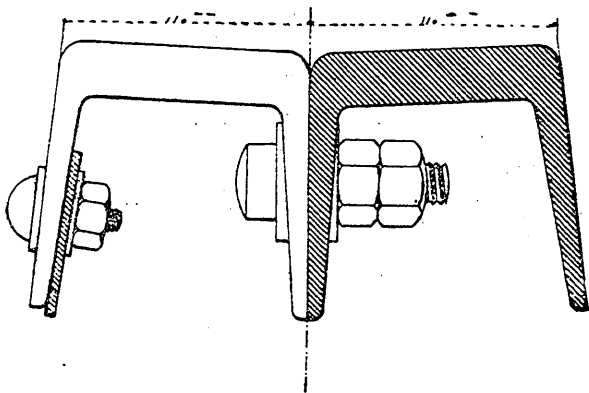


Figura 3ª



tranvía á los vehículos públicos han sido los de Valencia, y que la idea fué de un español, del Sr. Meseguer.

Por desgracia para los caminos españoles, el ejemplo admirable del camino del Grao no ha tenido hasta hoy imitaciones. Que las tendrá es indudable, pero en nuestro país temo muy mucho que sea cuando lo imponga la moda extranjera. Y digo esto porque puedo añadir á lo referido por el *Cosmos* sobre el ensayo de Chicago, que en un libro muy reciente, tal vez el último que se ha publicado en Francia sobre carreteras en *Voie Publique*, se citan con elogio los carriles metálicos (por cierto sin indicar la procedencia), y además parece ser que en Bélgica el Congreso se ha ocupado ya del asunto y los Ingenieros del Estado tienen hecho el encargo de formular los presupuestos de los kilómetros de carriles que crean necesarios. Lo cual indica que en el extranjero se ocupan del asunto, á pesar de que por razones que todos sabemos de clima y materiales, tienen mejores carreteras que nosotros.

Por lo demás, no vamos á repetir lo que hemos dicho ya en estas columnas respecto á las condiciones de los carriles del camino del Grao. No necesitan alabanzas. Allí están para que propios y extraños admiren la ingeniosa sencillez con que en recta y en curva, en horizontal y en rampa se ha resuelto un problema, que es el *caballo de batalla* en las Oficinas de Obras públicas de muchas provincias.

Tal vez tengan los carriles de Valencia el defecto de resultar costosos en exceso, aun siendo más económicos que un mal adoquinado; pero el procedimiento es susceptible de reducción en su coste por kilómetro, como podrán juzgar los que tengan paciencia suficiente para seguirme en sucesivos artículos.

ENRIQUE SANCHÍS TARAZONA.

ATENE0 DE MADRID

CONFERENCIAS DEL SR. ECHEGARAY

(Continuación.)

Hemos dicho que el método que seguiríamos en el estudio de las $n! = N$ sustituciones de n letras, consistiría en elegir entre esa gran masa de sustituciones las que tuvieran algunas propiedades especiales dependientes de su misma forma. Siguiendo este método, hemos estudiado primero las sustituciones que son potencias de otra; luego

las transposiciones, y finalmente, los ciclos ó sustituciones circulares. Vamos á estudiar ahora no sustituciones aisladas, como hasta aquí, sino agrupaciones, familias de sustituciones. Estas agrupaciones ó familias reciben el nombre de *grupos*.

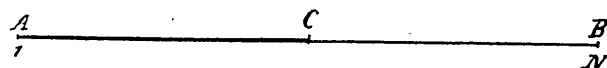
Supongamos que entre las $n!$ sustituciones de n letras hay varias, que representamos por $S_1, S_2, S_3, \dots, S_r$, tales que multiplicando entre sí cualquier número de ellas y afectando á cada factor de exponentes positivos ó negativos, pero enteros, todos los productos sean iguales á algunas de las sustituciones S ; más claro, supongamos que los productos $S_1 S_2, S_1 S_3, S_1^{-1} S_2 S_3, S_1^m S_2^{n-2} S_3^p S_4^q S_5$ y todos los demás que se quiera formar no dan lugar á nuevas sustituciones, es decir, que todos estos productos son iguales á algunas de las sustituciones dadas $S_1, S_2, \dots, S_r$; entonces se dice que éstas forman un *grupo*.

