

delo de ensayo, de modo que ninguna de ellas ejerza una acción preponderante. También se halla, aun para morteros conservados durante mucho tiempo, que las resistencias á la compresión permanecen sensiblemente proporcionales á las energías relativas de los cementos, así como lo atestigua, tanto para las pruebas de mortero arenoso como para las de cemento puro, el adjunto cuadro D, relativo á las mismas mezclas que el cuadro C.

CUADRO D

MEZCLA		A	B	C	D
Resistencia á la compresión por centímetro cuadrado, después de una conservación de seis años en el agua del mar.....	Cemento puro...	510	390	268	105
	Mortero arenoso..	313	210	137	79

(Se continuará.)

FERNANDO G. ARENAL

ATENE0 DE MADRID

CONFERENCIAS DEL SR. ECHEGARAY

En el último artículo relativo á estas conferencias, publicado en el número 1.150 de esta REVISTA, quedó demostrado el teorema de Ábel y abierto el camino á una serie de consideraciones que constituyen la teoría de Galois.

En aquel artículo demostramos, además, que si $\psi(V)$ es un factor irreducible de la resolvente de Galois, $\psi(V) = 0$, las raíces de la ecuación dada pueden expresarse en función de las de este factor sin que varíen las características de las funciones; es decir, que si escribimos las raíces $x_1, x_2, \dots, x_n$ en función de una V , de $\psi(V) = 0$, con lo cual tendremos

$$x_1 = R_1(V_1), x_2 = R_2(V_1), x_3 = R_3(V_1), \dots, x_n = R_n(V_1),$$

se reproducen las raíces de $f(x) = 0$ sin más que sustituir en los segundos miembros, en vez de V , otra raíz cualquiera de la resolvente parcial $\psi(V) = 0$. De suerte que las expresiones

$$R_1(V_h), R_2(V_h), R_3(V_h), \dots, R_n(V_h)$$

son las mismas raíces $x_1, x_2, \dots, x_n$, si bien en distinto orden que el establecido más arriba; por tanto, puede escribirse la serie anterior de este otro modo:

$$x_\alpha, x_\beta, x_\gamma, \dots, x_\lambda$$

en que $\alpha, \beta, \gamma, \dots, \lambda$ es una permutación de los números 1, 2, 3, ..., n.

Dando á h los valores 2, 3, ..., r, siendo r el grado de $\psi(V)$, y agregando las series que resulten á la primera que hemos escrito, se forma el siguiente cuadro:

$$\begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & \dots x_n \\ x_\alpha & x_\beta & x_\gamma & \dots x_\lambda \\ x_{\alpha_1} & x_{\beta_1} & x_{\gamma_1} & \dots x_{\lambda_1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{\beta_{r-2}} & x_{\beta_{r-2}} & x_{\gamma_{r-2}} & \dots x_{\lambda_{r-2}} \end{array}$$

compuesto de $nr = N$ elementos, que son las raíces de la ecuación dada $f(x) = 0$.

Este cuadro se llama *cuadro de Galois* y es importantísimo en toda esta teoría, porque de él dedujo aquel célebre matemático el grupo que lleva su nombre, grupo en que parecen reflejarse todas las propiedades de la ecuación $f(x) = 0$, y que es el fundamento de todo el método.

Combinando la primera línea del cuadro de Galois con ella misma y con todas las demás, se forman las sustituciones

$$\begin{array}{l} \left| \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{array} \right| = S_1 = 1; \quad \left| \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ x_\alpha & x_\beta & \dots & x_\lambda \end{array} \right| = S_2; \\ \left| \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ x_{\alpha_1} & x_{\beta_1} & \dots & x_{\lambda_1} \end{array} \right| = S_3; \dots \left| \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ x_{\alpha_{r-2}} & x_{\beta_{r-2}} & \dots & x_{\lambda_{r-2}} \end{array} \right| = S_r \end{array}$$

Galois demostró que estas sustituciones forman un grupo, y le llamó *grupo de la ecuación $f(x) = 0$* .

La demostración de este importante teorema es muy sencilla, porque basta probar que el producto de dos sustituciones cualesquiera de éstas es otra de la misma serie.

