

además anualmente á la de P. L. M. 1.810 francos por alquiler del terreno ocupado y conservación de la vía apartadero y aparatos de vía antes citados y un peaje de un franco diario por cada vagón que esté utilizándose en las líneas de la Compañía.

Los precios fijados por la Compañía de ferrocarriles de vía estrecha, excluyendo sólo las multas por retraso en la devolución de vagones á P. L. M. y los gastos de las pesadas y alguna otra formalidad, son los siguientes:

DISTANCIAS — Kilómetros.	PRECIO POR TONELADA		OBSERVACIONES
	Clase número 1	Clase número 2.	
	Céntimos por kilómetro.	Céntimos por kilómetro.	
0 á 5	30	50	Las mercancías de la clase núm. 1 son las en bruto, y las de la clase número 2 las manufacturadas.
5 á 10	20	30	
10 á 15	15	20	
15 en adelante.	10	10	

El servicio de trenes con carretones transportadores se limita á una locomotora de 15 toneladas y dos vagones de la vía normal cargados sobre los transportadores y formando un peso remolcado de 32 á 45 toneladas. Efectuándose las operaciones de carga y descarga de los vagones sobre los transportadores por el maquinista ó fogonero y el conductor del tren, invirtiéndose en estas operaciones cinco minutos, incluyendo el enganche ó desenganche de la locomotora. El enganche usado en Ginebra para acoplar la locomotora á los trucks y para unir éstos con los vagones ordinarios de la vía estrecha que forman parte del mismo tren, consiste en una viga de madera de 2,50 metros de longitud, cuyos extremos se unen á los resortes de los aparatos de choque y tracción por medio de ganchos. El conductor va en la máquina, á la que se sujeta la cuerda del freno Heberlein, por la que puede accionarlo, parando los carretones en un recorrido de ocho metros á la velocidad de 15 kilómetros, y en cinco metros á la de 10 kilómetros, aunque la pendiente llegue al 4 por 100.

Los trenes pasan en Ginebra por una curva de 30 metros, y se ha consentido que quede un espacio en algunos puntos de solo 0,52 metros entre las partes más salientes de un vagón cargado en transbordadores, y los muros, postes, etc., próximos, reduciendo la velocidad al mínimo y llevando delante del tren un piloto.

Las pendientes llegan al 5 y al 6 por 100. En las de 4 por 100 una locomotora de 15 toneladas arrastra fácilmente un vagón de 16 toneladas con carga sobre transportadores, formando un peso total de $15 + 16 + 3 = 34$ toneladas; en las de 5 por 100 tiene que reducirse la velocidad á 11,5 kilómetros por hora para remolcar la misma carga, y en la de 6 por 100 solo puede arrastrarse á 10 kilómetros por hora. Véase, pues, que en todos los casos pueden remolcarse dos vagones con carga completa, y se ha comprobado que siempre puede detenerse el tren con los frenos de los transbordadores y sin recurrir á los de la locomotora, en un recorrido de cinco á ocho metros.

La longitud total de las ocho líneas que irradian de Ginebra es de 73 kilómetros, y las longitudes de cada una varían entre 3 y 18 kilómetros.

El coste de transbordos no utilizando los carretones, sino pasando las mercancías de uno á otro vagón, es en

Ginebra, como en la línea de Heidelberg antes citada, de 0,25 francos por tonelada, y calculando los precios de fijos y carretones transportadores á los precios citados para la instalación de Ginebra, y partiendo del supuesto que para un tráfico de 20.000 toneladas se requieren seis carretones como en las líneas de Heidelberg y Nagold, se ha formado el siguiente estado que hace ver la economía que puede obtenerse empleando los carretones:

Tráfico anual. — Toneladas	TRANSBORDOS COSTE DEL TRANSBORDO		CARRETONES TRANSPORTADORES			Economía anual usando car etones. — Francos.	Tanto por ciento de la economía sobre el coste del transbordo. — Francos.
	Por tonelada. — Francos	Total por año. — Francos.	Número de carretones.	Coste de la instalación — Francos.	Interés y con- servación 5 % anual. — Francos.		
2.500	25	625	1	7.500	375	250	40
5.000	25	1.250	2	12.500	625	625	50
10.000	25	2.500	3	17.500	875	1.625	65
20.000	25	5.000	6	22.500	1.125	3.875	77

Además de la economía en gastos es importante la economía de tiempo, y estos dos factores han decidido la adopción de transportadores para mercancías cuyo transbordo es inconveniente, lento ó costoso, como carbón, piedra, leña, materiales en bruto remitidos por vagón completo ó de peso grande y dimensiones considerables.

