

FUNCIONES ELÍPTICAS

IV

Otra forma que pueden adoptar las integrales elípticas.
Significación geométrica de cada una de ellas.

Hemos llegado á determinar los tres tipos de funciones elípticas,

$$\Delta(x, k) = \int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}};$$

$$\Sigma(x, k) = \int \frac{\sqrt{1-k^2x^2}}{\sqrt{1-x^2}} dx,$$

$$x(x, h) = \int \frac{dx}{(1+mx^2)\sqrt{(1-x^2)(1-K^2x^2)}}$$

en los cuales vimos que K debe estar comprendido entre 0 y 1.

Además, como en el tiempo de Legendre no se habían estudiado aún las cantidades imaginarias, es preciso que en las fórmulas anteriores $x < 1$; y sólo á ese caso particular circunscribía Legendre su estudio.

Pero no es preciso hacer más simplificaciones ni estudiar más propiedades para tener el valor de una función elíptica, para valores dados de x y k ; basta, sencillamente, reducir las fórmulas anteriores á tablas, como se hace con las funciones logarítmicas y trigonométricas.

Nada más sencillo; el valor de la función elíptica para un valor dado de x , se puede descomponer en una suma de términos, correspondientes á valores de x , que crecen, según una progresión geométrica, cuya razón sea muy pequeña. Así para $x=0,04$, el valor de la función sería, suponiendo los incrementos iguales á 0,01:

$$\begin{aligned} & \frac{0,01}{\sqrt{(1-0,01^2)(1-k^2 0,01^2)}} + \frac{0,01}{\sqrt{(1-0,02^2)(1-k^2 0,02^2)}} \\ & + \frac{0,01}{\sqrt{(1-0,03^2)(1-k^2 0,03^2)}} + \frac{0,01}{\sqrt{(1-0,04^2)(1-k^2 0,04^2)}} \\ & \quad \quad \quad * * \end{aligned}$$

Se pueden presentar los tres tipos de función elíptica bajo una nueva forma, introduciendo un argumento φ por la sustitución

$$x = \sin \varphi.$$

Quedan entonces reducidas á

$$\int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}} \quad (1)$$

$$\int_0^\varphi \sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi} d\varphi \quad (2)$$

$$\int_0^\varphi \frac{d\varphi}{(1+m \sin^2 \varphi) \sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}} \quad (3)$$

* *

Se ve que la (2) expresa la longitud de un arco de elipse: en efecto, si en la ecuación de la elipse se hace

$$\begin{cases} \frac{x}{a} = \sin \varphi \\ \frac{y}{b} = \cos \varphi \end{cases}$$

La expresión de la longitud del arco de elipse, es

$$1 = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{dx^2 + dy^2}} = a \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \frac{a^2 - b^2}{a^2} \sin^2 \varphi}} d\varphi,$$

y haciendo

$$\frac{a^2 - b^2}{a^2} = k^2$$

queda

$$\frac{1}{a} \int_0^\varphi \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi} d\varphi,$$

como queríamos hacer ver.

La (1) representa un arco de lemniscata. Esta curva goza de la propiedad, que el producto de sus distancias á dos puntos fijos es constante; la ecuación cartesiana es

$$(x^2 + y^2)^2 - 2c^2(x^2 - y^2) = 0,$$

haciendo

$$\begin{cases} x = 2cA \cos \varphi \\ y = 2cB \sin \varphi \end{cases}$$

en las cuales A y B son funciones de φ á determinar, y sustituyendo, resulta una ecuación que debe ser una identidad; para que eso se verifique, se tienen las dos ecuaciones de condición

$$\begin{cases} A^2 + B^2 = a \\ A^2 - B^2 = \cos^2 \varphi \end{cases}$$

que determinan A y B .

Una vez determinados esos parámetros, sustituiremos los valores de x ó y en la expresión

$$1 = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{dx^2 + dy^2}},$$

que da la longitud del arco de curva, y obtendremos las (1) como nos proponíamos demostrar.

Los cálculos, muy fáciles de desarrollar, no son indispensables en nuestro estudio, y sólo á título de curiosidad indicamos estas propiedades y la marcha general de los cálculos para el que quiera verificar todas las transformaciones.

Por último, la (3) puede representar también un arco de curva. Lo que haremos en este caso es determinar la ecuación de la curva, cuyo arco puede ser expresado por la (3). Este procedimiento inverso de los empleados anteriormente, puede aplicarse lo mismo á la (3) que á la (1) ó á la (2), y conviene partir de las formas primitivas que obtuvimos, para obtener la ecuación de la curva en coordenadas cartesianas.

