

ATENE0 DE MADRID

CONFERENCIAS DEL SEÑOR ECHEGARAY

(Conclusión (4))

Entremos ya en el estudio de las propiedades de las sustituciones; y como preliminar—no indispensable, mas conveniente—definamos lo que se entiende por *orden* de una sustitución, de la cual definición resultará el conocimiento de algunas propiedades de gran importancia.

Consideremos la serie formada por las potencias sucesivas de una sustitución A ; sea

$$A^0, A, A^2, A^3, \dots$$

Todas estas potencias son sustituciones de los n objetos que entran en A . Como la serie es indefinida y el número $n!$ de las sustituciones posibles de n objetos es finito, habrá muchos términos de esa serie que serán iguales; consideremos dos de ellos A^p y A^q , se tendrá:

$$A^p = A^q,$$

y si el término A^q es posterior en el orden de colocación al A^p , llamando d á la diferencia $q - p$, resultará:

$$A^p = A^{p+d};$$

multiplicando los dos miembros por la sustitución A^{-p} aplicada, ya á la derecha, ya á la izquierda, tendremos:

$$A^{-p} A^p = A^d,$$

y como $A^{-p} A^p$ representa la sustitución idéntica, resulta:

$$A^d = 1.$$

Esta consecuencia nos dice que antes de repetirse un término A^p de la serie, se repite el primero; pues d es menor que q . Si d es el menor número que satisface á la condición

$$A^d = 1$$

se dice que es el *orden* de la sustitución A .

En el ejemplo presentado al hablar de las potencias de una sustitución, en el cual

$$S = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 3 & 5 & 1 \end{vmatrix},$$

vimos que se verificaba

$$S^4 = 1;$$

la sustitución S es de cuarto orden.

Como la potencia siguiente á la A^d (siendo d el *orden*), resulta de multiplicar ésta por A , se tiene

$$A^{d+1} = A;$$

de igual modo se ve que

$$A^{d+2} = A^2,$$

y, por tanto, que la serie formada por las potencias de una sustitución puede escribirse como indica el cuadro siguiente:

$$\begin{array}{ccccccc} A^0 & A & A^2 & A^3 & \dots & A^{d-1} \\ A^d & A^{d+1} & A^{d+2} & A^{d+3} & \dots & A^{2d-1} \\ A^{2d} & A^{2d+1} & A^{2d+2} & A^{2d+3} & \dots & A^{3d-1} \\ A^{3d} & A^{3d+1} & \dots & \dots & \dots & \dots \end{array}$$

en el cual, las sustituciones colocadas sobre una misma vertical son iguales.

Las analogías que hemos observado entre las teorías de las sustituciones y de las ecuaciones, al definir las potencias negativas de sustituciones y al resolver ecuaciones de primer grado formadas por éstas, nótanse también aquí.

En efecto, si consideramos la sustitución A como una de las raíces *primitivas* de la ecuación binomia

$$x^d - 1 = 0,$$

en la cual d es el orden de la sustitución, veremos que la primera línea del cuadro anterior contiene las d raíces de esta ecuación y que cualquier potencia de A reproduce una de las raíces anteriores. No tardaremos en hallar nuevas analogías, sino entre la teoría de las sustituciones y la de las ecuaciones, entre aquella y alguna de las teorías que enseña la aritmética.

Ya conocemos algunas propiedades de las sustituciones; representando por N el número $n!$, y por

$$S_1, S_2, S_3, S_4, \dots, S_N$$

las sustituciones que pueden formar los n objetos, sabemos que entre estas sustituciones hay agrupaciones que pueden considerarse formadas por potencias de una misma sustitución; es decir, que, por ejemplo, las sustituciones

$$S_\alpha, S_\beta, S_\gamma, \dots, S_\mu$$

son potencias de una misma sustitución S_h y que el número de esas potencias es igual al *orden* de esta sustitución; otra serie de sustituciones son potencias de otra sustitución S_k , y así sucesivamente. Esto nos dice mucho respecto de la composición de las N sustituciones. Penetrando más en el conocimiento de la serie

$$S_1, S_2, S_3, S_4, \dots, S_N,$$

la cual se dice que forma un *grupo* llamado *total* y también *simétrico*, iremos entresacando de ella sustituciones especiales, cuyas propiedades estudiaremos detalladamente.

Entre esas N sustituciones de los n objetos, que nosotros representamos por números, habrá seguramente la

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & n \\ 2 & 1 & 3 & 4 & \dots & n \end{vmatrix},$$

que consiste en cambiar solamente dos objetos entre sí. Esta sustitución especial (que no es única en la serie anterior, pues habrá tantas de éstas como combinaciones pueden hacerse con n objetos tomados dos á dos, que son $\frac{n(n-1)}{2}$), se escribe generalmente así:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$$

y recibe el nombre de *transposición*. Representándola por T , tendremos:

$$T = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1.$$

Las transposiciones son sustituciones de segundo orden. La serie de las potencias de una transposición tiene sólo dos términos distintos T^0 y T ó T y T^2 , según se quiera; esta observación tiene importancia, como luego veremos.

