

obtenidos haciendo ensayos muy minuciosos pero con un solo cemento. No puede, por consiguiente, admitirse sin ulteriores trabajos, que sean ya conocidas las relaciones entre las resistencias que se obtienen con las arenas normales de distintos países; es más, tengo motivos para creer que no hay constancia en dichas relaciones, ni aun empleando cementos de igual naturaleza.

De todos modos, son interesantes los datos que cita, y que en su mayor parte no copiaré, limitándome á comentar las conclusiones bastante vagas á que llega y á poner de mi parte lo que pueda para precisarlas un poco.

Respecto al origen y preparación de las arenas ensayadas, dice lo que en extracto traduzco á continuación.

Número 1. *Arena prusiana de Freienwalde*.—Se saca de una mina abierta en una capa terciaria de arena de cuarzo puro, que ha sido excavada en la formación carbonífera gris del valle de Hammer por la razón social Henneberg y C.^a Se lava, seca y se para la parte que pasa por el tamiz de 60 mallas y queda en el de 120. El grueso del alambre es de 0,38 y 0,32 mm., respectivamente, y la abertura resultante de 0,87 y 0,59 mm.

2. *Arena del Rhin*.—Preparada del mismo modo que la prusiana. (Esta arena es la que se emplea más frecuentemente en la Alemania meridional, y dudo bastante si, como parece, no hay un sitio determinado para sacarla, que sea de propiedades constantes.)

3. *Arena normal austriaca*.—Se extrae de los cerros arenosos próximos á Lemberg, y se toma como normal la que queda después de separar la que pasa por el tamiz de 144 mallas y la que queda en el de 64. Los gruesos de los alambres son 0,30 y 0,40 mm. y la luz de las mallas es de 0,53 y 0,85.

4. *Arena normal suiza*.—La prepara la casa Robert Vigier y Compañía, de Luterbach (Solothorn), por trituración de rocas cuarzosas, y se lava y tamiza con tamices de 64 y 144 mallas con alambre de 0,4 y 0,3 mm. de diámetro. Con los granos de cuarzo van mezclados bastantes de caliza y otras materias. Parece ser que el profesor Tetmajer estudiaba, cuando remitió las muestras, la adopción de una arena normal importada.

5. *Arena normal rusa*.—Esta nos interesa tan poco, que no he tenido en cuenta los resultados obtenidos con ella por Herr Gary; por eso en los cuadros que aparecerán en lo sucesivo, se notará que del núm. 4 saltaré al 7, pues siendo las arenas rusa y noruega de una composición granulométrica, totalmente distinta de la de las otras, no creo prudente hacerlas entrar en las comparaciones. Sin embargo, extracto del trabajo de Gary la descripción de ambas.

Para acercarse á las circunstancias de la práctica, se emplea en Rusia una mezcla por partes iguales de la arena que queda entre los tamices de 64 y 144 mallas, y la que queda entre éste último y el de 225.

No dice la procedencia, pero por las fotografías á escala ¹⁰/₁, que aparecen al final de la monografía, parece que es una arena natural angulosa.

6. *Arena normal noruega*.—Procede del Dramen, tamizada dos veces, una antes y otra después de lavarla (supongo que el primer tamizado será para simplificar la operación del lavado).

Se obtiene como la rusa, por mezcla á partes iguales, de las que quedan entre los tamices de 76, 124 y 235 mallas.

7 y 8. *Arenas normales francesas*.—La normal de Cherburgo, procede de la trituración de las cuarcitas de la cantera de Roule, lavada y tamizada con los tamices de 64 y 144 mallas (alambre de 0,4 y 0,3).

La de la Comisión francesa es la de las playas de Leucate; procede de descomposición de rocas de los Pirineos. Las corrientes litorales la depositan perfectamente lavada en una extensa playa, siendo notable la igualdad y la constancia de la composición de esta arena, que, sin embargo, no es de cuarzo puro. Los vientos clasifican además la arena por tamaños de granos, pudiendo recogerse del que se quiera (dentro de ciertos límites poco distantes) con sólo acercarse más ó menos á la orilla.

