del que no pensé hacer una crítica; aunque tal vez, contra mi voluntad, resultara ésta, al decir, que en un curso que se da á continuación del bachillerato, no se debe iniciar á los alumnos en teorías que no pueden entender. ¿Cómo se arregla, por ejemplo, el Sr. Octavio de Toledo, para explicar á sus alumnos las teorías de Cantor sobre conjuntos y clases? Si se limita á dar cuatro definiciones, que se las aprenden de memoria, nada consiue; pues hay como esta ciertas cuestiones matemáticas, que para que la inteligencia las asimile, es menester prepararla con estudios muy variados y profundos, porque suelen ser como el resumen de todos ellos, y aunque vengan á completar ideas tan primordiales como son en dicha ciencia las definiciones de los números, no pueden entenderse la primera vez que se estudia la Aritmética. Bien están esas teorías en la introducción del admirable curso de cálculo de Jordán, y en la menos notable Algebra superior de Weber; pero no en un programa de primer curso de Análisis matemático, con la preparación de los Institutos.

Respecto al símbolo n° , veo que el Sr. Octavio de Toledo se limita también á dar algunas definiciones, cuya utilidad me parece dudosa; pero al pedir su *explicación detallada*, nada de extraño tiene que yo creyese que se trataba de dar idea de las reglas de cálculo, de las cantidades equipolentes de M. Bellavitis y de la teoría de los cuaternios de Hamilton, que no es más que una extensión al espacio de las concepciones de M. Bellavitis, investigaciones todas muy propias de las Facultades de ciencias, aunque no en el sitio en que están incluidas.

Para terminar, diré al Sr. Octavio de Toledo, que el método de Horner para la resolución de ecuaciones numéricas se exige en la Escuela de Caminos, en los exámenes de Algebra superior, aunque con apellido latino; y en cuanto á la teoría de figuras recíprocas, pongo á su disposición los apuntes del Sr. Portuondo, profesor de Mecánica racional, donde la verá expuesta, y sobre ella se vuelve á insistir en los cursos de Resistencia de materiales y de Puentes; le diré también, que sabrá que en la Aritmética de Salinas y Benítez, se estudian algunas generalidades de la teoría de congruencias; pero no todo ni mucho menos de lo que se pide en el programa de primer curso de Análisis matemático de la Universidad de Madrid, que las notas de la Aritmética de Serret sobre teoría de números son incompletas, pues, por ejemplo, en el teorema de Wilson generalizado, tiene que cortarse la demostración y dejarla aplazada para el Algebra superior.

Yo no censuro que estas teorías las estudien los Doctores en ciencias, sino al contrario, lo que he sostenido es que su principal misión es cultivarlas, no asomándose al edificio, sino penetrando en sus más escondidos rincones, para contribuir al progreso de la ciencia pura; pero lo que sí me parece mal, es que se pretenda que los Ingenieros les sigan en tan sublimes investigaciones, cuando les falta tiempo para dedicarse á otros estudios más interesantes dentro de su profesión.

Esta ha sido la tesis de mi anterior artículo, que gracias á la intervención del Sr. Octavio de Toledo, me ha proporcionado además del honor de discutir con él, el medio de reforzar los argumentos en esta réplica, que no tenía pensamiento de escribir.

VICENTE MACHIMBARRENA.

FUNCIONES ELÍPTICAS ⁽¹⁾

VI

Teorema de Abel.

El problema resuelto en el capítulo anterior, no es sino un caso particular que resulta de la aplicación, al caso de la suma de dos funciones elípticas, de la fórmula general que vamos á determinar y que se conoce con el nombre de teorema de Abel.

