

para mayor claridad de cuanto se proyectaba en el Arsenal; y todo lo demás del puerto natural quedaba fuera de proyecto.

1750.—Empieza la construcción del edificio fábrica de jarcias del Arsenal.

(Se continuará.)

FÉLIX MARTÍNEZ.

ATENEÓ DE MADRID

CONFERENCIAS DEL SEÑOR ECHEGARAY

Terminábamos el artículo anterior definiendo lo que se entiende por *multiplicación simbólica* de sustituciones y notando que, según esta definición, el producto de varias sustituciones no tiene, en general, la propiedad conmutativa, pero si la *asociativa* cuando los factores que se asocian son contiguos.

Al efectuar el producto de las sustituciones

$$S = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ x_3 & x_1 & x_4 & x_2 \end{vmatrix} \text{ y } T = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ x_3 & x_4 & x_1 & x_2 \end{vmatrix}$$

obtuvimos el resultado de una manera muy sencilla, comparando la función dada $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$ con la transformada $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$; pero observando que el estudio de las sustituciones se refiere únicamente al conocimiento de las propiedades del símbolo que hemos dicho representa la sustitución, sin tomar en cuenta la forma f de la función que se transforma, y fijándonos en que para llegar á la función $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$ hemos pasado por la intermedia $f(x_3, x_1, x_2, x_4)$ y en que así ésta como aquella han sido obtenidas guiándonos por los símbolos S y T , nos persuadiremos de que no es posible obtener el producto de dos sustituciones, empleando este método, que hemos calificado de sencillo, pero que no es tal más que en la apariencia. Es, pues, necesario poder efectuar el producto ST independientemente de cuál sea la función á quien se aplica las sustituciones anteriores. Pero antes de explicar cómo puede realizarse ese producto, conviene hacer dos observaciones de importancia: la una nos permitirá ser más breves en las explicaciones sucesivas; la otra nos ofrecerá también brevedad en la escritura y además nos habrá de permitir, antes de mucho, enlazar la teoría de las sustituciones, puramente simbólicas, con la de los números.

La primera observación consiste en hacer saber qué es lo que se entiende por *elemento* de una sustitución. Se entiende por tal el conjunto de dos letras que se corresponden: si x_α es una letra del numerador y x_β la correspondiente del denominador, el símbolo

$$\begin{vmatrix} x_\alpha \\ x_\beta \end{vmatrix}$$

es lo que se llama *elemento* de la sustitución. Una sustitución tiene tantos elementos cuantas letras entran á formar la. La sustitución

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ x_3 & x_1 & x_4 & x_2 \end{vmatrix}$$

tiene los cuatro elementos

$$\begin{vmatrix} x_1 \\ x_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_2 \\ x_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_3 \\ x_4 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_4 \\ x_2 \end{vmatrix}.$$

Recordando lo que hemos dicho respecto de la colocación de las letras en el numerador, comprenderemos la importancia que tiene esta noción de *elemento*. El elemento en sí es lo importante; es lo esencial en una sustitución. Pueden colocarse los elementos de cualquier modo, en cualquier situación relativa, y la sustitución no cambia. Esta varía únicamente cuando cambian los elementos.

La segunda observación se refiere á una nueva notación que se emplea para indicar las sustituciones. Consiste esta notación en suprimir las letras dejando solamente los subíndices. Una sustitución de n objetos, se representará así:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ \alpha & \beta & \gamma & \dots & \mu \end{vmatrix}$$

siendo $\alpha, \beta, \gamma, \dots, \mu$ los mismos números $1, 2, 3, \dots, n$ en cierto orden.