La mayor parte es cuarzo translúcido, opalino ó rojizo, con

una fuerte mezcla de feldespato y algunos granos oscuros de un gris verdoso.

El conjunto es pardo rojizo. (Extraño mucho que no se cite la mica negra, abundante.) Contiene también granos calizos procedentes, en parte, de las conchas de los moluscos marinos. (En el Laboratorio central se ha conseguido preparar placas para el microscopio con granos previamente clasificados por orden de densidades, desgastados con asperones hasta hacerlos transparentes, y en algunos de los más densos se ha podido reconocer que existían los elementos esenciales de las rocas graníticas, feldespato, cuarzo y mica dentro del mismo grano.)

Se toma como arena normal la que pasa por un tamiz de chapa perforada, con orificios circulares de 1,5 mm. de diámetro y queda encima de otro de 1 mm.

No copio lo referente á arena mezclada; con más detalles puede verse en las publicaciones de la Comisión francesa.

9. *Arena normal inglesa*.—El profesor B. C. Unwin, á quien se dirigió el Laboratorio de Berlín pidiéndole noticias acerca de las arenas normales usadas en Inglaterra, contestó que allí no las había propiamente normales, por usarse poco las pruebas de cementos amasados con arena. Sin embargo, hace años había elegido Mr. Grat una arena de una colina de Leighton Buzzard para este objeto. Las normas inglesas prescriben que se ha de preparar esta arena del mismo modo que la alemana, con tamices de 60 y 140 mallas por cm.²

10. *Arena normal americana*.—Se obtiene de una roca cuarzosa muy dura del estado de Massachussets, por trituración y tamizado.

No dice, y es lástima, los procedimientos empleados para triturar las rocas compactas que suministran las arenas artificiales, pero de la de Cherburgo pueden verse todos los detalles en los trabajos de la Comisión francesa. Se emplean piedras ordinarias cuya distancia se va acercando y por las cuales y un tamiz giratorio pasan repetidas veces los detritus astillosos de las canteras de Roule, reducidos cada vez á granos de menor tamaño, y procediendo así se obtiene un mínimo de harina y los granos bastante redondeados.

La arena americana debe ser fabricada por compresión ó machaqueo, y más probablemente con máquina de mandíbulas; por lo menos, puede darse por seguro, juzgando por el aspecto francamente anguloso que muestra su fotografía, que no se fabrica con muelas de molino.

TORIBIO CÁCERES.

(Se continuará.)

GEOMETRÍAS IMAGINARIAS Ó NO EUCLIDIANAS

POR FEDERICO VILLARREAL

1. *Postulado de Euclides*.—Trescientos años antes de la era cristiana, en Alejandría y bajo el reinado de Ptolomeo I.º, el insigne matemático Euclides compuso sus célebres *Elementos de Geometría*, que hasta hoy sirven de texto con muy pequeñas transformaciones.

Tanto el criterio de igualdad por medio de la superposición, como sus definiciones y postulados, se han discutido por los geómetras de todos los tiempos; pero principalmente en este siglo la discusión del postulado V ha conducido á conclusiones inesperadas. Como se sabe, ese postulado lo enunció Euclides así: *Si una recta corta á dos rectas, formando los ángulos interiores del mismo lado, de manera que sumen menos que dos rectos, estas rectas prolongadas al infinito, se cortarán del lado en que los ángulos valen menos que dos rectos*.

De la discusión ha resultado, que no es posible modificar lo afirmado por Euclides y que tenía razón Newton de quejarse, por haberse dedicado á otras obras de matemáticas antes de haber estudiado y meditado los *Elementos* de Euclides; así como La-

grange, que decía que la Geometría era una lengua muerta desde Euclides, que el que no estudiaba esos Elementos para saber Geometría, se parecería al que aprendía latín ó griego en las obras modernas escritas en estos idiomas.

