

Mediante lo expuesto en este capítulo, tenemos la manera de sumar ó restar dos integrales elípticas, y por tanto podemos hallar la suma algebraica de un número cualquiera de dichas funciones, ó de verificar transformaciones en ellas, tales como la siguiente:

$$\frac{d\varphi}{\sqrt{1-K^2\sin^2\varphi}} = \frac{dx}{\sqrt{1-K^2\sin^2\varphi}},$$

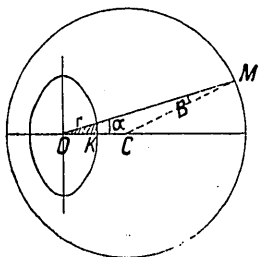
etc.; pero todavía se puede considerar el problema resuelto en este capítulo, desde nuevos puntos de vista.

Sabemos que la integral

$$\int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\Delta\varphi}$$

representa un arco de curva; el problema puede, pues, presentarse, como teniendo por objeto la suma de arcos de esa curva.

La integral citada puede también representar un área, y entonces el problema consiste en la determinación de una suma de áreas. La curva que por sus áreas nos da los diversos valores de la integral, afecta una forma parecida á la de la elipse, por lo cual se ha denominado *falsa elipse*, y su ecuación en coordenadas polares es fácil de determinar.



(Fig. 4.a)

Tracemos la circunferencia C de radio 1, y tomemos $CO = K < 1$; el valor del radio medio rutor r correspondiente á un ángulo x , tomémoslo igual á

$\frac{1}{\sqrt{\cos\beta}}$, expresión fácil de construir; la curva que resulte de esos radios rectores, es la pedida. En efecto, el área rayada tiene por expresión:

$$S = \frac{1}{2} \int_0^x r^2 dx = \frac{1}{2} \int_0^x \frac{dx}{\cos\beta} = \frac{1}{2} \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-\sin^2\beta}},$$

y como

$$\frac{\sin\alpha}{1} = \frac{\sin\beta}{K}$$

$$S = \frac{1}{2} \int_0^x \frac{d\alpha}{\sqrt{1-K^2\sin^2\alpha}},$$

luego la curva construida tiene sus áreas parciales, proporcionales á la integral

$$\int_0^x \frac{d\alpha}{\Delta\alpha},$$

como queríamos.

JUAN GONZÁLEZ PIEDRA.

ARENAS NORMALES PARA LOS ENSAYOS DE CEMENTOS (1)

(CONTINUACIÓN)

III

La última columna del cuadro primero necesita una breve explicación, porque en ella aparece como relación típica el cociente de dividir el peso de un litro de arena por el volumen de huecos correspondientes á dicho litro de arena.

Dosificando los morteros en peso como es costumbre casi universal para los de ensayo, resultarán para un mismo cemento, tanto más áridos cuanto más ligera sea la arena; y esto, que tiene poca importancia (más sin embargo de la que parece á primera

vista), cuando con la misma arena se ensayan diversos cementos, es esencial cuando se comparan varias arenas mezcladas con el mismo cemento. Pero puesto que la cantidad de cemento es constantemente el tercio ó el quinto, en peso, de la arena, al sustituir en vez del volumen del cemento el peso de la arena que entra en un litro de mezcla, se obtendrá un número proporcional á la relación antes citada. Cometo á sabiendas un error al suponer que en un litro de mezcla entrará el mismo peso de arena que se necesita para llenar la misma medida con arena recalada; pero creo que, dado el grado de unificación á que se llevan los ensayos, es seguro que el orden de colocación de las arenas que así se obtenga, será el mismo que se obtendría si se emplease la expresión exacta.

Y para mayor seguridad, en nuestro caso, puede comprobarse en el cuadro citado, que todas las cifras de las demás columnas siguen un orden constantemente creciente ó constantemente decreciente, menos la de pesos específicos, que aunque no obedece á ningún orden, como casi no varía nada, pue le intro-

ducir muy poca alteración en las expresiones $1 - \frac{s}{d}$ y $1 - \frac{s}{d}$.

Véase á continuación otra coincidencia menos evidente: la de las densidades de las probetas á las veinticuatro horas de elaboradas.

Tabla segunda.