Recordando la manera de obtener el cuadro de Galois y el grupo de la ecuación, parece que este grupo no es único y que corresponderá uno á cada factor irreducible de $\Psi(V)$. De suerte que, descompuesta esta cantidad en factores irreducibles $\Psi(V) = \psi(V) \times \psi_1(V) \times \psi_2(V) \times \dots$, si partiendo de $\psi(V)$ formamos el cuadro de Galois; al partir de $\psi_1(V)$ parece que llegaremos á otro cuadro distinto, y así sucesivamente. Pero no sucede así: el señor EcheGARAY, siguiendo el método de Picard, demostró que todos los factores de $\Psi(V)$ son del mismo grado y, por tanto, que los diversos cuadros obtenidos tienen las mismas dimensiones; demostró, además, que esos cuadros son iguales, pues sólo difieren en el orden de colocación de las columnas y que, por tanto, los grupos deducidos de esos cuadros son idénticos, con la cual conclusión rectificó aquella á la que llega Picard, el cual dice que los grupos deducidos de los cuadros de Galois difieren en que todas las sustituciones están transformadas por otra.

Al estudiar las propiedades del grupo de una ecuación ó de Galois, hay que empezar por dar mayor latitud á algunos conceptos que hasta ahora hemos restringido bastante.

Hasta aquí siempre que hemos hablado de la invariabilidad de alguna función cuando se la aplica una sustitución cualquiera, nos referíamos á la invariabilidad de forma, esto es, á la absoluta. En adelante, y este es un concepto capital en la teoría de Galois, nos referiremos á la invariabilidad de valor *numérico*, aunque cambie la forma de la función. Para que sea posible la constancia del valor numérico de una función cambiando la forma, es preciso que exista alguna relación entre las cantidades ó letras que entran en la función.

El grupo de la ecuación $f(x) = 0$, $G(S_1, S_2, \dots, S_r)$, goza de propiedades importantísimas: la primera es que si una función $\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n)$ de las raíces de $f(x) = 0$ no cambia de valor numérico para todas las sustituciones del grupo G , ese valor numérico se podía expresar en función de los coeficientes de la ecuación dada.

Otra de las propiedades del grupo G es que si una función $\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n)$ se expresa en función de los coeficientes de $f(x)$ no cambia de valor numérico para todas las sustituciones del grupo de la ecuación.

Otra de las propiedades fundamentales del grupo de la

ecuación dice que éste es el único que satisface las dos condiciones anteriores.

Las demostraciones de estos teoremas son sumamente sencillas y no las indicaremos. Lo que sí vamos á demostrar es un importante teorema debido á Picard, sin el cual todo lo relativo á la invariabilidad del valor numérico de las funciones quedaría en tal estado de obscuridad, que sería difícil poder continuar este estudio por extremado que fuese el interés con que se lo hubiese emprendido.

Teorema de Picard.—Sea la función $\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n)$; si entre las raíces hay una ecuación de condición $\mu(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$, se podrá, por mediación suya, cambiar la forma de φ y convertirla en $\psi(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Sustituyendo en φ y ψ una misma sustitución del grupo de la ecuación, se obtendrán resultados iguales; la diferencia $\varphi - \psi$ será igual á cero. Luego $\varphi - \psi$ se expresa en función racional de las raíces de $f(x) = 0$ y, por tanto, en función de los coeficientes; luego es invariable para el grupo.

Este teorema permite comprender cómo todos los teoremas hasta ahora demostrados son ciertos, aunque no se trate de la invariabilidad de forma, sino de la de valor numérico.

Hemos visto cómo se formaba el cuadro de Galois y cómo de él se deducía el grupo de la ecuación. Este grupo $G(S_1, S_2, \dots, S_r)$ siendo $r = \frac{N}{n}$, nos va á servir para formar el llamado cuadro de los grupos de Galois.

Sea $G_1(S_1, S_2, \dots, S_p)$ un grupo del grupo G , se tendrá $r = p\sigma$. El cuadro que podríamos llamar de sustituciones de Galois (pues el anterior no es un cuadro de sustituciones, sino de raíces) se formaría, según sabemos, como se indica á continuación:

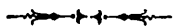
$$\begin{array}{ccccccc} \varphi_1 & \dots & T_1 S_1 & T_1 S_2 & \dots & T_1 S_p & \\ \varphi_2 & \dots & T_2 S_1 & T_2 S_2 & \dots & T_2 S_p & \\ \vdots & & & & & & \\ \varphi_\sigma & \dots & T_\sigma S_1 & T_\sigma S_2 & \dots & T_\sigma S_p & \end{array}$$

en el cual $T_1 = 1, T_2, \dots, T_\sigma$ son sustituciones del grupo G distintas de las de G_1 y de todas las anteriormente empleadas. De este cuadro, en que solamente la primera línea forma un grupo, se deducen las cantidades $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_\sigma$ que más adelante desempeñarán un papel muy importante. La φ_1 permanece invariable para todas las sustituciones de la primera línea; la φ_2 se obtiene aplicando á φ_1 las sustituciones de la segunda línea, pues todas dan el mismo resultado aunque alteran á φ_1 ; por último, φ_σ se obtiene aplicando á φ_1 las sustituciones de la última línea.