Los resultados consignados en el estado precedente deducidos por el Sr. Du Riche Preller, para ferrocarriles análogos á los de Suiza y Alemania, no pueden aplicarse sin sufrir las consiguientes modificaciones á líneas como las establecidas ó que hayan de construirse en España; hay muchos casos en que no tendria ventaja alguna desechar el sistema ordinario de los transbordos, pero es conveniente conocer el medio descrito de pasar las mercancías de una línea á otra de distinto ancho, pues en la explotación de líneas de corta longitud tiene una importancia grande estudiar el modo de disminuir los gastos originados en las estaciones de origen y término de la línea. Considerando que en muchos casos el transporte en carro á la estación de origen y los de transbordo ó conducción en carro al domicilio del destinatario en la de término, sumados con los de transporte, son superiores al precio de la conducción por carretera, se comprende la gran importancia que en la explotación de estas líneas debe concederse á disminuir todos los gastos de transbordos, recepción y entrega de mercancías, pues de otra suerte ocurre muchas veces que solo se utiliza la línea para los artículos que deban remitirse por gran velocidad. Esto nos ha movido á dar á conocer el sistema de carretones transportadores de vagones, que en algunos casos podrán ser de muy conveniente utilización.

P. B.

ATENEO DE MADRID

CONFERENCIAS DEL SR. ECHEGARAY

Si en los artículos precedentes hemos resumido las explicaciones del Sr. EcheGARAY con bastante detalle, en éste y en los sucesivos nos limitaremos á dar noticia de las ideas y teoremas más importantes.

Los lectores que deseen estudiar detenidamente la ma-

teria que constituye el objeto del curso, pueden hacerlo en la obra que, en forma de cuadernos, está publicando el Sr. Echegaray, la cual no sólo contiene todo lo que el autor dice en sus explicaciones, sino también otras varias cuestiones importantes.

Hemos visto que una sustitución circular está representada analíticamente por el símbolo

$$\left| \begin{array}{c} z \\ z+1 \end{array} \right|.$$

Se debe tener presente que cuando la suma $z+1$ exceda de n (número de letras de la sustitución), hay que restar de ella este número ó un múltiplo de él.

Si el número de letras es 4, el símbolo anterior representará la sustitución

$$\left| \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \right|;$$

pero, según lo que se acaba de decir, siendo 5 mayor que 4, hay que restar de él este número de letras, quedando la sustitución reducida á la forma

$$\left| \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{array} \right|.$$

Las potencias de una sustitución circular tienen también una representación analítica sencilla. Si hacemos

$$C = \left| \begin{array}{c} z \\ z+1 \end{array} \right|$$

se comprende fácilmente que las potencias $C^2, C^3, \dots, C^p$ tendrán por expresiones las siguientes:

$$C^2 = \left| \begin{array}{c} z \\ z+2 \end{array} \right|; C^3 = \left| \begin{array}{c} z \\ z+3 \end{array} \right|; \dots C^p = \left| \begin{array}{c} z \\ z+p \end{array} \right|.$$

Si la sustitución dada es la de cuatro letras, su sexta potencia será

$$\left| \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1+6 & 2+6 & 3+6 & 4+6 \end{array} \right| = \left| \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 7 & 8 & 9 & 10 \end{array} \right|,$$

y restando de los números del denominador los múltiplos de 4 de que *exceden*, resultará

$$\left| \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{array} \right|^6 = \left| \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{array} \right|.$$

Las sustituciones circulares se representan abreviadamente escribiendo su numerador dentro de un paréntesis. Así, el símbolo $(m \ n \ p \ q)$ representa una sustitución circular cuyo numerador es $m \ n \ p \ q$; el denominador se forma como sabemos; de suerte que se tiene

$$(m \ n \ p \ q) = \left| \begin{array}{cccc} m & n & p & q \\ n & p & q & m \end{array} \right|.$$

Siendo indiferente el orden en que se colocan los *elementos* de una sustitución, el ciclo anterior puede representarse de varias maneras; se tendrá:

$$(m \ n \ p \ q) = (n \ p \ q \ m) = (p \ q \ m \ n) = (q \ m \ n \ p).$$

El *orden* de una sustitución circular está ligado al número de letras que entran en ella por una relación muy sencilla.