2. *Demostraciones directas.*—Se ha pretendido, sin conseguirlo, demostrar directamente el postulado de Euclides, ya tomando el caso particular en que uno de los ángulos interiores es recto y el otro agudo y bajando de esta oblicua perpendiculares á la secante, ya como Legendre, reduciéndose á la consideración de los biángulos; otros como Bertrand, de Génova, fundándose en la relación de ciertas magnitudes infinitas, en que el ángulo es un infinito de segundo orden, y el biángulo, espacio encerrado por la secante y dos paralelas, es un infinito de primer orden; y algunos, como Lamarle, han querido demostrar el postulado de Euclides, considerando la rotación de una recta alrededor de un punto móvil; pero todas estas demostraciones, ó son falsas, ó implícitamente suponen un postulado, consecuencia inmediata del que se desea demostrar.

3. *Demostraciones indirectas.*—Una segunda vía, que tampoco ha dado buen resultado, consiste en demostrar una de las consecuencias del postulado, con la proposición: que *por un punto sólo se puede trazar una paralela á otra recta dada*, ó bien el famoso teorema que *los tres ángulos de un triángulo rectilíneo valen juntos dos rectos*. Legendre demostró que la suma no pasa de dos rectos, y que si existe un solo triángulo en que esa suma valga dos rectos, lo mismo sucedería en todos los triángulos rectilíneos posibles; pero no pudo pasar más allá.

El mismo geómetra pretendió la demostración directa, partiendo de los triángulos que tienen un lado y los dos ángulos adyacentes, respectivamente iguales, y creyendo que el tercer ángulo era independiente de ese lado, lo que motivó una viva discusión; lo mismo que la otra demostración que dedujo, construyendo una serie de triángulos, en que dos de los ángulos tendían á cero.

Otros matemáticos, admitiendo que el área de un plano indefinido equivale al espacio encerrado por cuatro ángulos rectos, consideraron los ángulos externos de un triángulo, haciendo girar cada lado prolongado alrededor de su vértice hasta confundirse con el lado inmediato; ó bien estudiaron el espacio encerrado por los lados del triángulo prolongados indefinidamente por ambos extremos; pero tanto, estas demostraciones, como la de Cantor y otras, carecen del rigor matemático, ó bien suponen postulados menos claros que el de Euclides.

4. *Geometría de Lowatschewski.*—Los geómetras del Norte de Europa, á principios de este siglo, dieron un ataque tremendo al postulado de Euclides, que si bien resistió impertérritamente, se conmovió hasta los cimientos el edificio geométrico, á tal punto, que los matemáticos, emocionados, temieron por la estabilidad de verdades seculares, cuya exactitud se cree eterna.

En efecto, el matemático ruso Lowatschewski, de Kazan, se dijo: si el postulado depende de los demás axiomas geométricos, admitiendo éstos y negando aquél, debe llevarse á proposiciones contradictorias. Como la consecuencia inmediata del referido postulado, es que *por un punto sólo se puede trazar una paralela á una recta dada*, el geómetra ruso admitió, que *por un punto se pueden trazar muchas paralelas á una recta dada*. Las consecuencias eran contrarias á las de la Geometría de Euclides, así: *los tres ángulos de un triángulo valían menos de dos rectos; las tres perpendiculares en el medio de los lados de un triángulo pueden ser paralelas*, y así multitud de teoremas, que aunque distintos de los actuales, sin embargo no tenían contradicción entre sí.

Tanto el matemático húngaro Juan Bolyai, como Gauss en su correspondencia con Shumacher, admitieron las consecuencias lógicas del geómetra ruso; se llamó á esta Geometría *imaginaria* y se promovió la cuestión de cuál era la verdadera, si la del matemático alejandrino ó la del ruso, y además, siendo las consecuencias infinitas, ¿quién podía asegurar que no viniera la contradicción en la nueva Geometría?