El teorema de Abel se aplica no sólo á las funciones elípticas, sino también á las hiper elípticas; en general, á un número cualquiera de funciones abelianas. Resuelve de un modo general el problema planteado en el capítulo anterior, y resuelto en él, en un caso particular. Dicho problema se expuso, en términos generales, diciendo: *Dada una transcendente, hallar trozos de esta transcendente, cuya relación pueda expresarse por transcendentales más sencillas.*

Expondremos el teorema de Abel, que resuelve este problema, sirviéndonos de una interpretación geométrica ideada por Clebsch y que da una forma muy elegante al teorema; pero antes debemos recordar otro teorema de Algebra que es tema indispensable para la demostración del que nos ocupa.

* *

Sea la fracción $\frac{\theta(x)}{\psi(x)}$ en la cual los dos términos son polinomios algebraicos, y el grado de $\theta(x)$ es inferior en más de dos unidades al grado de $\psi(x)$; supongamos, además, que $\psi(x)$ sólo tiene raíces desiguales. Descompongamos la fracción $\frac{\theta(x)}{\psi(x)}$ en fracciones sencillas

$$\frac{\theta(x)}{\psi(x)} = \frac{A_1}{x-x_1} + \frac{A_2}{x-x_2} + \frac{A_3}{x-x_3} + \dots + \frac{A_m}{x-x_m}, \quad (1)$$

quitando denominadores y ordenando con relación á x ,

$$\theta(x) = x^m - 1 (A_1 + A_2 + \dots + A_m) + \dots$$

lo cual nos indica que

$$A_1 + A_2 + \dots + A_m = 0 \quad (2).$$

Ahora bien, de la (1) se deduce

$$\theta(x) \frac{x-x_1}{\psi(x)} = A_1 + (x-x_1) \left[\frac{A_2}{x-x_2} + \dots + \frac{A_m}{x-x_m} \right]$$

y haciendo $x = x_1$, queda

$$A_1 = \frac{\theta(x_1)}{\psi'(x_1)},$$

luego la condición (2) está representada por

$$\frac{\theta(x_1)}{\psi'(x_1)} + \frac{\theta(x_2)}{\psi'(x_2)} + \dots + \frac{\theta(x_m)}{\psi'(x_m)} = 0 \quad (3).$$

Pasemos á la demostración del teorema de Abel.

Sea el sistema de ecuaciones

$$\{ y^2 = (1-x^2)(1-K^2x^2) = \Delta^2 x \quad (4)$$

$$\{ f(x, y) = 0 \quad (5)$$

(1) Véase el núm. 1285.

La primera es una ecuación de cuarto grado, que representa una elipse y una hipérbola cuyos ejes son los coordenados, siendo el eje transversal de la segunda curva el eje de las x . La segunda es una ecuación algebraica, cualquiera, puesta bajo forma racional, su término general es de la forma Ax^m y n .

Sean x_1, x_2, x_μ las abscisas de los puntos de intersección de las curvas (4) y (5); haremos variar por ley de continuidad los coeficientes A de la ecuación (5), con lo cual la curva variará por ley de continuidad; sean x'_1, x'_2, x'_μ las abscisas de los puntos de intersección para una nueva posición de la curva variable; el teorema de Abel está expresado por la ecuación

$$\int_0^{x_1} \frac{dx_1}{\Delta x_1} + \int_0^{x_2} \frac{dx_2}{\Delta x_2} + \dots + \int_0^{x_\mu} \frac{dx_\mu}{\Delta x_\mu} = \int_0^{x'_1} \frac{dx'_1}{\Delta x'_1} + \int_0^{x'_2} \frac{dx'_2}{\Delta x'_2} + \dots + \int_0^{x'_\mu} \frac{dx'_\mu}{\Delta x'_\mu} \quad (6).$$

En efecto, mediante la ecuación (4) podemos eliminar de la (5) todas las potencias de y superiores a la primera, con lo cual dicha ecuación quedará bajo la forma

$$y = \frac{P}{Q},$$

siendo P y Q polinomios en x , tales que uno de ellos sólo encierra potencias pares de x , y el otro potencias impares.

