nes respectivas, instalaciones eléctricas de cualquier importancia, no puedan hacerlo con un tranvía, aunque de las condiciones de tensión é intensidad de la corriente con que en él deba emplearse la energía eléctrica resulte su instalación más inofensiva que cualquiera de aquéllas.

Tiempo es ahora y ocasión propicia la presente, si no de eliminar por completo de nuestra legislación la contradicción de que antes hablábamos, refiriéndonos á la concesión de tranvías con tracción mecánica, de evitarla cuando de tracción eléctrica se trate.

Si se acepta la idea, por todos conceptos lógica y conveniente, de que las Diputaciones y los Municipios, en sus respectivas jurisdicciones, puedan conceder el establecimiento de instalaciones eléctricas, debe aceptase en su sentido más lato, sin limitaciones pueriles é injustificadas. La acción de la Administración debe limitarse á intervenir por medio de sus agentes en el examen y aprobación de los proyectos siempre, y solo extenderse á decretar la concesión cuando con tales instalaciones se ocupe dominio público ó propiedad del Estado. Tal es el sabio criterio de la legislación de Obras públicas, y no acertamos á comprender, ni creemos que nadie acierte á explicarnos satisfactoriamente, por qué ha de tener limitaciones y excepciones tal criterio en el especialísimo caso de que un tranvía deba ser movido mecánicamente, al terminarse un siglo en que la mecánica invade y se utiliza hasta en las necesidades más elementales de la vida, sin que á nadie se le haya ocurrido que por ese solo hecho deba el Ministerio de Fomento intervenir en ellas.

Hemos dicho que echábamos de menos entre las prescripciones administrativas algunas necesarias para que el Reglamento llene el objeto que debe proponerse, que en nuestro concepto es no solo regular la manera de conceder é instalar las obras destinadas á la utilización de la electricidad, sino favorecer el desarrollo de tan importante fuente de riqueza y de bienestar, refiriéndonos al decirlo á las servidumbres, y la razón es obvia; necesitando la energía eléctrica de conductores especiales para ser transportada á distancia, sea cualquiera el objeto á que se destine, según sean dichos conductores aéreos ó subterráneos, exigen, ó la fijación de apoyos de trecho en trecho en el suelo ó edificios, ó la apertura de zanjas en que se alojen aquéllos.

Para el establecimiento de unos ú otros no se necesita, en general, la adquisición absoluta y perpetua del terreno ó inmuebles á que los mismos afectan, sino simplemente el derecho á apoyarle en ellos ó á canalizarlos; no es, pues, una expropiación en el verdadero sentido de la palabra lo que procede, sino simplemente la imposición de una servidumbre.

Así como la natural propiedad del agua, como de todos los líquidos, á correr por la línea de máxima pendiente de una superficie, trae aparejada la natural servidumbre impuesta al predio inferior por el superior, y la ley aceptando el hecho regula los derechos y obligaciones que de él dimanan para los predios vecinos; así como la misma ley, al reconocer el derecho material al aprovechamiento de las aguas públicas para los diversos usos á que las mismas pueden destinarse, reconoce y ampara el que al concesionario asiste para hacerlas correr, establecer sus presas ó partidores y llegar á unas ú otras obras, etcétera, etc., por ó en terrenos de propiedad particular, sin cual complemento resultaría ilusorio el principal derecho arriba expresado, lógico y necesario es que esa misma ley, al reconocer al público ó al particular el derecho para utilizar esa otra forma de energía, comprendiendo que tal utilización trae consigo la necesidad de conducir esa energía, fije también los derechos y obligaciones que para unos y otros han de resultar del concienzudo estudio de la forma en que la conducción puede y debe hacerse.

Sabido es, de todos cuantos hayan intervenido directa ó indirectamente en la instalación de alguna red telefónica, las enormes dificultades de todo género en que se tropieza para tales obras, á pesar de que los artículos 5.° del Real decreto de 13 de Junio de 1886 y 26 del Reglamento de 6 de Junio de 1891 para la ejecución del Real decreto de 11 de Noviembre de 1890, declaran como de servicio público las expresadas redes, para todos los efectos de expropiación, servidumbres, etc., etc.; dificultades originadas precisamente, porque, aunque las citadas disposiciones hablan de servidumbres, no hallándose éstas definidas ni reglamentadas en parte alguna, resulta imposible el imponerlas. Que deberían, pues, definirse y reglamentarse las servidumbres en materia de conducciones de energía eléctrica, es evidente, aunque solo siguieran haciéndose instalaciones de corrientes débiles para telegrafía y telefonía, y naturalmente, sube de punto la necesidad cuando ha empezado ya el desarrollo de las aplicaciones de la electricidad á los múltiples objetos que está llamada á llenar. Creemos, pues, que en ninguna parte mejor que en el Reglamento de que venimos ocupándonos tienen lógica cabida los preceptos necesarios al fin indicado.