5. *Geometría de Riemann.*—La cuestión no había terminado y avanzó inmensamente, cuando Riemann, geómetra alemán, aceptando las ideas de Lowatschewski, tomó como postulado que *por un punto no se puede trazar ninguna paralela á una recta dada*. Hé allí una tercera Geometría distinta de las anteriores, cuyas consecuencias son también diferentes; así: *los tres ángulos de un triángulo valen más de dos rectos; existen puntos de que pueden bajar muchas perpendiculares á una recta; hay casos en que: por dos puntos pueden pasar muchas rectas; es decir: que las rectas de esta Geometría siempre se cortan en dos puntos*.

Este segundo ataque, dirigido contra el postulado de Euclides, no sólo fué ineficaz, sino que enderezando el edificio geométrico, mostró que sus bases tienen la suficiente estabilidad, y en lugar de seguir el consejo que da Félix Dauge en su Metodología matemática, de evitar hablar á los principiantes en términos que les haga creer que la Geometría no reposa sobre bases inatacables, es mejor la opinión de H. Poincaré, que es necesario demostrar que la Geometría euclidiana no tiene nada que temer, ni de las experiencias nuevas, ni de las hipótesis del porvenir.

6. *Geometría esférica.*—Los trabajos de Riemann, á mediados de este siglo, han inspirado la mayor parte de las investigaciones recientes, entre las cuales pueden citarse las de Beltrami y de von Helmholtz, así como la tarea que otros se han impuesto, de dar á conocer estos resultados, como J. Houel, que ha traducido del alemán el *Estudio sobre la teoría de las paralelas* por Lowatschewski, y del italiano el *Ensayo de la interpretación de la Geometría no euclidiana*, por E. Beltrami.

Los primeros indicios de explicación los proporcionó, como hemos dicho, la Geometría de Riemann, porque sus teoremas referidos á las rectas, son los mismos que se conocían para los círculos máximos de una esfera, pues no es posible por un punto de la esfera trazar un círculo máximo paralelo á otro, siempre se cortan en dos puntos diametralmente opuestos, y del polo de un círculo máximo se le pueden bajar infinidad de círculos máximos perpendiculares; finalmente, hace siglos que se sabe, que en un triángulo esférico los tres ángulos valen más de dos rectos; siendo el *exceso esférico*, igual al área del triángulo dividida por el cuadrado del radio de la esfera.

Las necesidades de la astronomía, geodesia y navegación había obligado, desde la más remota antigüedad, á estudiar los triángulos esféricos, pero éstos no son las únicas figuras que se pueden considerar sobre la esfera; solamente á fines del siglo pasado, los geómetras del Norte de Europa se ocuparon de resolver sobre la superficie de la esfera, cuestiones análogas á las que se proponen sobre el plano.

Lexell, en las actas de San Petersburgo, trató de las propiedades de los círculos descriptos sobre la esfera, análogas á las que tienen los círculos construidos sobre el plano, indicando el elegante teorema, sobre la curva, lugar geométrico, de los vértices de los triángulos esféricos, que tienen la misma área ó igual base. Fuss, en dos memorias, resolvió algunos problemas de la Geometría de la esfera y estudió la *elipse esférica*, lugar geométrico del vértice de los triángulos que tienen la misma base, siendo constante la suma de los otros dos lados; demostrando que es la línea de curvatura de los conos de segundo grado; cuando esa suma vale una semicircunferencia, la curva es un círculo máximo. Estos estudios se continuaron por Schubert.

La Geometría esférica quedó estacionaria hasta mediados de este siglo, en que Sorlin, mediante la teoría de las *figuras suplementarias*, dedujo el teorema, que por esa dualidad, corresponde al de Lexell; del mismo modo Maunus, de Berlin, demostró que en la elipse esférica, los dos arcos del círculo máximo, trazados de los focos á un punto de la curva, forma ángulos iguales con el arco máximo tangente de ese punto.

