

FUNDADA Y SOSTENIDA POR EL CUERPO NACIONAL DE INGENIEROS DE CAMINOS, CANALES Y PUERTOS

Colaboradores... D. Manuel Marañuel, Ingeniero del mismo Cuerpo, Secretario.
Todos los Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos.

Redacción y Administración: Puerta del Sol, 9, pral.

(CONCLUSIÓN)

de donde

$$\left\{ \frac{P Q}{A R} = \frac{\sin(\frac{1}{2} - \varphi)}{\sin x} \right. ; \quad (17)$$

además

$$\left\{ \begin{array}{l} P M = \sqrt{(R+a)^2 - r^2}. \quad \Delta \varphi \\ M Q = \sqrt{(R+a)^2 - r^2}. \quad \Delta \downarrow \\ A N = \sqrt{(R+a)^2 - r^2}. \\ N R = \sqrt{(R+a)^2 - r^2}. \quad \Delta \alpha \end{array} \right.$$

y sustituyendo en la (17)

$$\frac{\sin(\psi - \alpha)}{\sin \varphi} = \frac{\Delta \varphi + \Delta \psi}{\Delta \alpha + 1}$$

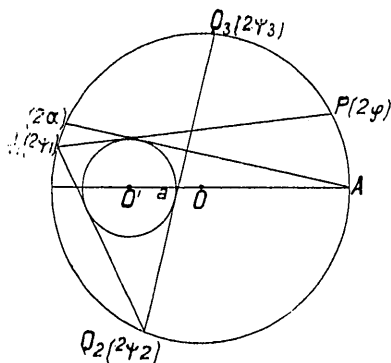
De esta ecuación se saca

$$\operatorname{sen} \alpha = 2 \frac{(\Delta \varphi + \Delta \psi) \operatorname{sen} (\frac{1}{2} \varphi)}{(\Delta \varphi + \Delta \psi)^2 + \operatorname{sen}^2 k^2 (\frac{1}{2} \varphi)} ;$$

y es fácil demostrar que este valor de $\operatorname{sen} \alpha$, y el de $\operatorname{sen} \mu$ dado por la ecuación (14) son idénticos.

*
* *

Como aplicación de este procedimiento, vamos á deducir una consecuencia inesperada, cual es la demostración de un teorema de Geometría elemental, haciendo uso de las propiedades de las funciones elípticas.



Tracemos por un punto (fig.^a 3.^a) cualquiera P una tangente á la circunferencia O' por Q_1 una nueva tangente $Q_1 Q_2$, y así sucesivamente; supongamos que el polígono formado por esas tangentes llegue á cerrarse, es decir, que volvamos al punto P ; el teorema debido á Pou-

celet, que vamos à demostrar, puede enunciarse así:

Si dos círculos, no concéntricos, O y O' , son tales que se pueda circunscribir á uno de ellos un polígono, de un cierto número de

lados, inscirto, al mismo tiempo, en el otro, existirán una infinidad de polígonos, del mismo número de lados, que llenen su misma condición.

Sean

$$\frac{AP}{2R} = \psi, \quad \frac{AQ_1}{2R} = \psi_1, \quad \frac{AQ_2}{2R} = \psi_2, \dots, \dots,$$

tendremos la serie de igualdades

$$\begin{aligned} & \int_0^{\downarrow_1} \frac{d \downarrow_1}{\Delta \downarrow_1} - \int_0^{\Psi} \frac{d \Psi}{\Delta \Psi} - \int_0^{\alpha} \frac{d \alpha}{\Delta \alpha} \\ & \int_0^{\downarrow_2} \frac{d \downarrow_2}{\Delta \downarrow_2} - \int_0^{\downarrow_1} \frac{d \downarrow_1}{\Delta \downarrow_1} - \int_0^{\alpha} \frac{d \alpha}{\Delta \alpha} \\ & \int_0^{\downarrow_3} \frac{d \downarrow_3}{\Delta \downarrow_3} - \int_0^{\downarrow_2} \frac{d \downarrow_2}{\Delta \downarrow_2} - \int_0^{\alpha} \frac{d \alpha}{\Delta \alpha} \end{aligned}$$

$$\int_0^{\downarrow n} \frac{d \downarrow n}{\Delta \downarrow} - \int_0^{\downarrow n-1} \frac{d \downarrow n-1}{\Delta \downarrow n-1} = \int_0^{\alpha} \frac{d \alpha}{\Delta \alpha};$$

sumando todas estas igualdades, miembro á miembro.