En la definición que acabamos de dar parece que se imponen muchas condiciones, y como podrían ser algunas contradictorias ó imposibles de cumplir, es preciso, antes de pasar adelante, cerciorarse de que no hay incompatibilidad entre ellas. Para esto es suficiente demostrar la existencia de los grupos; con un ejemplo que de ellos presentemos basta.

Recordemos que al hablar del número de sustituciones que pueden formarse con n letras, dijimos que todas ellas, en número de $N = n!$, formaban un conjunto, al que dimos el nombre de *grupo total* ó *grupo simétrico*. Pues bien, estos nombres no son caprichosos; al emplear la palabra *grupo* lo hicimos teniendo presente lo que ella significa. En efecto; todas las sustituciones de n letras forman un conjunto que es un *grupo* tal y como lo hemos definido. Multiplicando cualquier número de esas N sustituciones se obtendrá otra de las mismas, y si afectamos á cada factor de un exponente entero cualquiera el producto de todas esas potencias será también otra de las N sustituciones, puesto que no hay más que éstas. Que este grupo es *total* claro está, puesto que en él entran todas las sustituciones posibles. Que es *simétrico* ya lo veremos más adelante, cuando indiquemos qué se entiende por grupo simétrico.

Más ejemplos se pueden presentar de conjuntos ó familias de sustituciones que forman grupos.

Hemos demostrado que la mitad de las N sustituciones de n letras se descomponen en un número par de transposiciones y la otra mitad en un número impar. Si representamos por una recta AB las N sustituciones, un



segmento de ella representa un cierto número de sustituciones, el cual estará con N en la misma relación que la longitud del segmento lo está con la recta entera. Pues bien, agrupemos todas las sustituciones que se descomponen en un número par de transposiciones y representémoslas por un segmento que tenga un extremo común con otro de la recta AB ; el otro extremo de ese segmento estará en el punto medio C , puesto que representa un número de sustituciones igual á $\frac{N}{2}$.

Es evidente que las sustituciones correspondientes al segmento AC forman un *grupo*. En efecto, multiplicando cualquier número de esas sustituciones, afectadas de ex-

ponentes cualesquiera, el producto tendrá siempre un número par de transposiciones; será, pues, una sustitución de aquel segmento.

Las sustituciones del otro segmento CB no forman un grupo. Puesto que cada una se descompone en un número impar de transposiciones, el producto de dos de ellas, por ejemplo, se compondrá de un número de transposiciones que será la suma de dos números impares; dicho producto se descompondrá, por tanto, en un número par de transposiciones y no será una sustitución del segmento CB, sino del AC.

El grupo AC se llama *alterno*.

Otro ejemplo de grupo es el que forman las potencias de una sustitución.

Sabemos que si una sustitución S es de orden d , esto es, si es tal que $S^d = 1$, de todas las potencias de S sólo hay d distintas, á saber:

$$S^0 = 1, S, S^2, S^3, \dots, S^{d-1};$$

todas las demás potencias son iguales á alguna de éstas. Pues estas d potencias forman un grupo, porque multiplicándolas entre sí, afectadas de exponentes cualesquiera, el producto será siempre una de las sustituciones anteriores.

El número d , que es el orden de la sustitución S , es también el *orden* del grupo, pues se entiende por orden de un grupo el número de sustituciones que le forman.

Presentemos todavía un nuevo ejemplo de grupo.