Desde 1810, algunos geómetras habían resuelto diferentes cuestiones en la Geometría de la esfera y habían buscado sus análogas en el plano; así, Lhuillier, de Génova, ha encontrado en los triángulos esféricos rectángulos, el teorema de Pitágoras sobre el cuadrado de la hipotenusa, y ha determinado el centro de

las medias distancias de un triángulo esférico. Gergonne, ha dado el teorema, que *cuando la suma de dos lados opuestos es igual á la suma de los otros dos lados, el cuadrilátero es circunscriptible al círculo*, propiedad que, como se sabe, corresponde también al cuadrilátero rectilíneo. Gueneau d'Aumont, encontró que *la suma de dos ángulos opuestos del cuadrilátero, es igual á la suma de los otros dos ángulos, cuando el cuadrilátero esférico está inscripto en el círculo*; teorema, no solamente análogo al del cuadrilátero rectilíneo, sino que es una consecuencia de la teoría de las figuras suplementarias. Steiner, usando la misma teoría, ha demostrado que *la envolvente de las bases de los triángulos que tienen la misma superficie y un ángulo igual, es una elipse esférica*, y ha reconocido en esta elipse dos arcos de círculo máximo, que tienen la misma correspondencia que las asíntotas en la hipérbola plana.

El geómetra alemán Steiner, en su memoria sobre la *Transformación y división de las figuras esféricas* por medio de construcciones gráficas, y Gudermann, en su *Geometría esférica analítica*, por medio de transformaciones algébricas, han tratado de pasar, por vía de analogía, de las propiedades de las figuras planas á las trazadas sobre la superficie de una esfera, y como haciendo el radio infinito se convierte la esfera en un plano, resulta que la *Geometría plana* es un caso particular de la *Geometría esférica*; todos los teoremas de ésta, tienen sus correspondientes en aquélla, haciendo el radio infinito.

Como no es posible representar materialmente ideas abstractas, se forman schemas sobre las que versa el razonamiento; así, trazamos en una pizarra dos rectas paralelas; pero realmente no son las rectas geométricas que sólo tienen longitud, ni tal vez son verdaderas paralelas; pero las consideramos como tales, y si esto sucede en la Geometría plana, con más razón son puras indicaciones las figuras esféricas que por medio de curvas arbitrarias trazamos sobre un plano y sobre las que razonamos al tratar de la Geometría esférica.

De allí resulta la interpretación de la *Geometría de Riemann*, que trazando rectas sobre un plano, sus razonamientos versaban realmente sobre la *Geometría esférica*, representando dichas rectas círculos máximos y, por lo tanto, no estaba en contradicción con la *Geometría de Euclides*, en que las rectas representan líneas distintas de los círculos máximos, ó si se quiere, estos mismos círculos en el caso particular de que su radio es infinito.

7. *Geometría pseudo-esférica*.—Faltaba interpretar la *Geometría de Lowatschewski*, de lo que se encargó Beltrami; partiendo de la superposición, como criterio de igualdad, resulta: que si la superficie en que está trazada la figura, es *extensible*, se cambiará la magnitud; si es *flexible*, se alterará en cierto modo la forma, conservando el área y las longitudes; luego admitiendo que las figuras estén construidas sobre superficies *flexibles é inextensibles*, se puede aplicar la superposición, como lo hizo Euclides, sin que sea necesaria la *rigidez*, de donde se deduce que la Geometría plana nunca cambia, hasta cierto punto, considerando el trazado sobre superficies desarrollables, como las cilíndricas y cónicas; además, la flexibilidad no varía en nada la forma, en aquellas superficies uniformes en todas sus partes y que los matemáticos llaman de curvatura uniforme. Como se sabe, Gauss demostró el famoso teorema sobre las superficies flexibles en que *es constante el producto de los radios de curvatura de las secciones principales*.