$$\int_0^{\psi_n} \frac{d\psi_n}{\Delta\psi_n} - \int_0^{\psi} \frac{d\psi}{\Delta\psi} - n \int_0^{\alpha} \frac{d\alpha}{\Delta\alpha}, \quad (18)$$

Pero si el polígono se cierra, es decir si volvemos al punto P ,

$$2 \Delta_n = 2 \varphi + 2 m \pi$$

y la ecuación (18) se convierte en

$$\int_{\varphi}^{\varphi + m\pi} \frac{d\varphi}{\Delta\varphi} = n \int_0^x \frac{d\alpha}{\Delta\alpha}, \quad (19)$$

la integral del primer miembro, á causa de la periodicidad de los senos, puede ser reemplazada por

$$\int_0^{m\pi} \frac{d\varphi}{\Delta\varphi},$$

porque los elementos suprimidos son iguales, precisamente, á los que se suman. La condición necesaria y suficiente para que la ecuación (19) se satisfaga, es, pues, independiente del valor de φ , es decir, de la posición de P , primer vértice del polígono. Si, pues, el polígono se cierra para una posición de P se cerrará para todas las demás.

Mediante lo expuesto en este capítulo, tenemos la manera de sumar ó restar dos integrales elípticas, y por tanto podemos hallar la suma algebraica de un número cualquiera de dichas funciones, ó de verificar transformaciones en ellas, tales como la siguiente:

$$\frac{d\varphi}{\sqrt{1-K^2\sin^2\varphi}} = \frac{dx}{\sqrt{1-K^2\sin^2\varphi}},$$

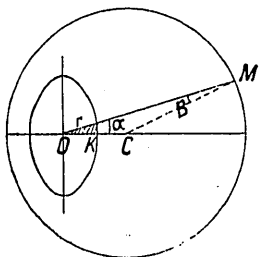
etc.; pero todavía se puede considerar el problema resuelto en este capítulo, desde nuevos puntos de vista.

Sabemos que la integral

$$\int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\Delta\varphi}$$

representa un arco de curva; el problema puede, pues, presentarse, como teniendo por objeto la suma de arcos de esa curva.

La integral citada puede también representar un área, y entonces el problema consiste en la determinación de una suma de áreas. La curva que por sus áreas nos da los diversos valores de la integral, afecta una forma parecida á la de la elipse, por lo cual se ha denominado *falsa elipse*, y su ecuación en coordenadas polares es fácil de determinar.



(Fig. 4.a)

Tracemos la circunferencia C de radio 1, y tomemos $CO = K < 1$; el valor del radio medio rutor r correspondiente á un ángulo α , tomémoslo igual á

$\frac{1}{\sqrt{\cos\beta}}$, expresión fácil de construir; la curva que resulte de esos radios rectores, es la pedida. En efecto, el área rayada tiene por expresión:

$$S = \frac{1}{2} \int_0^x r^2 dx = \frac{1}{2} \int_0^x \frac{dx}{\cos\beta} = \frac{1}{2} \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-\sin^2\beta}},$$

y como

$$\frac{\sin\alpha}{1} = \frac{\sin\beta}{K}$$

$$S = \frac{1}{2} \int_0^x \frac{d\alpha}{\sqrt{1-K^2\sin^2\alpha}},$$

luego la curva construida tiene sus áreas parciales, proporcionales á la integral

$$\int_0^x \frac{d\alpha}{\Delta\alpha},$$

como queríamos.

JUAN GONZÁLEZ PIEDRA.

ARENAS NORMALES PARA LOS ENSAYOS DE CEMENTOS ⁽¹⁾

(CONTINUACIÓN)

III

La última columna del cuadro primero necesita una breve explicación, porque en ella aparece como relación típica el cociente de dividir el peso de un litro de arena por el volumen de huecos correspondientes á dicho litro de arena.