Aplicándolo á la (1), por ejemplo, partiríamos de la igualdad

$$\int \frac{dx}{\sqrt{dx^2 + dy^2}} = \int \frac{d\varphi}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$$

de la cual se deduce

$$dx^2 + dy^2 = \frac{dx^2}{(1-x^2)(1-k^2x^2)},$$

y bastaría resolver esta ecuación diferencial de segundo orden para obtener la ecuación de la curva pedida.

V

Fórmula fundamental de la teoría de funciones elípticas.

Hemos visto ya que las funciones elípticas son unas nuevas trascendentes que aparecen en el cálculo al tratar de integrar expresiones de cierta forma, y que estas trascendentes no pueden expresarse en función de otras trascendentes más sencillas.

Sin embargo, recordando lo que sucede con las logarítmicas, trigonométricas y otras, se concibe la posibilidad de establecer relaciones entre valores particulares de aquellas funciones. Así, las logarítmicas no pueden expresarse por otras funciones más sencillas; pero entre valores finitos de una logarítmica pueden establecerse relaciones algebraicas, tales como la que relaciona el logaritmo de un producto con los de sus dos factores. Lo mismo sucede con las trigonométricas; y es de observar que esas relaciones algebraicas que enlazan trozos finitos de aquellas trascendentes, pueden obtenerse sin conocer las citadas trascendentes. En el capítulo I de estas lecciones obteníamos para las logarítmicas la relación de que antes hablábamos, y hacíamos el razonamiento suponiendo que nos eran desconocidos los logaritmos. Vamos ahora a obtener una relación análoga para las líneas trigonométricas, y de ahí pasaremos a las elípticas y trataremos de obtener la fórmula fundamental, cuya determinación es el objeto de este capítulo.

*
* *

Escribamos la ecuación diferencial

$$\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = 0 \quad (2)$$

ó la relación equivalente

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + \int_0^y \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = S. \quad (1)$$

Los dos términos del primer miembro no son sino dos valores particulares de la función

$$Z = \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}.$$

Esta función sabemos que es la conocida $Z = \arcsen z$, y, por lo tanto, que la ecuación (1) expresa que la suma de los dos arcos, cuyos son x é y , es igual a una constante S ; pero no nos hace falta saber esto para llegar a la ecuación que queremos; es decir, a una que enlace x con y , ó sea a la integral de la ecuación diferencial (2).

La integración se efectúa fácilmente: pongamos la (2) bajo la forma

$$dx \sqrt{1-y^2} + dy \sqrt{1-x^2} = 0$$

integrando por partes

$$x \sqrt{1-y^2} + y \sqrt{1-x^2} + \int x y \left(\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} \right) = C$$

ó

$$x \sqrt{1-y^2} + y \sqrt{1-x^2} = C \quad (3)$$

que es la integral general.

Determinación de la constante.—Hay que determinar la C de modo que se cumpla la (1). Hagamos en la (3) $y = 0$ resultará $x_0 = C$; substituyendo este par de valores en la (1)

$$\int_0^C \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = S;$$

retención que nos determina la C .

Poniendo en la (3) en vez de x é y sus valores $\text{sen } X$, $\text{sen } Y$, C será $\text{sen } S$ ó sea $\text{sen } (X + Y)$, y resultará:

$$\text{sen } X, \cos Y + \cos X, \text{sen } Y = \text{sen } (X + Y) \quad (4)$$

que es la relación fundamental de la trigonometría.

Pues bien; lo que nos proponemos es hallar una relación se-

mejante a la (4) que ligue varios valores particulares en una función elíptica. La función elíptica que consideraremos siempre en estos razonamientos, será de *primera especie*.

Para llegar a esa relación existen varios procedimientos; seguiremos para su exposición el orden cronológico, empezando por presentar el de Legendre, que es el más antiguo.

La ecuación, análoga a la (1), que sirve de punto de partida es la

$$\frac{dx}{\sqrt{Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + E}} + \frac{dy}{\sqrt{Ay^4 + By^3 + Cy^2 + Dy + E}} = 0 \quad (5)$$

para integrarla se introduce una nueva variable t , mediante las relaciones

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \sqrt{Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + E} \\ \frac{dy}{dt} = -\sqrt{Ay^4 + By^3 + Cy^2 + Dy + E} \end{cases}$$

que, evidentemente satisfacen, a la (5).