Si la sustitución es de n letras, su potencia de grado n será

$$C^n = \left| \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 2 & 3 & 4 & \dots & 1 \end{array} \right|^n = \left| \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 1+n & 2+n & 3+n & \dots & 2n \end{array} \right|;$$

restando de los números del denominador los múltiplos de n de que *exceden*, se obtiene

$$C^n = \left| \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 2 & 3 & 4 & \dots & 1 \end{array} \right|^n = \left| \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n \end{array} \right| = 1,$$

y como n es el menor número para el cual se verifica $C^n = 1$, resulta que el orden del ciclo C es igual al número de sus letras.

Las demás potencias de C , superiores á C^n , reproducen las primeras. Así:

$$C^{n+1} = C; C^{n+2} = C^2; \dots$$

Conviene comprender bien la diferencia que hay entre las sustituciones circulares ó *ciclos* y las transposiciones. Las transposiciones son ciclos de dos letras; pero si consideramos una transposición cuando el número de letras es mayor que dos, y la escribimos con todo su desarrollo y no abreviadamente, se ve que esa transposición no es una sustitución circular, por lo menos en la forma.

Si consideramos cinco letras y nos fijamos en la transposición $\left| \begin{array}{cc} 2 & 4 \\ 4 & 2 \end{array} \right|$, escribiéndola completa resulta lo siguiente:

$$\left| \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 4 & 3 & 2 & 5 \end{array} \right|$$

que, al parecer, no es una sustitución circular; mas si la escribimos alterando el orden de los elementos, resulta

$$\left| \begin{array}{ccccc} 2 & 4 & 1 & 3 & 5 \\ 4 & 2 & 1 & 3 & 5 \end{array} \right|,$$

que, en la forma, tampoco es una sustitución circular. Pronto veremos que en el fondo las transposiciones son ciclos.

En la multiplicación de sustituciones circulares hay una particularidad importante.

Si los ciclos que se multiplican no tienen ninguna letra común, su producto se obtiene reuniendo en una las dos sustituciones que hacen de factores.

Pero hay que tener presente que el símbolo del producto no se forma reuniendo en uno los símbolos de los factores. Por ejemplo, el producto de las sustituciones circulares

$$(a \ b \ c \ d) = \left| \begin{array}{cccc} a & b & c & d \\ b & c & d & a \end{array} \right|; \quad (e \ f \ g) = \left| \begin{array}{ccc} e & f & g \\ f & g & e \end{array} \right|$$

es la sustitución

$$\left| \begin{array}{cccccc} a & b & c & d & e & f & g \\ b & c & d & a & f & g & e \end{array} \right|,$$

que se obtiene juntando las dos anteriores; pero el símbolo de este producto no es el que resultaría de juntar los de los factores, esto es, el $(a \ b \ c \ d \ e \ f \ g)$. Nada tiene esto de extraño, porque no siendo el producto una sustitución circular, no se la podrá representar por el símbolo propio de éstas.

Observemos, además, que en este caso (en el de no haber letras comunes á los dos factores), el producto es conmutativo; el orden de los factores no lo altera.

Pero si las sustituciones circulares que se multiplican tienen alguna letra común, no solamente la regla anterior para obtener el resultado es inaplicable, sino que el orden de los factores altera el producto.

El teorema fundamental de las sustituciones circulares es el siguiente: *Toda sustitución es un producto de sustituciones circulares.*

La demostración de este teorema es muy sencilla y se encuentra en muchos tratados de Álgebra que no tratan de la teoría de las sustituciones; pero hay en aquellas demostraciones una parte oscura que depende de no haber definido el producto de sustituciones, y en lugar de establecer el teorema como nosotros lo hacemos, se cambia el enunciado en este otro: *toda sustitución puede descomponerse en un conjunto de sustituciones circulares*, que no es muy claro.