Dosificando los morteros en peso como es costumbre casi universal para los de ensayo, resultarán para un mismo cemento, tanto más áridos cuanto más ligera sea la arena; y esto, que tiene poca importancia (más sin embargo de la que parece á primera

vista), cuando con la misma arena se ensayan diversos cementos, es esencial cuando se comparan varias arenas mezcladas con el mismo cemento. Pero puesto que la cantidad de cemento es constantemente el tercio ó el quinto, en peso, de la arena, al sustituir en vez del volumen del cemento el peso de la arena que entra en un litro de mezcla, se obtendrá un número proporcional á la relación antes citada. Cometo á sabiendas un error al suponer que en un litro de mezcla entrará el mismo peso de arena que se necesita para llenar la misma medida con arena recalada; pero creo que, dado el grado de unificación á que se llevan los ensayos, es seguro que el orden de colocación de las arenas que así se obtenga, será el mismo que se obtendría si se emplease la expresión exacta.

Y para mayor seguridad, en nuestro caso, puede comprobarse en el cuadro citado, que todas las cifras de las demás columnas siguen un orden constantemente creciente ó constantemente decreciente, menos la de pesos específicos, que aunque no obedece á ningún orden, como casi no varía nada, pue le intro-

ducir muy poca alteración en las expresiones $1 - \frac{s}{d}$ y $1 - \frac{s}{d}$.

Véase á continuación otra coincidencia menos evidente: la de las densidades de las probetas á las veinticuatro horas de elaboradas.

Tabla segunda.

	MEZCLA 1 Á 3 EN PESO			MEZCLA 1 Á 5 EN PESO		
	Agua empleada.	Densidad de los morteros á las 24 horas de preparadas las probetas para		Agua empleada.	Densidad de los morteros en las 24 horas de preparadas las probetas para	
		tracción.	compresión.		tracción.	compresión.
10. Massachusetts.	9	2,187	1,977	7	1,953	1,777
8. Cherburgo....	9	2,216	2,062	7,5	1,997	1,873
4. Suiza.....	9,5	2,289*	2,118	7,5	2,041	1,887
1. Freienwalde...	9	2,271	2,197	7	2,055	1,989
2. Rhin.....	9	2,274	2,220	7	2,099	2,014
7. Leucate.....	9	2,303	2,268	7,5	2,011*	2,065
3. Austria.....	9	2,303	2,268	7,5	2,157	2,124
9. Inglaterra.....	9	2,332	2,282	7,5	2,187	2,151

Las dos cifras señaladas con asteriscos son las únicas que se apartan del orden en que han quedado colocadas las arenas por sus relaciones típicas, y conviene añadir que en el cuadro del autor de la memoria, está acompañada la cifra 2,065 correspondiente á la arena de Leucate (última columna) de la nota «error probable». Sin duda, M. Gary, fijándose en que constantemente resultan menos densos los cuerpos preparados para la tracción, al ver que en este caso resulta lo contrario, tuvo por sospechoso á uno de los dos guarismos correspondientes á la mezcla 1 á 5 con arena de Leucate. No sé por qué ha tenido menos confianza en el segundo que en el primero; pero ordenadas como yo presento las cifras, se ve bien claro que el equivocado es el 2,041. Y observando que la diferencia entre la densidad de las probetas para tracción elaboradas con la misma arena en las proporciones 1 á 3 y 1 á 5 varía entre 0,145 y 0,234 con un término medio de 0,206, teniendo sólo en cuenta los seis grupos de cifras no sospechosos, puede estimarse que la cifra verdadera correspondiente á Leucate, penúltima columna, es próximamente $2,303 - 0,206 = 2,097$. Y análogamente la correspondiente á Suiza, segunda columna es $2,041 + 0,206 = 2,247$. Salvados así estos errores probables, queda sólo una insignificante discrepancia para la arena de Leucate. Y aun tal vez fuera más natu-

(1) Véase el núm. 1284.