Puesto que con n letras se forman $n!$ sustituciones, que constituyen un grupo, si omitimos una de las letras, con las $n-1$ restantes se formará un conjunto de $(n-1)!$ sustituciones, que formarán otro grupo, y si á todas éstas se les yuxtapone las letras que hemos omitido, se formarán $(n-1)!$ sustituciones de n letras que formarán un grupo, de suerte que con las N sustituciones se forma un segmento $\frac{N}{n}$ que es otro grupo. De

análoga manera se ve que el segmento $\frac{N}{(n-1)n}$ es otro grupo, y que asimismo son grupos los segmentos

$$\frac{N}{(n-2)(n-1)n}, \frac{N}{(n-3)(n-2)(n-1)n}, \dots, \frac{N}{3.4.5 \dots (n-1)(n)}.$$

Con los ejemplos presentados basta para comprender que es posible satisfacer todas las condiciones impuestas á las sustituciones que forman grupos. Entremos ya en el estudio de éstos.

La notación que se usa para indicar que varias sustituciones $S_1, S_2, S_3, \dots, S_r$ forman un grupo, consiste en escribir las sustituciones dentro de un paréntesis y á modo de característica se escribe la letra G ; así el grupo anterior se indicará por el símbolo

$$G(S_1, S_2, \dots, S_r).$$

En todo grupo ha de entrar como sustitución componente la sustitución idéntica; por consecuencia, una de las sustituciones $S_1, S_2, \dots, S_r$ será igual á 1.

Hemos visto que de todos los ejemplos presentados aquel en que el orden es mayor es el grupo alterno. Vamos á demostrar que este grupo es el único que existe

de orden $\frac{N}{2}$, y para esto daremos al teorema el enunciado siguiente:

Si existe un grupo de orden $\frac{N}{2}$ no puede ser otro que el alterno.

Sean $S_1, S_2, S_3, \dots, S_{\frac{N}{2}}$ las sustituciones que forman el grupo de orden $\frac{N}{2}$. Es claro que una de ellas será igual á 1; pero no es preciso hacer explícita esta condi-

$$\begin{array}{ccccccc} A & & & C & & & B \\ \hline S_1 & S_2 & \dots & S_{\frac{N}{2}} & T & & N \end{array}$$

ción. Para demostrar el teorema hay que probar que todas estas sustituciones son *pares*, esto es, se descomponen en un número par de transposiciones.

Representemos por el segmento AC, mitad de AB, el grupo

$$G(S_1, S_2, \dots, S_{\frac{N}{2}})$$

Tomemos una sustitución T diferente de las que forman este grupo; multiplicando á la derecha todas las sustituciones de G , por T , se tendrá las $\frac{N}{2}$ siguientes:

$$S_1 T, S_2 T, S_3 T, \dots, S_{\frac{N}{2}} T$$

Es evidente que todas estas nuevas sustituciones son diferentes; lo son, además, de las que forman el grupo G ; en efecto, si una de estas sustituciones, $S_p T$, fuese igual á una de las S , á las S_q , se tendría

$$S_p T = S_q, \text{ de donde } T = S_p^{-1} S_q;$$

pero este producto de S_p^{-1} por S_q es una de las sustituciones S , la S_r , por ejemplo, puesto que éstas forman un grupo; luego $T = S_r$, y hemos supuesto que T era distinta de todas las sustituciones S .

Siendo las sustituciones

$$S_1 T, S_2 T, S_3 T, \dots, S_{\frac{N}{2}} T$$

distintas de las S , distintas entre sí y en número de $\frac{N}{2}$, estarán representadas por el segmento CB.