La descomposición se hace tomando una letra del numerador y escribiendo debajo la que la corresponde, buscando en el numerador la que es igual á la segunda y hallando la correspondiente á esta tercera y así hasta que se cierra el ciclo; si no se agotan todas las letras, se elige otra en el numerador, que no sea de las ya empleadas, y se ejecuta con ella las operaciones reseñadas para la primera, y así se continúa.

Por ejemplo, la sustitución

$$\begin{array}{cccccccccccc} a & b & c & d & e & f & g & h & k & l & m \\ d & l & k & f & c & m & a & e & b & h & \end{array}$$

se descompone en las circulares siguientes:

$$\begin{array}{|c|} \hline a \ d \ f \ m \ h \\ \hline d \ f \ m \ h \ a \\ \hline \end{array}; \begin{array}{|c|} \hline b \ l \\ \hline l \ b \\ \hline \end{array}; \begin{array}{|c|} \hline c \ k \ e \\ \hline k \ e \ c \\ \hline \end{array};$$

pero no basta esto; hay que probar que la primera es el producto de las segundas.

Recordando lo que hemos dicho poco há, para multiplicar estas sustituciones circulares, que no tienen ninguna letra común, basta formar con ellas una sola sustitución que es

$$\begin{array}{cccccccccccc} a & d & f & m & h & b & l & c & k & e \\ d & f & m & h & a & l & b & k & e & c \end{array}$$

la cual no difiere de la dada sino en el orden en que están colocados sus *elementos*, y ya sabemos que el orden de colocación de éstos no altera la sustitución.

Resulta, pues,

$$(a \ b \ c \ d \ e \ f \ g \ h \ k \ l \ m) = (a \ d \ f \ m \ h) (b \ l) (c \ k \ e).$$

Las transposiciones y las sustituciones circulares representan el mismo papel que los divisores simples y compuestos en la Aritmética. Los ciclos son los divisores compuestos de una sustitución; las transposiciones son los divisores primos. La analogía, sin embargo, no es completa, porque un número no puede descomponerse más que de una sola manera, en factores primos, y una sustitución se descompone en varios productos de transposiciones; un número puede descomponerse de varias maneras en factores compuestos y una sustitución se descompone en un producto de ciclos de un sólo modo.

Una sustitución se llama *regular* cuando se descompone en ciclos que tienen el mismo número de letras ó que son del mismo orden, pues ya hemos visto que el orden de un ciclo es igual al número de letras que contiene.

El producto

$$(a \ b \ c \ d) (e \ f \ g \ h) (k \ l \ m \ n)$$

es una sustitución *regular* porque todos sus ciclos son del mismo orden, del cuarto.

Las sustituciones regulares son potencias de un ciclo que se forma fácilmente; el exponente de la potencia es el número de ciclos de la sustitución.

Dos sustituciones se llaman *semejantes* cuando se des-

componen en el mismo número de ciclos del mismo número de letras. Sea la sustitución

$$S = (a \ b \ c \ d) (e \ f \ g) (h \ k)$$

que se descompone en tres ciclos de 4.º, 3.º y 2.º orden respectivamente; la sustitución

$$S' = (a' \ b' \ c' \ d') (e' \ f' \ g') (h' \ k'),$$

que se descompone en igual número de ciclos que la anterior y de los mismos órdenes respectivos, es semejante á la S.

Las sustituciones semejantes son importantes porque establecen ciertas relaciones entre determinadas sustituciones.

Para completar las nociones necesarias en la teoría de los grupos, definiremos las sustituciones *cambiables* y las *transformadas*.

Se dice que dos sustituciones son *cambiables* cuando su producto es conmutativo. Para expresar que las sustituciones S y T son cambiables basta escribir

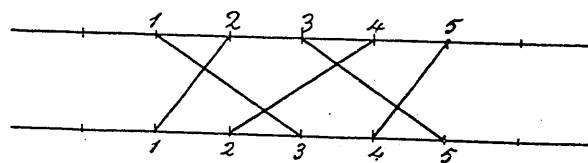
$$ST = TS.$$

De esta igualdad se deduce, multiplicando á la izquierda por T^{-1} , $S = T^{-1}ST$ ó multiplicando á la derecha por la misma expresión, $S = TST^{-1}$; cualquiera de estas dos igualdades equivale á la primera.