Las abscisas de los puntos de intersección están dadas, evidentemente, por la ecuación

$$\frac{P^2}{Q^2} = \Delta^2 x \quad \text{ó} \quad P^2 - Q^2 \Delta^2 x = 0 \quad (7).$$

La ecuación (7) se verifica para una cualquiera de las raíces x ; supongamos que los coeficientes de P y Q varían infinitamente poco; x experimentará un cambio infinitamente pequeño δx , y debiendo verificarse aún la ecuación para los nuevos valores su variación es nula. Pero esta variación se compone de dos partes, una en que varía la x , sin variar los coeficientes, la otra en que sólo varían éstos. Designemos por $\psi(x)$ el primer miembro de la ecuación (7), la variación total igualada a cero es

$$\psi'(x) dx + 2P\delta P - 2Q\delta Q - Q^2\delta\Delta^2 x = 0,$$

de donde

$$\frac{dx}{\Delta x} = -2 \frac{\frac{P}{\Delta x} \delta P - Q \delta Q \Delta x}{\psi'(x)},$$

y como

$$\frac{P}{Q} = \Delta x,$$

$$\frac{dx}{\Delta x} = -2 \frac{Q \delta P - P \delta Q}{\psi'(x)}.$$

Haciendo

$$P \delta Q - Q \delta P = \theta(x)$$

$$\frac{dx}{\Delta x} = 2 \frac{\theta(x)}{\psi'(x)};$$

sustituyendo en esta ecuación en vez de x , las raíces $x, x_2, \dots, x_\mu$ y sumando las igualdades que resulten

$$\frac{dx'_1}{\Delta x'_1} + \frac{dx_2}{\Delta x_2} + \dots + \frac{dx_\mu}{\Delta x_\mu} = 2 \left[\frac{\theta(x_1)}{\psi'(x_1)} + \frac{\theta(x_2)}{\psi'(x_2)} + \dots + \frac{\theta(x_\mu)}{\psi'(x_\mu)} \right].$$

Ahora bien; $x_1, x_2, \dots, x_\mu$ son las raíces de $\psi(x) = 0$; además, si m y n son los grados de los polinomios P y Q , es fácil ver que el grado de $\theta(x)$ es inferior en más de 2 unidades al grado de $\psi(x)$ — en el caso particular de ser $m = n$, se ve inmediatamente que el grado de $\theta(x)$ es $2m$ y el de $\psi(x)$ $2m + 4$ —

Resulta de esto que

$$\frac{dx_1}{\Delta x_1} + \frac{dx_2}{\Delta x_2} + \dots + \frac{dx_\mu}{\Delta x_\mu} = 0.$$

Integrando entre límites $(x_1, x'_1), (x_2, x'_2), \dots$

$$\int_{x_1}^{x'_1} \frac{dx_1}{\Delta x_1} + \int_{x_2}^{x'_2} \frac{dx_2}{\Delta x_2} + \dots + \int_{x_\mu}^{x'_\mu} \frac{dx_\mu}{\Delta x_\mu} = 0$$

ó bien

$$\int_0^{x_1} \frac{dx_1}{\Delta x_1} + \int_0^{x_2} \frac{dx_2}{\Delta x_2} + \dots + \int_0^{x_\mu} \frac{dx_\mu}{\Delta x_\mu} = \int_0^{x'_1} \frac{dx'_1}{\Delta x'_1} + \int_0^{x'_2} \frac{dx'_2}{\Delta x'_2} + \dots + \int_0^{x'_\mu} \frac{dx'_\mu}{\Delta x'_\mu}$$

lo que demuestra el teorema.

La ecuación (7) se descompone en dos

$$\begin{cases} P - 2\Delta x = 0 \\ P + 2\Delta x = 0 \end{cases}$$

se ve que se pasa de una de éstas a la otra cambiando x en $-x$, luego sus raíces son iguales y de signos contrarios. Ahora bien; la función $f(x, y)$, y, por consiguiente, P y Q son arbitrarios; podemos, pues, dar valores arbitrarios a $\mu - 1$ de las raíces, de los puntos de intersección, y de deducir x_μ de modo que se verifique

$$\frac{dx_1}{\Delta x_1} + \frac{dx_2}{\Delta x_2} + \dots + \frac{dx_{\mu-1}}{\Delta x_{\mu-1}} = \frac{dx_\mu}{\Delta x_\mu},$$

ecuación que encierra el problema resuelto en el capítulo anterior.