El cuadro de los grupos de Galois es el formado por los grupos de estas funciones φ así obtenidas, y se forma, según ya sabemos, como se indica á continuación:

$$\begin{array}{ccccccc} T_1 S_1 & T_1 S_2 & \dots & T_1 S_p & & & \\ T_2 S_1 T_2^{-1} & T_2 S_2 T_2^{-1} & \dots & T_2 S_p T_2^{-1} & & & \\ T_3 S_1 T_3^{-1} & T_3 S_2 T_3^{-1} & \dots & T_3 S_p T_3^{-1} & & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \\ T_\sigma S_1 T_\sigma^{-1} & T_\sigma S_2 T_\sigma^{-1} & \dots & T_\sigma S_p T_\sigma^{-1} & & & \end{array}$$

(Se continuará.)



Propiedades de los cementos y de los morteros (I).

En la fabricación de los morteros, debe efectuarse en seco la mezcla del cemento con la arena y añadir luego la cantidad de agua necesaria para reducirla á pasta. La cantidad de agua es difícil de determinar; se compone, por una parte, del 25 por 100 del peso del cemento, y por otra de lo necesario para mojar la arena. Conviene determinar por la experiencia esta cantidad en cada caso particular. Prácticamente se aconseja agregar el mínimo de agua, la cantidad estrictamente necesaria para obtener una pasta consistente, sobre todo cuando se ha de comprimir el mortero. El exceso de agua es perjudicial, porque, al evaporarse, deja huecos que disminuyen la compacidad de los morteros.

Es también interesante conocer el rendimiento del mortero, es decir, el volumen de mortero que se puede obtener con cantidades determinadas de cemento, arena y agua. Este rendimiento varía con el tamaño del grano de la arena. La arena fina da un rendimiento mayor. Según los experimentos de M. Candlot, para arenas de tamaño normal, con dosificaciones de 250, 350 y 450 kilogramos de cemento de Portland por metro cúbico de arena, se necesitan 162, 198 y 227 litros de agua; se obtienen así 0,890, 0,900 y 0,910 metros cúbicos de mortero; de suerte que hay 281, 238 y 478 kilogramos respectivamente por metro cúbico de mortero.

La *resistencia* de los morteros de cemento aumenta con el tiempo; alcanzan la tercera parte de la resistencia total al cabo de un mes, la mitad al cabo de tres meses, los dos tercios á los seis meses y el último tercio lo van adquiriendo lenta y progresivamente durante varios años.

La *adherencia* de los morteros con la piedra y el ladrillo aumenta con la proporción de cemento; para que se desarrolle bien es preciso que las superficies en contacto estén húmedas. La impermeabilidad crece también con la proporción de cemento.

Los *ensayos de resistencia* se efectúan con morteros de composición *normal*, es decir, compuestos de una parte en peso de cemento por tres partes de arena. La arena que se emplea con este objeto debe ser lavada con cuidado, pasada por un cedazo de 60 mallas por centímetro cuadrado y que no sea susceptible de pasar por otro de 120 mallas.

Las resistencias mínimas deben ser:

4 kilogramos por centímetro cuadrado á los 7 días, por tensión;

8 kilogramos por centímetro cuadrado á los 28 días, también por tensión.

Estas resistencias se duplican cuando los ejemplares se preparan con precauciones especiales y son comprimidas en los moldes. M. Candlot indica para estos dos casos 10 kilogramos y 18 kilogramos por centímetro cuadrado respectivamente.

Se admite que la resistencia á la compresión debe ser:

100 kilogramos por centímetro cuadrado á los 7 días;

180 kilogramos por centímetro cuadrado después de 28 días.

Se ha reconocido que después de un intervalo de 20 horas se puede volver á trabajar la pasta, si el fraguado no ha sido completo (cementos de fraguado lento). Añadiendo una nueva canti-

(1) Véase el número anterior.