Dos figuras iguales, trazadas, cada una, sobre dos superficies flexibles correspondientes, se pueden superponer; por ejemplo: un triángulo construido sobre un plano y sobre un cilindro; pero una de ellas tiene que deformarse, solamente se conserva inalterable del todo, cuando las superficies flexibles tienen iguales los radios de curvatura de las secciones principales; esta superficie es la esfera, y entonces el producto citado es R^3 .

Cuando R es infinito, se tiene el *plano*, y las figuras trazadas sobre él constituyen la *Geometría de Euclides*. Cuando R es real y finita, resulta la *esfera*, y las figuras construidas sobre ella forman la *Geometría de Riemann*. Finalmente, si R es imagina-

ria y por lo mismo su cuadrado negativo, aparece la superficie llamada *seudo-esfera*, y las figuras, formadas sobre ésta, dan lugar á la *Geometría de Lowatschewski*, como lo demostró Beltrami, que en estas superficies los ángulos de un triángulo valen menos que dos rectos, y el *defecto esférico* es igual al área del triángulo dividida por el cuadrado del radio, y que trazando una línea geodésica, existe siempre por un punto cualquiera de la superficie una asíntota que separa las líneas secantes de aquellas que no cortan á la referida línea geodésica; todas pasan por ese punto, y el geómetra ruso las consideró como paralelas, supuesto que prolongadas al infinito no cortan á la geodésica; estas curvas del espacio las representó como rectas sobre el plano, de manera que sus razonamientos realmente se referían á las pseudo-circunferencias, que son hipérbolas equiláteras, trazadas en un plano perpendicular al plano de una circunferencia; en este plano trazaba Lowatschewski sus rectas representativas de esas hipérbolas equiláteras normales.

8. *Otra geometría imaginarias*.—Después de los importantes trabajos que acabamos de citar, se han explorado dos vías: la primera se encamina á los principios fundamentales de la Geometría y por lo tanto se dirige á la *Filosofía de las ciencias*; la segunda lleva por objeto generalizar las interpretaciones que se han dado á las *Geometrías no euclidianas* y por lo mismo su dirección es puramente matemática.

Así algunos geómetras, considerando que la rotación en su plano, de la mitad de un arco de círculo, alrededor del punto medio, no coincide con la otra mitad, por encontrarse entre sí las concavidades ó convexidades y como para demostrar que se puede siempre levantar en un punto una perpendicular á una recta se considera una recta móvil alrededor del punto, primitivamente confundida con la recta fija y después gira hasta coincidir con la prolongación; admitiendo como posible la rotación y rechazando que se pueda continuar hasta que las dos rectas se confundan en la prolongación, han constituido una *cuarta Geometría*, tan coherente como las tres anteriores; pero sus teoremas son mucho más extraños que los de Lowatschewski y de Riemann; tal como *una recta real puede ser perpendicular á sí misma; las oblicuas que equidistan del pie de la perpendicular son desiguales*. Lo que ha motivado una discusión reciente en 1889 por los Sres. Renouvier, Lechalas y Calirion bajo el nombre de *postulado de perpendicularidad*.

El mismo Riemann ha constituido una infinidad de geometrías diferentes, según la manera como se define la longitud de una curva. Como el número de axiomas implícitos en las demostraciones clásicas es mayor que el necesario, sería bueno reducirlos al mínimo; pero entonces se presenta la cuestión: primeramente, si es posible esa disminución, y en segundo lugar, si el número de axiomas necesarios y el de geometrías imaginables no es infinito; pero Sophus Lie ha demostrado el siguiente teorema, admitiendo: 1.º El espacio de n dimensiones. 2.º El movimiento de una figura invariable es posible. 3.º Se necesitan p condiciones para determinar la posición de esta figura en el espacio; entonces: *el número de geometrías compatibles con estas premisas será limitado y siendo n dado se puede asígnar á p un límite superior, y por consiguiente es finito el número de geometrías de tres dimensiones*; muchas de las geometrías de Riemann son puramente analíticas, y no se prestan á demostraciones análogas á las de Euclides.