La expresión TST^{-1} se llama la sustitución *transformada* de S por medio de T. Cuando esta transformada es igual á S, es decir, cuando se verifica la condición anterior, las sustituciones S y T son cambiables; cuando no se verifica esa condición, esas sustituciones no son cambiables, pero la TST^{-1} no deja de llamarse la transformada de S por medio de T.

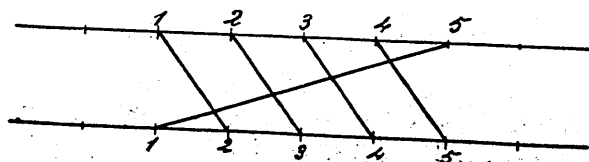
Pues bien, una sustitución cualquiera, S, y su transformada por medio de otra, T, son dos sustituciones semejantes; es decir, la sustitución TST^{-1} se descompone en el mismo número de ciclos que la S y del mismo orden que los de ésta.

Para demostrar este teorema acudiremos á la representación geométrica de las sustituciones.



Una sustitución cualquiera, y para fijar las ideas consideraremos la $S = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 5 & 2 & 4 \end{pmatrix}$, se representa trazando dos rectas paralelas y tomando sobre ellas puntos correspondientes que se indican con los mismos números que entran en la sustitución.

Las rectas que unen los puntos de la primera paralela, con los que en la segunda les corresponden, según la sustitución dada; en el caso presente, las rectas 13, 21, 35, 42 y 54, son las representativas de la sustitución S.

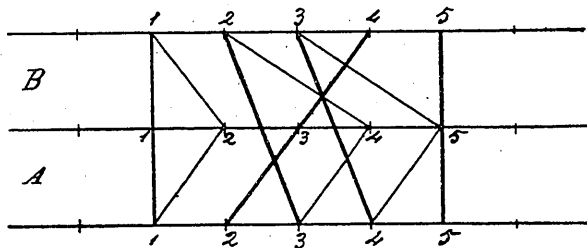


Una sustitución circular está representada por una serie de líneas tales que el extremo de cada recta está en la misma vertical que el origen de la siguiente, y el extremo de la última en la misma vertical que el origen de la primera.

Se obtiene el producto de varias sustituciones formando tantas fajas como factores haya y hallando las resultantes parciales. El producto AB de las sustituciones

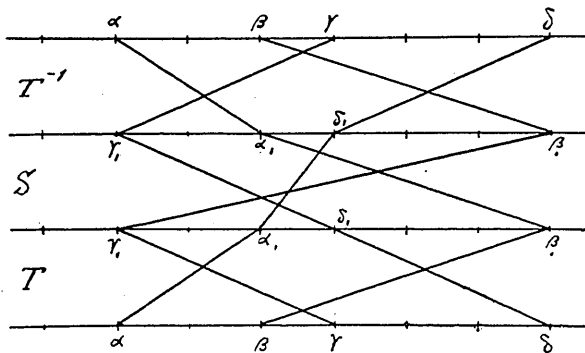
$$A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 5 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

está representado por las líneas fuertes de la figura.



Comprendida la representación geométrica de las sustituciones y sabiendo cómo por medio de esta representación se puede obtener el producto de varias de ellas, entremos en la demostración del teorema.

Para demostrar que las sustituciones S y TST^{-1} son semejantes, hay que probar que se descomponen en el mismo número de ciclos, que tienen respectivamente el mismo número de letras. Esto quedará probado demostrando que cualquier ciclo de TST^{-1} tiene su correspondiente del mismo orden en S y recíprocamente.



Consideremos un ciclo cualquiera de TST^{-1} , el cual tendrá en general menos letras que la sustitución, y sea el $(\alpha\beta\gamma\delta)$. Supongamos que en la sustitución T^{-1} las letras α, β, γ y δ vengán sustituidas por las $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \delta_1$ (1). Las rectas $\alpha\alpha_1, \beta\beta_1, \gamma\gamma_1$ y $\delta\delta_1$, situadas en la primera faja de la figura, representan la sustitución T^{-1} . Para que la línea quebrada que parte de α , y cuyo primer lado es $\alpha\alpha_1$, vaya a terminar en el punto β de la cuarta línea (y allí ha de terminar por ser $(\alpha\beta\gamma\delta)$ un ciclo de TST^{-1}), es preciso que el segundo lado, que empieza en α_1 y ha de estar comprendido en la 2.ª faja, termine en un punto de la tercera línea, tal, que uniéndole con el β de la cuarta resulte una recta simétrica de la $\beta\beta_1$, que está en la primera faja; y esto ha de ser así porque siendo T^{-1} y T dos sustituciones inversas, si en T^{-1} la letra β está sustituida por β_1 , en T la letra β será la que sustituya a β_1 ; resulta, pues, que la línea quebrada que une el punto α de la primera línea con