Multipliquemos ahora á la izquierda las sustituciones S por la T ; se obtendrán las

$$TS_1, TS_2, TS_3, \dots, TS_{\frac{N}{2}}$$

Se demuestra también fácilmente que estas sustituciones son distintas de la S y distintas entre sí, y como son en número de $\frac{N}{2}$ resulta que también están representadas por el segmento CB; luego esta serie de sustituciones es la misma anterior, con la diferencia de que los términos, iguales entre sí, no serán precisamente los correspondientes,

sino que un término de la primera serie, el $S_p T$ será igual á otro TS_q de la segunda. Escribiendo esta igualdad resulta

$$S_p T = TS_q$$

y multiplicando á la derecha por T^{-1} se obtiene

$$S_p = TS_q T^{-1};$$

pero la sustitución $TS_q T^{-1}$ es semejante á la S_q , según ya hemos visto, luego en el grupo dado cada sustitución S_p tiene su semejante S_q y no sólo está en ese grupo una de las sustituciones semejantes de S_p , están todas; en efecto, la fórmula que comprende todas las sustituciones semejantes á la S_p es la siguiente:

$$AS_p A^{-1};$$

sustituyendo en ella en vez de A todas las sustituciones posibles, las N sustituciones, obtendremos todas las que son semejantes á la S_p . Si en vez de A sustituimos una sustitución cualquiera T , distinta de las S , el producto $TS_p T^{-1}$ será, según hemos visto, un cierto término S_r del grupo dado; y si en vez de A colocamos una sustitución cualquiera de las S , la S_m , el producto

$$S_m S_p S_m^{-1}$$

será también una de las sustituciones del grupo de las S por la misma definición del grupo.

(Se continuará.)

M. LUIÑA.

Alumno de la Escuela de Caminos.