Así, sean

$$\begin{cases} P = ax + x^3 \\ Q = b \end{cases}$$

tendremos

$$\begin{cases} ax_1 + x_1^3 + 6\Delta x_1 = 0 \\ ax_2 + x_2^3 + 6\Delta x_2 = 0 \end{cases}$$

siendo x_1 y x_2 valores arbitrarios. El valor de x_3 viene dado por la igualdad

$$x_3 = \frac{b}{x_1 x_2} \begin{cases} a = \frac{x_1^3 \Delta x_1 - x_1^2 \Delta x_2}{x_1 \Delta x_2 - x_2 \Delta x_1} \\ b = \frac{x_2 x_1^3 - x_1 x_2^3}{x_1 \Delta x_2 - x_2 \Delta x_1} \end{cases}$$

sustituyendo el valor de b

$$x_3 = \frac{x_1^2 - x_2^2}{x_1 \Delta x_2 - x_2 \Delta x_1} = \frac{x_1 \Delta x_2 + x_2 \Delta x_1}{1 - K^2 x_1^2 x_2^2},$$

fórmula que concuerda con la que daba el valor de C , por el procedimiento de Darboux, en el capítulo anterior.

Vemos, pues, que el problema resuelto en el capítulo anterior es un caso particular del teorema de Abel, como decimos al empezar este capítulo. Vemos, además, que la generalidad de este teorema es muy grande, pues se aplica, no sólo á las funciones elípticas, sino á las abelianas en general. Por último, la ecuación (6) subsiste, siendo las raíces de cualquier especie: reales ó imaginarias, sencillas ó complejas.

Si hemos, por consiguiente, de sacar partido de la gran generalidad de este teorema, es preciso indicar de un modo claro lo que se entiende por una integral de esta forma

$$\int_0^{\infty} \frac{a + b\sqrt{-1}}{\Delta x} dx$$

expresión que hasta ahora no tiene sentido para nosotros.

El sentido de las integrales, tomadas entre límites imaginarios, será objeto de la segunda parte, que exponemos á continuación, y en la cual damos á conocer las funciones elípticas bajo un nuevo aspecto, el de funciones de variable imaginaria.

MEDICIONES ELECTRICAS ⁽¹⁾

(CONTINUACIÓN)

18. Diferencias de aislamiento en un conductor.

Para determinar la diferencia de aislamiento en dos trozos ó secciones de un mismo conductor, ó sea su aislamiento comparativo, es preciso dividirlo en un punto intermedio.

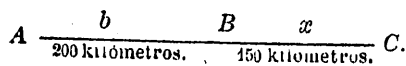


Fig. 40.

Sea el conductor AC , que tiene 350 kilómetros de longitud (fig. 10), y B la estación ó punto de división que dista 200 kilómetros de A y 150 de C .

Se mide el aislamiento total de ABC aislando el extremo C , y nos dará un número a de unidades.

Después se mide el trozo AB aislando el extremo en B , cuyo resultado designaremos por b .

Obtendremos el valor de x , aislamiento del trozo BC , por la fórmula

$$x = \frac{ab}{b-a}$$

Supongamos que la resistencia hallada para a , aislamiento total del conductor ABC , sea de 6.000 unidades, y el aislamiento de b , trozo AB , de 8.500 unidades.

Aplicando la fórmula, el valor x del aislamiento del trozo BC será:

$$x = \frac{6.000 \times 8.500}{8.500 - 6.000} = 20.400 \text{ ohmios.}$$

El aislamiento kilométrico del trozo AB (200 kilómetros), es

$$8.500 \times 200 = 1.700.000 \text{ ohmios,}$$

y el de BC (150 kilómetros)

$$20.400 \times 150 = 3.060.000 \text{ ohmios;}$$

de donde se deduce que el trozo BC tiene mejores condiciones de aislamiento que el AB .