Teniendo, pues, en cuenta las ideas expuestas, damos á continuación un ligero esbozo de lo que en nuestro concepto debería ser el mencionado Reglamento en su parte administrativa, ó sea de su título primero, dando por sentado que la parte técnica sería en esencia la del proyecto de la Junta de Urbanización, agrupando sus preceptos en otra forma para constituir con ellos el título segundo del Reglamento.

(Se continuará.)

C. CARDENAL.

ATENEO DE MADRID

CONFERENCIAS DEL SR. ECHEGARAY

(Continuación.)

Resulta, pues, que en el grupo dado están todas las sustituciones semejantes á cada una de las que le forman.

Comprendido esto, se entenderá perfectamente la demostración del teorema en que nos ocupamos.

Supongamos ahora que la sustitución T, situada en el segmento CB, es una transposición; y fijémonos en que las transposiciones han de estar todas en este segmento; en el AC no puede haber ninguna. En efecto, si entre las sustituciones S hubiera alguna transposición, habría no sólo una, sino todas las sustituciones semejantes á ella; pero las sustituciones semejantes á una transposición son también transposiciones (1), luego en ese grupo estarían *todas*

(1) Puesto que la sustitución semejante á una transposición se descompone en el mismo número de ciclos que ésta y de igual número de letras, y como una transposición se descompone en un solo ciclo, que es ella misma, en uno solo se descompondrá la sustitución semejante, y un ciclo de dos letras es una transposición.

las transposiciones, y esto no es posible, porque si estuvieran todas, como éstas, multiplicadas entre sí, dan origen á las N sustituciones de n letras, el grupo de las S tendría N términos y no $\frac{N}{2}$.

Tomemos otra transposición T′, que también estará en el segmento CB, y formemos la serie

$$T'S_1,\ T'S_2\ .....\ T'S_{\frac{N}{2}}$$

Este conjunto de sustituciones está representado por el segmento CB. Multipliquemos á la derecha cada una de estas sustituciones por T; se formarán las siguientes:

$$T'S_1T,\ T'S_2T\ .....\ T'S_{\frac{N}{2}}T$$

que evidentemente son diferentes entre sí; son también diferentes de las anteriores, pues si hubiera dos iguales se tendría

$$T'S_p = T'S_q T, \quad \text{de donde} \quad S_p = T'^{-1}T'S_q T = S_q T,$$

y hemos visto que $S_q T$ no es igual á ninguna de las sustituciones S.

Si, pues, la última serie es diferente de la penúltima, la cual está representada por CB, y consta de $\frac{N}{2}$ términos, es claro que está representada por AC y que, por tanto, es igual á la serie de las S. Recordando que algunas de las S es igual á 1, resulta que en la serie de que hablamos uno de los términos será T′T, y si este producto de dos transposiciones está en el segmento AC, en él estarán también todas las sustituciones semejantes á este producto, las cuales son también productos de transposiciones en número par. Luego todas las sustituciones del grupo

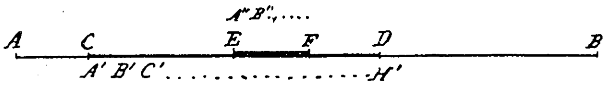
$$S_1,\ S_2,\ S_3\ ....\ S_{\frac{N}{2}}$$

se descomponen en un número par de transposiciones; por tanto, este grupo no puede ser otro que el alterno.

En la demostración de este teorema se habrá notado cuán sutiles son los razonamientos en la teoría de las sustituciones. Dado el grupo de $\frac{N}{2}$ términos, que ocupaba la primera mitad de la recta representativa del grupo total, se han multiplicado las sustituciones que le formaban por otra distinta de todas ellas y se ha visto que la serie obtenida estaba representada por la otra mitad de la recta total; se ha visto luego que en esta segunda mitad era donde estaban las transposiciones; multiplicando la serie anterior por una nueva transposición se ha reproducido el grupo representado por el segmento de la izquierda y se ha terminado demostrando que aquel grupo, el dado, está formado por sustituciones tales que cada una de ellas es un producto de un número par de transposiciones, con la cual consecuencia queda probado lo que se trataba de demostrar, á saber: que no hay ningún grupo, excepto el alterno, que tenga $\frac{N}{2}$ sustituciones.