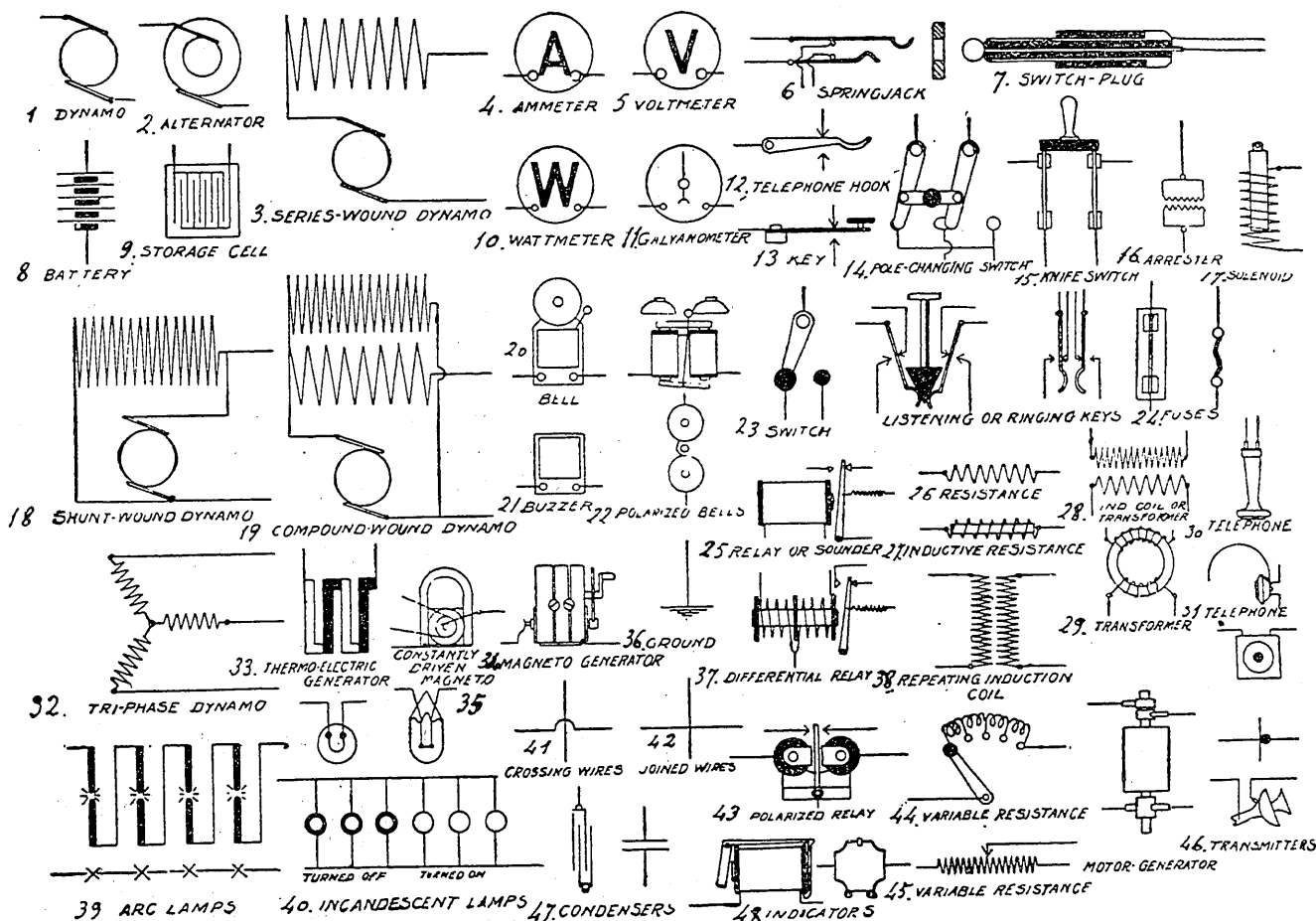
REVISTA EXTRANJERA

Diagramas convencionales de los aparatos eléctricos.

En uno de los últimos números del suplemento del *Scientific American* se ha publicado un trabajo de D. W. C. Tanner, que tiene por objeto la representación esquemática de los diversos aparatos usados frecuentemente en las instalaciones eléctricas. Reproducimos la figura correspondiente, añadiendo las explicaciones necesarias, y traducimos á continuación la nota mencionada.

Se ha evidenciado, sobre todo estos últimos años, la necesidad de emplear diagramas sencillos y fáciles de entender para representar rápida y convenientemente las diferentes formas de los aparatos y sus innumerables disposiciones.

De los trabajos realizados para conseguir la uniformidad de los símbolos, quizás sean los más dignos de mención los llevados á cabo por el profesor Francis B. Crocker, cuyos dibujos figuran en el número de 13 de Mayo de 1891 del «*Electrical Engineer*» y fueron reproducidos en el Diccionario de Electricidad de Houston. Estos dibujos fueron compilados para uso de los alumnos de la Universidad de Colombia. Mientras muchos de estos diagramas han llegado hoy día á ser de uso general, hay algunos que han quedado ya anticuados en el corto espacio de seis años, y, final-



Diagramas convencionales de aparatos eléctricos.—Explicación de la figura.

1. Dinamo.—2. Alternador.—3. Dinamo-serie.—4. Amperímetro.—5. Voltímetro.—6. Conmutador Jack ó de muelle.—7. Clavija.—8. Batería.—9. Acumulador.—10. Watímetro.—11. Galvanómetro.—12. Gancho-palanca (teléfono).—13. Llave.—14. Conmutador de polos.—15. Corta-circuito de cuchillo.—16. Pararrayos.—17. Solenoide.—18.—Dinamo-derivación.—19. Dinamo compound.—20 y 21. Timbres.—22. Timbres polarizados.—23. Llaves.—24. Cortacircuitos fusibles.—25. Relevo ó avisador.—26. Resistencia.—27. Resistencia auto-inductora.—28, 29 y 30. Transformadores.—31. Teléfono.—32. Dinamo trifásica.—33. Generador termo-eléctrico.—34 y 35. Magneto, generatriz y motora.—36. Comunicación con tierra.—37. Relevo diferencial.—38. Lámparas de arco.—39. Lámparas incandescentes, apagadas y encendidas.—40. Cruzamiento de hilos.—41. Unión de hilos.—42. Relevo polarizado.—43 y 44. Resistencia variable.—45. Transmisor.—46. Condensadores.—47. Indicadores.