el β de la cuarta es la $\alpha\alpha_1\beta_1\beta$. Por un razonamiento análogo al que acabamos de emplear, se ve que la quebrada que une el punto β de la primera línea con el γ de la cuarta es la $\beta\beta_1\gamma_1\gamma$; la que une los puntos γ y δ es la $\gamma\gamma_1\delta_1\delta$; y por fin, la que une los puntos δ y α y cierra, por tanto, el ciclo $(\alpha\beta\gamma\delta)$, es la $\delta\delta_1\alpha_1\alpha$.

Pero al mismo tiempo que se cierra este ciclo, entre las horizontales primera y cuarta, se cierra otro en la faja intermedia, que representa la sustitución S . En efecto; las rectas $\alpha_1\beta_1, \beta_1\gamma_1, \gamma_1\delta_1, \delta_1\alpha_1$, son las que representan parte de la sustitución S y esta parte es un ciclo, el $(\alpha_1\beta_1\gamma_1\delta_1)$, ó poniendo en vez de estas letras las que son en realidad en este ejemplo, el ciclo $(\gamma\delta\beta\alpha)$.

De igual modo se demostraría que todo ciclo de S tiene en TST^{-1} otro correspondiente de su mismo orden.

(Se continuará.)

M. LUIÑA.

Alumno de la Escuela de Caminos

REVISTA EXTRANJERA

Duración de las lámparas de incandescencia.

L'Electricien, en uno de sus números recientes, contiene un artículo suscrito por A. Lély, inspirado en un trabajo publicado en el *Bulletin technique*; extractamos de aquel artículo las siguientes consideraciones.

Muchos ingenieros se fijan todavía exclusivamente en la duración, para apreciar la bondad de las lámparas de incandescencia, y algunos han formado cuadros para diferentes clases de lámparas, con el objeto de elegir las más duraderas. Este criterio de elección es, sin embargo, discutible, por razón del considerable descenso del precio de las lámparas en estos últimos años, que puede ser causa, en ciertos casos, de que la ventaja del aumento de su duración sea secundaria, como vamos a demostrar.

Todo el mundo sabe que, en las lámparas de incandescencia, se produce la luz por el calentamiento de un filamento de carbón extremadamente tenue colocado en un vacío relativo, hasta la temperatura en que se vuelve incandescente.

Este calentamiento se produce por la resistencia que experimenta la corriente al pasar por el filamento de carbón; la cantidad de calor que se desprende y produce la incandescencia, transformándose una parte del calor en luz, está dada por la ley de Joule,

$$H = k R I^2 t$$

siendo H el calor desprendido, R la resistencia del conductor, I la intensidad de la corriente, t el tiempo y k un coeficiente numérico igual a la inversa del equivalente mecánico del calor.

Si se llama Q a la cantidad de electricidad que pasa durante el tiempo t , es decir, al producto It (ley de Faraday), la ecuación anterior se puede escribir bajo la forma

$$H = k R Q I = k R \times It \times I.$$

Si se hace variar la resistencia R , permaneciendo constantes H y t , se ve que, cuando R aumenta, la intensidad I disminuye.

Luego para una misma cantidad de calor H , la intensidad I será tanto menor, cuanto mayor sea la resistencia R del conductor.

Según esto, para obtener lámparas incandescentes que gasten poca electricidad, conservando la misma potencia luminosa, será preciso disminuir todo lo posible la sección del filamento de carbón para que aumente la resistencia. En la práctica, se trata de disminuir sensiblemente la sección sin aumentar demasiado la longitud del filamento, con el objeto de que conserve suficiente

(1) Estas letras, $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \delta_1$, son las mismas $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ en otro orden; por eso en la figura están colocadas en correspondencia con ellas.