En las transposiciones se verifica la propiedad notable de ser

$$T^{-1} = T:$$

de aquí se deduce que siempre que se haya de aplicar la transposición T^{-1} á un producto cualquiera, no es preciso molestarse cambiando el numerador y el denominador de T ; aplicando ésta, se obtiene el resultado buscado.

Las transposiciones son algo así como los divisores de un número, cuyas propiedades estudia la aritmética. De igual suerte que multiplicando entre sí ciertos factores se originan todos los números enteros; así sucede que, multiplicando entre sí determinadas transposiciones, se forman todas las sustituciones. El teorema siguiente nos dice ser cierta la afirmación anterior:

Toda sustitución es un producto de transposiciones.

La demostración que de este importante teorema dió el Sr. Echegaray es sencillísima. Sea la sustitución

$$S = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ \alpha & \beta & \gamma & \dots & \mu \end{vmatrix};$$

El primer elemento de esta sustitución da lugar, por los números que le forman, á la transposición

$$S = \begin{vmatrix} 1 & \alpha \\ \alpha & 1 \end{vmatrix}.$$

Para que ésta pueda ser factor de la sustitución dada, es preciso que se verifique la relación

$$S = \begin{vmatrix} 1 & \alpha \\ \alpha & 1 \end{vmatrix} X$$

habiendo de ser X una sustitución. Esta relación es una ecuación de primer grado y ya hemos dicho cómo se resuelve. Recordando la propiedad de las potencias 1 y -1 de una transposición, tendremos:

$$X = \begin{vmatrix} 1 & \alpha \\ \alpha & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ \alpha & \beta & \gamma & \dots & \mu \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ \beta' & \gamma' & \dots & \mu' \end{vmatrix}$$

ó sea

$$X = \begin{vmatrix} 2 & 3 & \dots & n \\ \beta' & \gamma' & \dots & \mu' \end{vmatrix}.$$

La sustitución X no tiene el elemento 1; consta de $n-1$ objetos. El teorema está demostrado en principio, porque aplicando el método anterior á X se transformará en el producto de otra transposición por una nueva sustitución Y , que tendrá sólo $n-2$ objetos. De este modo llegaremos á un cociente U , que tendrá dos objetos, y probando que este cociente es una transposición, queda terminada la demostración. La sustitución X tiene de menos el objeto 1; la Y los 1 y 2; la Z los 1, 2 y 3, etc. El último cociente U no tendrá sino los dos últimos objetos $n-1$ y n , y con éstos la sustitución que se forma es una transposición.

Apliquemos este teorema á la sustitución

$$S = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{vmatrix}.$$

Efectuando la descomposición de igual modo que en el caso general, resulta:

$$S = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} X;$$

despejando X se obtiene

$$X = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 \end{vmatrix}.$$

Descomponiendo X de un modo análogo que S , tendremos:

$$X = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} Y.$$

de donde

$$Y = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}.$$

En definitiva

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}.$$

Si en vez de tomar como factores de S y de X los que hemos tomado en el ejemplo anterior, hubiéramos tomado los

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \text{ y } \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}.$$

resultaría

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}.$$

No se crea que por ser el factor

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}$$

común á los dos desarrollos, puede suprimirse al igualarlos y escribir

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix};$$

ese factor está á la izquierda en el primer desarrollo, á la derecha en el segundo; no es posible considerarle como factor común.

Los dos desarrollos obtenidos en el ejemplo anterior tienen el mismo número de factores, tres. Puede caber la duda de si un método de descomposición nos conducirá á obtener un número impar de factores, habiendo sido descompuesta la sustitución en un número par de ellos mediante otro procedimiento.

Por más que en las sustituciones no es difícil convenirse de que cualquier método de descomposición conduce siempre al mismo número de factores, demostraremos un teorema general que comprende, como caso particular, el que ocasiona la duda antes señalada, y que puede considerarse como el complemento del teorema fundamental que acabamos de demostrar.

El número N de sustituciones de n objeto es par; pues bien: *La mitad de las N sustituciones se descomponen en un número par de transposiciones, y la otra mitad se descomponen en un número impar.*

Suponiendo que el teorema es cierto para las sustituciones de n objetos, vamos á demostrar que lo es también para las de $n+1$.

Consideremos una sustitución cualquiera de n elementos:

$$S = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ \alpha & \beta & \gamma & \dots & \mu \end{vmatrix}.$$

Si recordamos cómo se pasa de las permutaciones de

n letras á las de $n + 1$, sabremos cómo se forman las sustituciones de $n + 1$ objetos conocidas las de n . Nos basta considerar una sola sustitución S , siendo cualquiera, porque se repite con las demás lo que de ella digamos.