19. Distancia á una derivación.

La determinación de la distancia á que se encuentra una derivación, ó pérdida de corriente de un conductor, puede resolverse de varios modos, según los medios con que se cuente para verificar los ensayos.

(1) Véase el número anterior.

PRIMER CASO.—Se dispone de otro conductor auxiliar para hacer las pruebas.

Las clavijas del conmutador general, como indica la fig. 11.

Un polo de la pila á F y el otro á tierra.

El galvanómetro, en su posición normal, entre E y D .

El hilo Mm á la borna C y el hilo auxiliar á la borna D , formando el anillo, haciendo unir los extremos m y n en la otra estación.

El puente queda dispuesto en la forma siguiente: AB y AD , lados fijos; tercer lado, BC y el trozo desconocido Md , y el cuarto lado se compone del hilo auxiliar Nn , más la parte del hilo principal comprendida entre m y d .

Se conoce S , suma de la resistencia normal de los hilos Mm y Nn , así como también la longitud L del anillo.

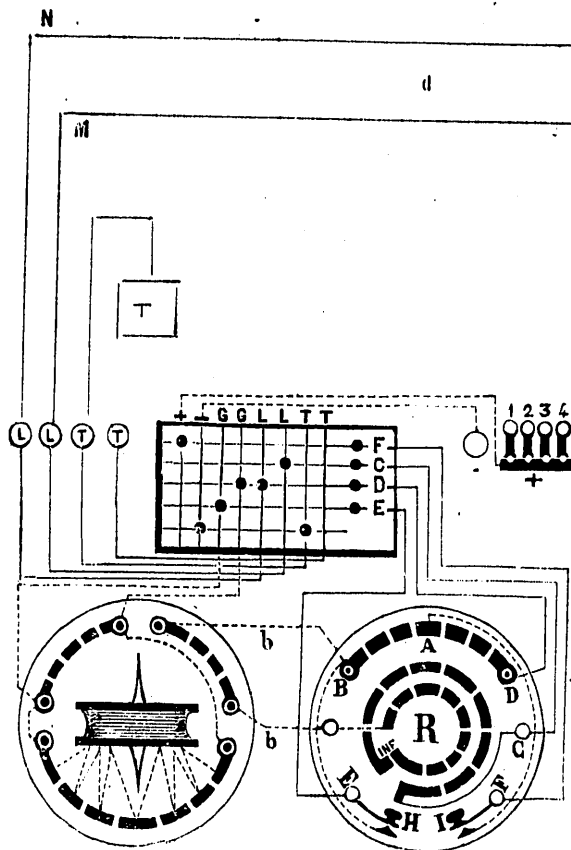


Fig. 11.

Dando los valores r y r' á los lados fijos del puente, incluidas en R las resistencias necesarias para el equilibrio, y conociendo S , resistencia de los dos hilos Mm y Nn , entre los cuatro lados del puente existirá la proporción

$$r : r' :: R + Md : S - Md;$$

de la que

$$Md = \frac{rS - r'R}{r + r'}.$$

Si las resistencias de los lados fijos son iguales, ó $r = r'$, tendremos

$$Md = \frac{S - R}{2}.$$

Supongamos que la resistencia normal S de los dos hilos Mm y Nn sea de 500 ohmios, y que ha sido preciso incluir en R 240 ohmios, además del valor S del anillo, para obtener el equilibrio

$$Md = \frac{500 - 240}{2} = 130 \text{ ohmios}$$

resistencia de la derivación.

Si la longitud de los hilos que forman el anillo es, por ejemplo, de 140 kilómetros, obtendremos la distancia á la derivación por medio de la proporción,

$$500 : 140 :: 160 : x,$$