Veamos ahora cómo se efectúa el producto de dos sustituciones. Sea T la sustitución siguiente, en la cual sólo hacemos aparecer un *elemento*,

$$T = \begin{vmatrix} \dots & \alpha & \dots \\ \dots & \beta & \dots \end{vmatrix}$$

En la sustitución S (primer factor del producto) hagamos explícito el *elemento* que tiene por numerador β ; se tendrá

$$S = \begin{vmatrix} \dots & \beta & \dots \\ \dots & \gamma & \dots \end{vmatrix}$$

El producto ST se obtendrá aplicando primero á la función (cuya forma nos importa poco) la sustitución T y después la S . Aplicando la T sustituiremos el elemento α por el β y repetiremos una cosa análoga con los demás elementos que entran en T . En la función que así resulta, que no necesitamos conocer, habrá que sustituir, al aplicarle la sustitución S , el elemento β por el γ y los demás del numerador de S por los del denominador. Pero sustituir en la función dada el elemento α por el β y en la transformada el β por el γ , equivale á pasar de aquella á la última, á la función definitiva, mediante la sustitución de α por γ ; resulta de aquí que el producto

$$\begin{vmatrix} \dots & \beta & \dots \\ \dots & \gamma & \dots \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \dots & \alpha & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}$$

es igual á

$$\begin{vmatrix} \dots & \alpha & \dots \\ \dots & \gamma & \dots \end{vmatrix}$$

repetiendo, claro es, con los demás elementos, lo que hemos hecho con α . Vemos, pues, que para obtener el producto no hay más sino tomar en el segundo factor un *elemento* cualquiera $\begin{vmatrix} \alpha \\ \beta \end{vmatrix}$, ver cuál *elemento* del primer factor tiene por numerador β , sea $\begin{vmatrix} \beta \\ \gamma \end{vmatrix}$ este elemento, y escribir otro $\begin{vmatrix} \alpha \\ \beta \end{vmatrix}$ con las letras no comunes. Observemos que hay una gran analogía entre la multiplicación de sustituciones y la ordinaria: si consideramos el primer elemento como el cociente $\frac{\alpha}{\beta}$ de las

letras ó números que le forman y el segundo como el cociente análogo $\frac{\beta}{\gamma}$, multiplicando estas dos fracciones, tendremos

$$\frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{\beta}{\gamma} = \frac{\alpha}{\gamma};$$

el producto $\frac{\alpha}{\gamma}$ representa el elemento $\left| \frac{\alpha}{\gamma} \right|$. Podemos, pues, decir (con las salvedades que el buen juicio sugiere) que el producto de dos sustituciones se obtiene *multiplicando* sus *elementos* correspondientes.

Prácticamente, el método más sencillo para multiplicar dos sustituciones consiste en escribir debajo de la segunda las letras correspondientes al denominador de ella, buscando mediante la primera, y escribir la sustitución que forma la primera línea y la tercera. Así tendremos, por ejemplo,

$$\begin{array}{c|c|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 1 & 3 & 4 \\ \hline 4 & 3 & 2 & 1 & 5 \end{array} = \begin{array}{c|c|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 5 \end{array}$$

ó igual á

$$\begin{array}{c|c|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{array}$$

puesto que no es preciso escribir el número 5 común al numerador y al denominador.

Las potencias enteras y positivas de una sustitución se definen como las ordinarias.

Si

$$S = \begin{array}{c|c|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 3 & 5 & 1 \end{array}$$

ó sea igual á

$$\begin{array}{c|c|c} 1 & 2 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 5 & 1 \end{array}$$

se tendrá

$$S^2 = \begin{array}{c|c|c} 1 & 2 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 5 & 1 \end{array} \begin{array}{c|c|c} 1 & 2 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 5 & 1 \end{array} = \begin{array}{c|c|c} 1 & 2 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 1 & 2 \end{array}$$

$$S^3 = \begin{array}{c|c|c} 1 & 2 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 1 & 2 \end{array} \begin{array}{c|c|c} 1 & 2 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 5 & 1 \end{array} = \begin{array}{c|c|c} 1 & 2 & 4 & 5 \\ 5 & 1 & 2 & 4 \end{array}$$

$$S^4 = \begin{array}{c|c|c} 1 & 2 & 4 & 5 \\ 5 & 1 & 2 & 4 \end{array} \begin{array}{c|c|c} 1 & 2 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 5 & 1 \end{array} = \begin{array}{c|c|c} 1 & 2 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 4 & 5 \end{array}$$

$$S^5 = \begin{array}{c|c|c} 1 & 2 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 4 & 5 \end{array} \begin{array}{c|c|c} 1 & 2 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 5 & 1 \end{array} = S$$