Diferenciemos estas últimas relaciones, elevando al cuadrado, y resultará

$$\begin{cases} \frac{d^2x}{dt^2} = \text{polinomio en } x \\ \frac{d^2y}{dt^2} = \text{polinomio en } y \end{cases}$$

Efectuaremos ahora el cambio de variables expresado por la siguiente sustitución lineal,

$$\begin{cases} x + y = p \\ x - y = q \end{cases}$$

y tendremos dos nuevas ecuaciones diferenciales de segundo orden en p y en q . Las enlazaremos, haciendo que el primer miembro resulte una diferencial exacta, y el segundo resultará diferencial exacta también. La integración inmediata de esta ecuación, da la pedida.

No detallaremos este procedimiento, que sólo merece citarse por ser el primero que se empleó. Mencionaremos, con detalle, uno simplificado, que le ha sustituido, y es el

Método de Darboux.—Darboux parte de la ecuación simplificada,

$$\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} + \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}} = 0 \quad (6)$$

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} + \int_0^y \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}} = S \quad (7).$$

Hagamos

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)} \\ \frac{dy}{dt} = \sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)} \end{cases}$$

y tendremos

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &= -(1+k^2)x + 2k^2x^3 \\ \frac{d^2y}{dt^2} &= -(1+k^2)y + 2k^2y^3 \end{aligned} \left\{ \begin{aligned} y \frac{d^2x}{dt^2} - x \frac{d^2y}{dt^2} \\ &= 2k^2xy(x^2 - y^2), \end{aligned} \right.$$

como se tiene también

$$y^2 \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 - x^2 \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 = (x^2 - y^2)(k^2x^2y^2 - 1),$$

dividiendo

$$\frac{y \frac{d^2 x}{dt^2} - x \frac{d^2 y}{dt^2}}{y \frac{dx}{dt} - x \frac{dy}{dt}} = \frac{2xy \left(y \frac{dx}{dt} + x \frac{dy}{dt} \right)}{k^2 x^2 y^2 - 1}.$$

Integrando

$$L \left(y \frac{dx}{dt} - x \frac{dy}{dt} \right) = L (k^2 x^2 y^2 - 1) C$$

ó bien sustituyendo en vez de $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$ sus valores y pasando

de los logaritmos á los números

$$\frac{y \sqrt{(1-x^2)(1-k^2 x^2)} + x \sqrt{(1-y^2)(1-k^2 y^2)}}{k^2 x^2 y^2 - 1} = C (8)$$

que es la relación buscada.

Determinación de la C — si por analogía con las funciones trigonométricas hacemos

$$\frac{s.e. Y \sqrt{(1-s.e. X^2)(1-k^2 s.e. X^2)} + s.e. X \sqrt{(1-s.e. Y^2)(1-k^2 s.e. Y^2)}}{1 - K^2 s.e. X^2 s.e. Y^2} = s.e. (X + Y),$$

que se convierte en la (4), relativa á las funciones trigonométricas para $K = 1$.

El problema que acabamos de resolver para las funciones trigonométricas no es sino un caso particular del que puede enunciarse, con toda generalidad del modo siguiente:

Dada una función cualquiera, algebraica ó trascendente $y = f(x)$; si (y', x') , (y'', x'') son dos pares de valores particulares de esa función, podremos establecer las dos igualdades

$$\begin{cases} y' = f(x') \\ y'' = f(x'') \end{cases}$$

si, además se tiene una relación $x(y', y'') = 0$, entre y' é y'' , el problema en toda su generalidad consiste: en la determinación de la relación $\varphi(x', x'') = 0$ que debe existir entre x' y x'' . Se ve fácilmente, que esta última relación se deduce eliminando y' é y'' entre las tres primeras.

Todavía se puede presentar de otro modo el problema de que nos ocupamos. Hemos visto que el valor de C dado por la ecuación (8) es tal, que hace verificarse la igualdad

$$\begin{aligned} & \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2 x^2)}} + \int_0^y \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-k^2 y^2)}} \\ &= \int_0^C \frac{dC}{\sqrt{(1-C^2)(1-K^2 C^2)}}, \end{aligned}$$

C , se considera como variable en la integral del segundo miembro, y hemos adoptado esta forma para conservar la uniformidad en las tres integrales. Presentado el problema bajo esta forma, se ve que cualquiera de los procedimientos que antes indicamos nos resuelve el de sumar integrales, es decir: *determinar el límite superior que debe corresponder á la integral elíptica, para que sea suma de otras dos, cuyos límites superiores son x é y* . Pero este problema se resuelve aún por otros procedimientos, de los cuales indicaremos dos métodos geométricos muy elegantes, fundados, el primero, en la Trigonometría esférica; el segundo, debido á Jacobi, es una sencilla construcción de Geometría plana.