	MEZCLA 1 Á 3 EN PESO			MEZCLA 1 Á 5 EN PESO		
	Agua empleada.	Densidad de los morteros á las 24 horas de preparadas las probetas para		Agua empleada.	Densidad de los morteros en las 24 horas de preparadas las probetas para	
		tracción.	compresión.		tracción.	compresión.
10. Massachusetts.	9	2,187	1,977	7	1,953	1,777
8. Cherburgo....	9	2,216	2,062	7,5	1,997	1,873
4. Suiza.....	9,5	2,289*	2,118	7,5	2,041	1,887
1. Freienwalde...	9	2,271	2,197	7	2,055	1,989
2. Rhin.....	9	2,274	2,220	7	2,099	2,014
7. Leucate.....	9	2,303	2,268	7,5	2,011*	2,065
3. Austria.....	9	2,303	2,268	7,5	2,157	2,124
9. Inglaterra.....	9	2,332	2,282	7,5	2,187	2,151

Las dos cifras señaladas con asteriscos son las únicas que se apartan del orden en que han quedado colocadas las arenas por sus relaciones típicas, y conviene añadir que en el cuadro del autor de la memoria, está acompañada la cifra 2,065 correspondiente á la arena de Leucate (última columna) de la nota «error probable». Sin duda, M. Gary, fijándose en que constantemente resultan menos densos los cuerpos preparados para la tracción, al ver que en este caso resulta lo contrario, tuvo por sospechoso á uno de los dos guarismos correspondientes á la mezcla 1 á 5 con arena de Leucate. No sé por qué ha tenido menos confianza en el segundo que en el primero; pero ordenadas como yo presento las cifras, se ve bien claro que el equivocado es el 2,041. Y observando que la diferencia entre la densidad de las probetas para tracción elaboradas con la misma arena en las proporciones 1 á 3 y 1 á 5 varía entre 0,145 y 0,234 con un término medio de 0,206, teniendo sólo en cuenta los seis grupos de cifras no sospechosos, puede estimarse que la cifra verdadera correspondiente á Leucate, penúltima columna, es próximamente $2,303 - 0,206 = 2,097$. Y análogamente la correspondiente á Suiza, segunda columna es $2,041 + 0,206 = 2,247$. Salvados así estos errores probables, queda sólo una insignificante discrepancia para la arena de Leucate. Y aun tal vez fuera más natu-

(1) Véase el núm. 1284.

ral tomar para la diferencia probable, no el término medio, sino la correspondiente á la arena austriaca que es análoga, con lo que desaparecería la dificultad. Parece, por tanto, que las condiciones físicas conducen á una clasificación bien definida, en la cual forman un grupo las arenas naturales y otro las artificiales. Pero si se tienen en cuenta los datos añadidos, ya no resulta cierto, porque la arena del Manzanares queda antes que las artificiales.

La Memoria alemana publica con todo detalle los resultados de la rotura de los cuerpos de prueba; pero no nos interesan más que los términos medios que deduce, bastando con consignar aquí que es muy satisfactoria la uniformidad de los resultados aislados de cada serie, dato importante para tener confianza en los números deducidos.

La tabla tercera contiene las cargas de rotura á la tracción, deducidas como término medio de diez ensayos para cada mezcla.

No siguen marcha fija; sin duda hay otras causas que influyen más que las densidades reales y aparentes (únicas que se han tenido en cuenta), y aquí no cabe atribuirlo á diferencias en la carbonatación superficial como lo hace Férret al explicar la poca uniformidad de los resultados de los ensayos por tracción en general, puesto que todas las probetas han sido preparadas en condiciones idénticas. Hay alguna causa inherente á las arenas mismas que no he logrado averiguar, y que no se explica tampoco ni por la composición química ni por la mayor ó menor rugosidad de los granos.

Tabla tercera.