Demostrado este teorema, pasó el Sr. Echegaray al estudio de los *subgrupos*, y para definirlos se valió de la representación geométrica que tanta fijeza da á las ideas.

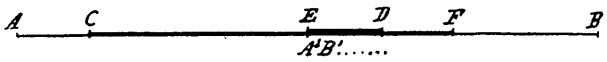
Sea AB la recta que representa las N sustituciones de n letras. Si el segmento CD representa un grupo es señal



de que las sustituciones A′B′C′ ..... que le forman, multiplicadas en cualquier número y con exponentes cualesquiera, no dan ningún producto que esté fuera del segmento CD. Pues lo que sucede con este segmento en relación con el total AB puede suceder con el EF en relación con CD; puede haber varias sustituciones de CD, que representaremos por A″, B″, C″ ....., las que suponemos estar representadas por el segmento EF, tales, que multiplicadas según indica la definición de grupo no den ningún producto comprendido en los segmentos CE y FD, sino que esté comprendido en EF; entonces el segmento EF representará otro grupo, que, por estar formado por sustituciones del grupo CD, se llama *subgrupo* con relación á éste.

Los segmentos CD y EF están en una relación sencilla: tan sencilla, que es un número entero. No demostraremos esta propiedad en el caso de los subgrupos; la demostración es análoga á la que daremos al tratar de los grupos y del grupo total, entre los cuales existe la misma relación indicada para los subgrupos.

La representación geométrica de los grupos permite comprender inmediatamente el teorema siguiente: *Si dos grupos,* CD *y* EF, *tienen una parte común* ED, *ésta es otro*



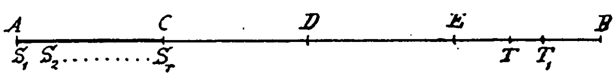
grupo. Sean A′, B′, C′ ..... las sustituciones representadas por el segmento común ED; multiplicándolas como indica la definición de grupo, el producto representará una sustitución que estará en el grupo CD por ser A′, B′, C′ ..... sustituciones de él y en el EF por igual motivo; luego ese producto corresponde al segmento ED y éste es un grupo.

Vamos á demostrar ahora un teorema importante, debido á Lagrange, que se refiere á la relación que existe entre el orden N del grupo total y el de otro grupo cual quiera.

El orden de un grupo es un divisor del número N, *orden del grupo total.*

Sean S_1, S_2, S_3 ..... S_r las sustituciones que forman el grupo $G(S_1, S_2, S_3\ .....\ S_r)$; el orden de este grupo, ó sea el número de sustituciones que le forman es r, y se trata de demostrar que el cociente $\frac{N}{r}$ es un número entero.

Sea AB la recta representativa del grupo total y representemos el grupo G por un segmento cuyo origen sea el punto A; sea AC este segmento.



Si T es una sustitución cualquiera de las que no están representadas por el segmento AC, los productos

$$S_1T,\ S_2T,\ S_3T\ .....\ S_rT$$

son no solamente diferentes entre sí, lo cual es evidente, sino también diferentes de las sustituciones del grupo G, como fácilmente se demuestra; no repetimos aquí la demostración por haberla indicado al demostrar uno de los teoremas precedentes. Resulta de estas dos propiedades que siendo r el número de sustituciones de la forma ST, reuniéndolas para representarlas por un segmento y colocando éste á continuación del AC, el segmento CD será igual á AC, sin que esto quiera decir que el nuevo segmento representa un grupo.

Si el punto D no coincide con B, se podrá escoger entre D y B otra sustitución T_1 que no pertenezca al segmento AC ni al CD, y formando la serie

$$S_1T_1,\ S_2T_1,\ S_3T_1 \,\ldots..\, S_rT_1$$

se demostrará de un modo análogo á como se hizo con la anterior, que las sustituciones que le forman son diferentes entre sí y diferentes de las que representa el segmento AC; son asimismo diferentes de las representadas por CD; pues si alguna, la $S_p T_1$ por ejemplo, fuese igual á la $S_q T$, resultaría

$$T_1 = S_p{}^{-1}\, S_q\, T,$$

y como el producto $S_p{}^{-1}S_q$ es una sustitución S_m del grupo G, resultaría $T_1 = S_m T$, es decir, igual á una de las sustituciones del segmento CD, lo que es contrario á la hipótesis.