La sustitución

$$T = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n & n+1 \\ x & y & z & \dots & n & n+1 \end{vmatrix}$$

se descompone en el mismo número de factores que S , por ser igual á ella; pero haciendo que el $n + 1$ del denominador ocupe sucesivamente todos los lugares que están á su izquierda, obtendremos, juntamente con T , todas las sustituciones de $n + 1$ objetos que se pueden formar partiendo de la S , las cuales son en número de $n + 1$. Todas esas sustituciones, menos la T , por tener un *elemento* más que la S , se descomponen en un número impar de transposiciones si ésta se descompone en un número par, y viceversa. Resulta de aquí que la mitad de las $(n + 1)!$ sustituciones de $n + 1$ objetos, se descomponen en un número par de factores y la otra mitad en un número impar. Veamos ahora si hay algún punto de partida, porque de no haberle no estaría demostrado el teorema.

Sabemos que dos objetos no pueden formar sino dos sustituciones: la directa ó idéntica

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$$

y la *invertida*

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$$

Esta segunda se descompone, como se ve, en un número impar (uno) de transposiciones; falta ver si la primera se descompone en un número par. Recordando una propiedad importante de las transposiciones $T^2 = 1$, diremos que la sustitución idéntica es el cuadrado de la invertida.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}^2$$

La sustitución idéntica de dos letras se descompone, pues, en un número par de transposiciones: el teorema está demostrado.

Hemos dicho que el método que seguiríamos para estudiar las N sustituciones de n objetos consiste en elegir de entre esas sustituciones algunas que sepamos están en el grupo que forman las N y estudiar las propiedades de esas que elegimos. Estudiadas en primer lugar las sustituciones que son potencias de otras, y en segundo las transposiciones, vamos á ocuparnos ahora en el estudio de otras sustituciones especiales que son de mucha importancia.

Entre las N sustituciones existirá, seguramente, la siguiente:

$$C = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n \\ 2 & 3 & 4 & \dots & n & 1 \end{vmatrix}$$

que consiste en escribir debajo de cada número del numerador el que tiene á su derecha, y debajo del último el primero.

Estas sustituciones reciben el nombre de *circulares*, el

cual procede de la interpretación geométrica que se les puede dar. Dividiendo una circunferencia en n partes iguales, el ángulo correspondiente á cada división tiene por graduación la n^a parte de 360. Si señalamos los puntos de división con los guarismos 1, 2, 3, $\dots$, n y hacemos girar la figura $\frac{360}{n}$ grados alrededor del centro, de tal

modo, que el punto 2 se coloque sobre el 1, la nueva disposición de los números nos dará el denominador de la sustitución.

Las sustituciones *circulares* son notables desde el punto de vista de su relación con problemas de la cantidad. En efecto, la *representación analítica* de una sustitución de esta clase es muy sencilla; la $f(z)$ se simplifica mucho; es de primer grado. El símbolo de esa representación es

$$\frac{z}{z+1}$$

En este artículo hemos expuesto lo que el Sr. Echegaray explicó en las conferencias sexta y séptima, últimas de la primera parte del curso.

Aunque el que escribe estas líneas tuviera (que no la tiene) autoridad bastante para encarecer los méritos del Sr. Echegaray, se vería obligado á dejar á la consideración de los lectores la estimación de las cualidades que como profesor le adornan, las cuales son tales y tantas, que para celebrarlas debidamente serían necesarias las plumas de aquellos nuestros escritores que tan bien y tan propiamente sabían combinar los adjetivos encomiásticos para ensalzar lo que era digno de alabanza.

M. LUIÑA.

Alumno de la Escuela de Caminos.

PROYECTO DE REGLAMENTO PARA INSTALACIONES ELECTRICAS (1)

(Continuación.)

CAPÍTULO VI

Conductores aéreos.

Art. 34. a) Los apoyos de los conductores aéreos, ya sean metálicos ó de madera, deberán colocarse á una distancia que no exceda de 100 metros en línea recta, ni de 60 cuando el conductor afecte un trazado en curva.

b) Tendrán estos postes la resistencia suficiente y apropiada á los esfuerzos que sufran, y en las poblaciones se dispondrán y pintarán de modo conveniente para satisfacer al ornato público.

c) Los conductores deben quedar, cuando menos, á una altura sobre el suelo de seis metros.

d) Cuando estos conductores se establezcan en parajes habitados, deben quedar á 10 metros, por lo menos, encima del piso de la calle y á un metro de distancia de los edificios.

e) Cuando se establezcan por encima de habitaciones

(1) Véase el número anterior.