H. Poincaré, discutiendo la naturaleza de los axiomas geométricos, llega á la conclusión que no son *juicios sintéticos, ni hechos experimentales*, porque sería imposible negarlos, y no cabe la experiencia sobre rectas y circunferencias ideales. Según ese geómetra son *convenciones*, y la elección en todas las posibles es guiada por los hechos experimentales; pero permanece libre solamente limitándola á la necesidad de evitar contradicción, es decir, que los *axiomas de geometría son definiciones disfrazadas*.

9. *Geometría de las superficies*.—La segunda vía, como hemos dicho, se refiere á la Geometría de las superficies; como se sabe, en cada punto de una superficie se puede trazar, general-

mente, un plano tangente y una normal, trazando planos que pasen por ésta, resultan diferentes secciones normales; se llaman principales las que tienen mayor ó menor radio de curvatura, y según el teorema de Euler se expresa el radio de curvatura de una sección normal en función de los radios principales, llamándose el punto un *ombigo*, cuando todas las secciones normales tienen igual curvatura; en cuanto á las secciones oblicuas, mediante el teorema de Meunier, se determina su radio de curvatura, porque es la proyección del radio de la sección normal que pasa por la misma tangente.

Tomando dos puntos sobre la superficie, se concibe que entre ellos se puede trazar una línea que sea la más corta, la que se llama *línea geodésica*, cuyo plano osculador pasa por la normal. Cada superficie tiene una Geometría propia, las líneas geodésicas corresponden á las rectas del plano y á las circunferencias máximas en la esfera. Existen propiedades comunes para todas estas geometrías; así, el lugar geométrico de todos los puntos que equidistan de uno de la superficie, es normal á las geodésicas que forman los radios, y si se traza la curva que corresponde á la elipse ó hipérbola, la línea geodésica tangente es la bisectriz del ángulo de las geodésicas, que forman los radios vectores.

Ya hemós dicho que la geometría de la esfera y de la pseudo-esfera han sido estudiadas detenidamente, lo mismo la Geometría del hiperboloide de una hoja ha sido considerada desde 1847 por Plucker, y por Chasles en 1861. En las superficies de segundo grado, el producto de la perpendicular bajada del centro sobre el plano tangente, multiplicada por el diámetro de la sección central, paralelo á la tangente de la geodésica, es constante; este producto es el mismo para todas las líneas geodésicas que pasan por un ombigo; las geodésicas que unen un punto cualquiera á dos ombigos hacen ángulos iguales con las líneas de curvatura que pasan por este punto, y el referido producto tiene el mismo valor para todas las geodésicas tangentes á la misma línea de curvatura, y así multitud de propiedades, que representándolas sobre el plano, conducen á teoremas que no coincidirían con los de la Geometría de Euclides; aunque otros estarían en conformidad, porque las líneas de curvatura, las líneas geodésicas, las líneas de nivel y las líneas de máxima pendiente gozan de muchas propiedades comunes con las rectas, que las representan en el plano.

10. *Geometría más cómoda*.—De lo anterior se deduce, en conclusión, que ninguna Geometría puede ser más verdadera que otra, únicamente pueden ser *más cómodas*, y bajo este punto de vista la *Geometría de Euclides* es y será la que ofrezca más comodidades, ya porque es más simple, ya porque se coordina bastante bien con las propiedades de los sólidos naturales.

Se ha querido apelar á la Astronomía para decidir entre las tres geometrías principales; porque si la de Lowatschewski es verdadera, la paralaje de una estrella lejana sería finita, en la de Riemann sería negativa, y en la de Euclides tendería á cero; pero aun admitiendo que la Astronomía indicase algo sobre esto, todavía quedaba la naturaleza de la trayectoria luminosa, y sería más ventajoso admitir que ésta no era rigurosamente línea recta, que cambiar la *Geometría de Euclides*; por consiguiente, ésta no tiene nada que temer de ulteriores experiencias.