ARENAS DE	RESISTENCIA POR CM ² OBTENIDAS A LA TRACCION					
	Mezcla 1 cemento y 3 arena.			Mezcla 1 cemento y 5 arena.		
	Siete dias.	Veintiocho dias.	Noventa dias.	Siete dias.	Veintiocho dias.	Noventa dias.
10 Massachusetts...	20	29	32	12	15	20
8 Cherburgo.....	21	27	31	12	17	20
4 Suiza.....	19	27	32	12	16	21
1 Freienwalde...	17	25	29	11	15	18
2 Rhin.....	19	24	29	12	13	18
7 Leucate.....	20	25	28	14	16	20
3 Austria.....	20	25	30	14	17	21
9 Inglaterra.....	18	22	30	11	13	17

Sin seguir una marcha perfectamente regular, las resistencias á la compresión muestran mucho más clara la influencia de los volúmenes; porque, con ciertas excepciones, crecen á medida que la relación típica aumenta. Si sólo nos fijáramos en la diferencia entre los valores extremos de las resistencias obtenidas, podríamos deducir que, puesto que los resultados á la tracción, aunque no obedecen á ley conocida, discrepan poco los unos de los otros, este procedimiento de ensayo es más seguro que el fundado en la compresión, cuyos resultados oscilan en algunos casos entre números cuya relación es $\frac{1}{2}$. No se pierdan de vista las condiciones especialísimas de estas investigaciones, que han eliminado muchos de los elementos de error que son inevitables en la práctica corriente y mucho más graves para las pruebas por tracción. Es casi seguro que si se repiten series de experimentos con estas mismas arenas y cementos diferentes, se encontrará un orden fijo para las cargas de rotura á la compresión de los diversos cementos, aunque varíen mucho de unas arenas á otras, mientras lo probable es que no exista clasificación segura para las cargas de rotura por tracción, que se diferencian

en menos al introducir en las mezclas arenas normales distintas.

Es notable el resultado de comparar la arena del Manzanares con la de Leucate; mientras, por regla general, el mismo cemento, ensayado con dos arenas distintas, pocas veces da discrepancias del 20 por 100 en las resistencias á la tracción, la relación de las del mortero con arena del Manzanares á las del mortero con arena de Leucate de igual cernido y en iguales proporciones en peso varía entre 0,40 y 0,70, siendo casi siempre muy próxima á 0,50.

Entre las resistencias á la compresión la relación es, por término medio, 0,65, lo que se explica muy bien por las relaciones en volumen que entran en la mezcla. Buscando dos arenas cuyos números típicos difieran poco de los de estas dos, se encontrará una relación muy parecida. Tales son, por ejemplo, la de Freienwalde y la americana.

A continuación se copian los resultados de los ensayos por compresión.

Tabla cuarta.

ARENAS DE	RESISTENCIAS POR CM ² OBTENIDAS A LA COMPRESION					
	Mezcla 1 cemento y 3 arena.			Mezcla 1 cemento y 5 arena.		
	Siete dias.	Veintiocho dias.	Noventa dias.	Siete dias.	Veintiocho dias.	Noventa dias.
10 Massachusetts...	93	133	180	40	58	75
8 Cherburgo.....	117	164	217	50	73	101
4 Suiza.....	118	158	221	54	69	100
1 Freienwalde...	141	203	273	60	93	119
2 Rhin.....	162	230	302	74	106	130
7 Leucate.....	167	221	297	72	90	136
3 Austria.....	150	210	278	80	110	150
9 Inglaterra.....	152	222	301	68	108	152

(Se continuará.)

TORIBIO CÁCERES.

ESTABILIDAD

de las construcciones de hormigón de cemento armado. ⁽¹⁾

(Continuación).

En esta hipótesis, las operaciones pueden ser efectuadas por medio de las fórmulas

$$x h = \frac{2 b h^2 + 9 \omega \delta + (2 a - b) c^2}{4 b h + 9 \omega + 4 (a - b) c} \quad (117)$$

$$r = \frac{6 M}{a b h x (3 \delta - x h)} \quad (123)$$

$$z = \frac{9 M}{2 \omega (3 \delta - x h)} \quad (125).$$

Pero estas fórmulas se pueden simplificar, porque los factores $(a - b)$ y α son en este caso iguales el primero á cero, y el segundo á la unidad.

Efectuando las simplificaciones, se encuentra con la relación (117)

$$x h = \frac{2 b h^2 + 9 \omega \delta}{4 b h + 9 \omega} \quad (126 \text{ bis})$$

(1) Véase el número anterior.