Agrupando también estas sustituciones

$$S_1T_1,\ S_2T_1 \,\ldots..\, S_rT_1$$

y representándolas por un segmento colocado á continuación del CD, ese segmento DE será igual á los dos anteriores, pues representa igual número de sustituciones que ellos.

Observemos que por este procedimiento vamos agrupando las N sustituciones de n letras en segmentos iguales AC, CD, DE, y continuando así llegaremos á obtener un segmento cuyo extremo coincida con B, pues de no ser así siempre encontraremos entre el extremo del último segmento y el punto B una sustitución T, con la cual se harán los razonamientos que con T, T_1 ..... y agruparemos á los segmentos obtenidos otro nuevo. Vemos, pues, que la recta AB comprende un número exacto de veces al segmento AC, y esto es lo que se trataba de probar.

Decir que AB contiene un número exacto de veces á la AC, es lo mismo que decir que el cociente $\frac{N}{r}$ es un número entero; este número $\frac{N}{r} = i$, es lo que se llama *índice* del grupo G.

Este teorema es cierto no sólo para el grupo total y otro cualquiera, sino también, como ya hemos anunciado, para un grupo y un subgrupo suyo; la demostración es análoga á la anterior.

El teorema que acabamos de demostrar nos da el medio de formar el cuadro de Cauchy; éste se reduce á escribir todas las sustituciones de n letras en líneas de r sustituciones cada una, siendo r el orden del grupo de que se parte; el número de líneas es el índice del grupo.

El cuadro correspondiente al grupo $G(S_1, S_2, S_3 \ldots S_r)$, cuyo orden de r y su índice $i = \frac{N}{r}$ es el siguiente:

S_1	S_2	S_3	.....	S_r
S_1T	S_2T	S_3T	.....	S_rT
S_1T_1	S_2T_1	S_3T_1	.....	S_rT_1
S_1T_2	S_2T_2	S_3T_2	.....	S_rT_2
.....	.....	.....	.....	.....
.....	.....	.....	.....	.....
S_1T_{i-2}	S_2T_{i-2}	S_3T_{i-2}	.....	S_rT_{i-2}

La primera línea de este cuadro está formada por el grupo G. Las demás líneas pudiera parecer que son también grupos; pero no es así, y más adelante veremos qué condición se necesita para que así sea.

Expliquemos ahora el significado que se da en la teoría que nos ocupa á las palabras *cambiable* y *permutable*.

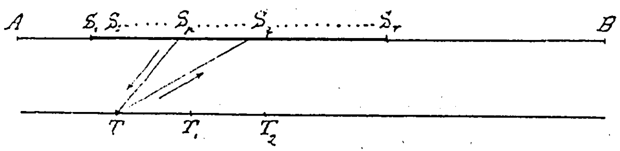
La primera se aplica á sustituciones aisladas y la segunda á una sustitución y un grupo ó á dos grupos.

Se dice que dos sustituciones A y B son cambiables cuando se verifica la relación $AB = BA$; de ella se deduce $A = BAB^{-1}$. Pero hemos visto que la sustitución BAB^{-1} es semejante á la A, es decir, que se descompone en igual número de ciclos que ésta y del mismo número de letras; luego la condición para que dos sustituciones sean cambiables puede enunciarse de otro modo diciendo: *dos sustituciones son cambiables cuando una de ellas,* A, *es igual á su transformada* BAB^{-1}, *por medio de la otra,* B. De aquí se deduce que para hallar todas las sustituciones cambiables con la A no hay más sino formar la transformada de ella MAM^{-1} y ver cuándo ambas son iguales; los valores (1) de M para los cuales esta transformada sea igual á A, son los que representan las sustituciones cambiables buscadas.

Se dice que una sustitución T y su grupo

$$G(S_1,\ S_2,\ S_3 \,\ldots..\, S_r)$$

son *permutables* cuando el producto de una sustitución



cualquiera del grupo por T es igual al producto de T por otra sustitución del mismo grupo, es decir, cuando $S_pT = TS_q$.

(*Se continuará.*)

M. LUIÑA.
Alumno de la Escuela de Caminos

LOCOMOTORAS AMERICANAS

SUSPENSIÓN

Los constructores americanos han tenido que estudiar la suspensión de las locomotoras, teniendo en cuenta las vías por que circulan, mal construídas, peor conservadas y sin elasticidad; si á esto se une que los puentes-básculas

(1) Empleamos esta palabra, que tratándose de sustituciones no tiene sentido, con objeto de abreviar la explicación; pero entiéndase que al decir *valores* deben entenderse sustituciones colocadas en lugar de M, etc.