$$\begin{cases} X \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2 x^2)}} \operatorname{arcsen} x & y = s.e. X \\ Y \int_0^y \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-k^2 y^2)}} \operatorname{arcsen} y & y = s.e. Y \end{cases}$$

y en la ecuación (8) damos á y el valor o resultará

$$y = 0 \quad \text{»} \quad x_0 = -C,$$

y sustituyendo en la (7) este par de valores.

$$\int_0^{-C} \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2 x^2)}} = S$$

ó bien

$$C = -s.e. (S) = -s.e. (X + Y).$$

La relación (8) se puede, pues, poner bajo la forma

Supongamos un triángulo esférico en el cual dos de sus lados φ y ψ puedan variar, conservándose constante el tercer lado μ y el ángulo opuesto C , y verificándose además la relación

$$\frac{\operatorname{sen}^2 C}{\operatorname{sen}^2 \mu} = k^2, \quad (9)$$

en la cual $k < 1$. En virtud de esta desigualdad debe verificarse $\operatorname{sen} C < \operatorname{sen} \mu$, lo cual indica que $C < \mu$ si el ángulo y el lado son agudos, y $C > \mu$ si son obtusos. Supongamos este último caso (fig. 1.^a).

$C > 90^\circ$, φ y ψ menores que 90° . Si PQ es el arco de círculo máximo cuyo polo es C se ve que trazando los arcos AI , BI' normales á φ y ψ , los puntos I ó I' , deben caer entre P y Q porque $PI = 90^\circ = QI$. Luego A y B son agudos. — En el caso de ser C agudo, se demostraría que si A es agudo, también, B debe ser obtuso y recíprocamente.

Supongamos que C y μ se conservan constantes, así como la relación (9), vamos á demostrar que φ y ψ quedan, al variar, relacionados por la igualdad

$$\int_0^\varphi \frac{dx}{\sqrt{1-k^2 \operatorname{sen}^2 \varphi}} + \int_0^\psi \frac{dy}{\sqrt{1-k^2 \operatorname{sen}^2 \psi}} = S, \quad (10)$$

en la cual S es una constante.

En efecto, sea $A'B'$ una posición del lado μ infinitamente próxima de AB y m y n las proyecciones de A' y B' sobre el lado AB ; deberá verificarse

$$Bn = -Am,$$

poniendo en vez de Bn y Am sus valores y teniendo en cuenta que,

$$\begin{cases} \frac{\operatorname{sen}^2 A}{\operatorname{sen}^2 \psi} = k \\ \frac{\operatorname{sen}^2 B}{\operatorname{sen}^2 \varphi} = k^2 \end{cases}$$

y pasando todo al primer miembro queda

$$d\varphi \sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi} + d\psi \sqrt{1-k^2 \sin^2 \psi} = 0$$

ecuación equivalente a la (10).

Se ve en el triángulo esférico, que para

$$\psi = 0 \quad \text{»} \quad \varphi = \mu$$

luego

$$\int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}} + \int_0^\psi \frac{d\psi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \psi}} = \int_0^\mu \frac{d\mu}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \mu}} \quad (11)$$

si damos al límite superior μ de la integral del segundo miembro un valor igual al tercer lado del triángulo esférico, hemos resuelto, así, gráficamente el problema de sumar integrales; el valor analítico de μ vendrá dado por la ecuación

$$\cos \mu = \cos \varphi \cos \psi - \sin \varphi \sin \psi \sqrt{1-k^2 \sin^2 \mu} \quad (12).$$

Resolvimos ante esta cuestión partiendo de otra forma de las integrales elípticas; fácil es demostrar que la fórmula

$$y \sqrt{(1-x^2)(1-k^2 x^2 y^2)} + x \sqrt{(1-y^2)(1-k^2 y^2)} = C \quad (13)$$

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2 x^2)}} = S$$

á que llegábamos en aquel caso y la (13) dan el mismo valor para μ .

En efecto, para pasar de una á otra, hay que efectuar la transformación

$$x = \sin \varphi \quad \text{»} \quad y = \sin \psi$$

con lo cual la (13) se convierte en

$$\frac{\sin \varphi \cos \psi \Delta \psi + \sin \psi \cos \varphi \Delta \varphi}{1-k^2 \sin^2 \varphi \sin^2 \psi} = \sin \mu \quad (14),$$

adoptando la notación de Jacobi $\Delta \varphi = \sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}$; escribiendo las ecuaciones

$$\begin{cases} MP = \sqrt{O^2 P - r^2} & \text{»} & \overline{O' P^2} = R^2 + a^2 + 2 a R \cos 2 \varphi = (R+a)^2 - 4 R a \sin^2 \varphi \\ MQ = \sqrt{O^2 Q - r^2} & \text{»} & \overline{O' Q^2} = R^2 + a^2 + 2 a R \cos 2 \psi = (R+a)^2 - 4 R a \sin^2 \psi \end{cases}$$

sustituyendo en la (16) y haciendo

$$K^2 = \frac{4 R a}{(R+a)^2 - r^2} < 1,$$

condición que se cumple haciendo r suficientemente pequeño, queda la relación que queríamos obtener (15).