Se notará en este ejemplo algunas particularidades: no son peculiares de la sustitución dada, son propiedades esenciales de toda sustitución que no tardaremos en estudiar.

(Se continuará.)

M. LUIÑA.

Alumno de la Escuela de Caminos.

NUEVA CUBIERTA

PROYECTADA PARA EL DEPÓSITO COMERCIAL DEL PUERTO DE BARCELONA

Actualmente se está contruyendo en el puerto de Barcelona un edificio importante, que servirá para depositar las mercancías destinadas á la reexportación. No hace mucho tiempo que se publicó en el BOLETÍN DE LA REVISTA DE OBRAS PÚBLICAS una ligera descripción del mismo, indicando, á la vez, algunos pormenores acerca de la marcha de sus obras; esta circunstancia nos permite ahora entrar desde luego en el asunto especial de nuestro estudio, dispensándonos de reproducir las ideas que entonces se expusieron.

Al tratar de construir la cubierta del edificio citado se notaron algunas dificultades prácticas, que aconsejaron proponer una modificación del proyecto primitivo, procurando evitarlas, y al mismo tiempo obtener la economía posible.

Para conseguir estos fines se ha tenido presente la necesidad de no variar en nada las dimensiones esenciales de la cubierta proyectada, que serán las siguientes: 15,15 metros de luz, vertientes con inclinación de 2½, de base por 1 de altura, y 4,25 metros de separación de eje á eje entre las cerchas. Además se ha puesto particular cuidado en que se conserve la disposición, que se juzga ventajosa, de emplear la teja de alfarería, é inferiormente bóvedas ligeras de ladrillo, para obtener, aunque á costa de mayor peso, que la impermeabilidad sea completa, que no pueda entrar el aire ni el polvo por la cubierta, y que la temperatura oscile menos en el interior; en una palabra, que se dote de inmejorables condiciones al último piso para la conservación de las mercancías almacenadas.

El problema así planteado se resolvía en el proyecto primitivo estableciendo cerchas sistema Polonceau con una tornapunta, cuyos pares sostendrían bóvedas de ladrillo, sumamente ligeras y sin sobrecarga alguna, de 4,25 metros de luz y 0,35 m. de flecha; en los mismos pares se apoyarían correas, de sección de ángulo, sobre las cuales se sujetarían directamente las tejas planas.

La gran extensión de los almacenes que han de cubrirse, que es de más de tres mil quinientos metros cuadrados, y el considerable peso producido por la cubierta de bóveda y de teja, dan particular importancia á todos los detalles desde el punto de vista económico; nosotros, después de hacer algunos tanteos, creemos haber encontrado una disposición aceptable, que permitirá introducir en el presupuesto de la obra la economía de más de 50.000 pesetas, sin perjudicar en nada á la solidez y á los buenos resultados de la construcción.

En las figuras de la lámina que se acompaña y de las que insertaremos en números sucesivos, se dibujan los elementos esenciales para dar una idea del proyecto modificado.

La armadura se compondrá de cuchillos, correas y cables; sobre estos últimos, separados 0,85 m. de eje á eje, se apoyarán bovedillas de ladrillo, que á su vez sostendrán directamente las tejas; las correas distarán entre sí dos metros próximamente, y transmitirán las cargas á los cuchillos, gravitando en los puntos donde las otras piezas de la cercha sostendrán á los pares, de manera que estos últimos sólo deberán resistir á la comprensión longitudinal, elimi-