ESTABILIDAD

de las construcciones de hormigón de cemento armado ⁽¹⁾.

(CONTINUACIÓN)

Dividiendo el segundo miembro por el coeficiente de seguridad 2,5, tendremos:

$$M = 112.000 \, b \, h^2 \quad (77)$$

ó bien

$$b \, h^2 = 0,000.008.93 \, M \quad (78)$$

(1) Véase el número anterior.

M. Consideré indica, que el coeficiente ψ es igual á 0,280 cuando el tanto por ciento de metal llega á 0,0217. Por consiguiente, la sección de la armadura ω debe ser determinada en caso de que se apliquen las ecuaciones (77) y (78) por la fórmula:

$$\omega = 0,0217 \, b \, h \quad (79)$$

La fórmula (78) da:

$$b \, h = 0,000.008.93 \, \frac{M}{h} \quad (80)$$

ó introduciendo este valor en la relación (79)

$$\omega = 0,000.000.194 \, \frac{M}{h} \quad (81)$$

Si se comparan las relaciones (80) y (81) con las ecuaciones deducidas de las fórmulas de M. Planat (72) y (72 bis), se ve que las reglas de M. Consideré exigen más metal y menos hormigón cuando las vigas deben tener la misma altura y resistir al mismo momento flector.

Si se hace la comparación con las relaciones (73) y (74), deducidas de nuestras fórmulas prácticas del párrafo 10, se observa que las reglas de M. Consideré exigen menos hormigón y menos metal que el cálculo que proponemos. Las diferencias (que son próximamente de 30 por 100), provienen principalmente de que hemos adoptado un coeficiente de seguridad notablemente superior á 2,50 admitido por M. Consideré como suficiente.

Aumentando este coeficiente hasta 3,30, la fórmula (77) deducida de las establecidas por este sabio Ingeniero, da

$$M = \frac{280.000}{3,30} \, b \, h^2 = 84.848 \, b \, h^2 \quad (82)$$

de donde se deduce:

$$b \, h^2 = \frac{3,30}{280.000} \, M = 0,000.011.79 \, M \quad (83)$$

y

$$b \, h = 0,000.011.79 \, \frac{M}{h} \quad (84)$$

Introduciendo este valor en la ecuación (79), se obtiene:

$$\omega = 0,0217 \, b \, h = 0,000.000.256 \, \frac{M}{h} \quad (85)$$

Obsérvese que las relaciones (82) y (83) son casi idénticas á las (34) y (35) del párrafo 10.

Lo mismo sucede con las ecuaciones (84) y (85) comparadas con nuestras fórmulas (73) y (74), deducidas de las (35) y (36) del párrafo 10.

Nuestra fórmula (73) exige algo más de hormigón que la (84), deducida de las reglas de M. Consideré; en cambio, la (85) de M. Consideré exige un poco más de metal que nuestra fórmula (74). Pero las diferencias entre los resultados que daría la aplicación de estas diversas fórmulas carecen de importancia.

Obsérvese también que las fórmulas del párrafo 4, obtenidas asimilando la viga de hormigón armado á una bóveda cuyo empuje ha sido anulado por un tirante, dan resultados casi idénticos á los de las reglas establecidas por M. Consideré.

Cierto es que, según el método de este Ingeniero, el coeficiente de seguridad de nuestras vigas no pasaría de 3,30, en vez de 4, que es la cifra que nos ha servido para determinar los factores numéricos de las fórmulas del párrafo 10. Pero también esta diferencia es de poca importancia; no es imputable al método, sino á los valores numéricos que hemos atribuido á la resistencia muy variable del hormigón. Con el coeficiente 3,30, el hormigón de las vigas calculadas según las reglas de M. Consideré, experimentará una presión de $\frac{1.500.000}{3,30} = 455.000$ kgs. por m.², mientras que, con arreglo á nuestras fórmulas del párrafo 10,