Ahora bien, si hacemos $\varphi = 0$, y designamos por x el valor correspondiente de ψ ,

$$\int_0^\psi \frac{d\psi}{\Delta \psi} - \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\Delta \varphi} = \int_0^x \frac{dx}{\Delta \varphi}$$

pero se ve en la figura que x está dado por $\frac{A R}{2 R}$ valor que se obtiene trazando por A una tangente á la circunferencia interior.

JUAN GONZÁLEZ PIEDRA.

(Se continuará.)

$$\begin{cases} \cos \varphi = \cos \mu \cos \psi + \sin \mu \sin \psi \Delta \varphi \\ \cos \psi = \cos \mu \cos \varphi + \sin \mu \sin \varphi \Delta \psi \end{cases}$$

que pueden sustituir á la (12), eliminando $\cos \mu$ entre ambas ecuaciones se saca

$$\begin{aligned} \sin \mu &= \frac{\cos^2 \psi - \cos^2 \varphi}{\sin \varphi \cos \psi \Delta \psi - \sin \psi \cos \varphi \Delta \varphi} \\ &= \frac{(\sin^2 \varphi - \sin^2 \psi)(\sin \varphi \cos \psi \Delta \psi + \sin \psi \cos \varphi \Delta \varphi)}{\sin^2 \varphi \cos^2 \psi \Delta^2 \psi - \sin^2 \psi \cos^2 \varphi \Delta^2 \varphi} \end{aligned}$$

y como el denominador es divisible por $(\sin^2 \varphi - \sin^2 \psi)$, efectuando la división, resulta la (14); lo que prueba la identidad de ambos procedimientos.

Método de Jacobi.—El otro procedimiento geométrico es debido á Jacobi, y se funda, como hemos dicho, en una construcción muy sencilla.

Sean (fig. 2.^a) O, O' dos circunferencias, a la distancia de sus centros, y R y r , sus radios. Tracemos la tangente en un punto M , á la circunferencia interior y supongamos

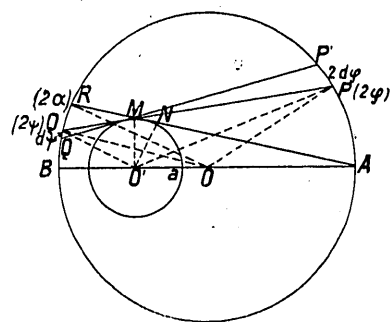


Fig. 2.^a

$$\begin{cases} \frac{AP}{R} = 2 \varphi \\ \frac{AQ}{R} = 2 \psi \end{cases}$$

Vamos á demostrar que si la recta PQ se mueve, conservándose siempre tangente á la circunferencia O' , los diversos valores de los arcos φ y ψ satisfacen á la ecuación

$$\int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}} - \int_0^\psi \frac{d\psi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \psi}} = S, \quad (15)$$

siendo K una constante que depende de los elementos de la figura.

Sea $P'Q'$, una tangente infinitamente próxima á PQ , el punto de intersección es en el límite, el punto M , de tangencia de la PQ , y los triángulos semejantes que se forman dan, llegado el límite

$$\frac{d\varphi}{d\psi} = \frac{MP}{MQ}; \quad (16)$$

pero

REVISTA EXTRANJERA

Economías que pueden realizarse en la producción y empleo del vapor (1).

M. Walther-Meunier, en el boletín de la *Société industrielle* de Mulhouse, recuerda á la Asociación alsaciana de propietarios de máquinas de vapor, las indicaciones que les hizo, hace unos diez años, para obtener economías en la producción y en el empleo del vapor por medio de una instalación racional y de un funcionamiento regular de los aparatos que sirven para la producción, la canalización y el consumo del vapor.

Como el precio de las hullas ha subido considerablemente, debe llamarse de nuevo la atención de los industriales sobre los medios de obtener economías en el consumo de combustible. Con este objeto, en su nueva publicación, el Sr. Walther-Meunier resume cuanto dijo diez años ha, y añade las observaciones que ha hecho posteriormente.

(1) De *Le praticien industriel*.