

el número total de sustituciones. Ya hemos visto que la función que satisface esta condición, es la lineal de coeficientes desiguales $V = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n$. Aplicando á V todas las sustituciones resultan los valores

$$V_1 = V, V_2, V_3, \dots, V_N.$$

La ecuación que tiene por raíces estos N valores de V , es la siguiente:

$$(V - V_1)(V - V_2) \dots (V - V_N) = 0$$

que desarrollada se convierte en la

$$V^N - \Sigma V_1 \cdot V^{N-1} + \Sigma V_1 V_2 \cdot V^{N-2} - \dots + V_1 V_2 \dots V_N = 0$$

los coeficientes son funciones simétricas de x_1, x_2, \dots, x_n y pueden, por tanto, expresarse en función de los de $f(x) = 0$.

La ecuación anterior es la *resolvente* de Galois, y juega importantísimo papel en la teoría de las ecuaciones, no porque pueda resolverse, que en general no se puede porque es de un grado enorme, sino porque con su ayuda se determinan las leyes generales de este estudio.

El teorema de Abel, al que sirve de preparación lo que hemos dicho poco há, establece que cualquier raíz, x_i por ejemplo, es una función racional de cualquiera de los valores de V . Vamos á demostrar este teorema estableciendo que x_i es función racional $V_1 : x_i = R_i(V_1)$.

Dejemos fija la raíz x_i y hagamos con las demás todas las permutaciones posibles, que son $(n-1)! = \mu$. Formemos una ecuación de grado μ cuyas raíces sean V_1, V_2, \dots, V_μ . Esta ecuación $(V - V_1)(V - V_2) \dots (V - V_\mu) = 0$, ya no es simétrica con relación á x_1, x_2, \dots ; pero si dividimos $f(x)$ por $x - x_i$ los coeficientes del cociente son funciones de los coeficientes de $f(x)$ y además de x_i ; luego los coeficientes de $(V - V_1)(V - V_2) \dots (V - V_\mu) = 0$ se expresarán en función F de V y x_i .

La ecuación $F(V, x_i) = 0$ se satisface para $V = V_1$; luego $F(V_1, x_i) = 0$. Pero $F(V_1, x_i)$ puede considerarse como el resultado de pasar x_i en vez de x en la ecuación $F(V_1, x) = 0$: verificándose esta ecuación por el valor x_i y siendo éste también raíz de $f(x) = 0$, resultan tener estas dos ecuaciones una raíz común y solamente una como fácilmente se demuestra; al hallar el *m.c.d.* de $F(V_1, x)$ y $f(x)$ encontramos como último divisor, una función de primer grado en x y cuyos coeficientes serán racionales respecto de V_1 y de los coeficientes de $f(x) = 0$. El *m.c.d.* será, pues, de la forma $x - R_1(V_1)$ y como tiene por raíz x_i , resulta $x_i - R_1(V_1) = 0$ ó $x_i = R_1(V_1)$ según deseáramos demostrar.

La demostración del teorema de Abel es de gran importancia, no por hacer comprender la verdad del teorema, que de modo más inmediato se puede demostrar, sino porque permite hallar relaciones importantes entre los varios factores que entran en la teoría que exponemos.

Que ese teorema puede demostrarse mucho más fácilmente que como lo demostró Galois, nos lo hizo ver el señor Echegaray, quien dedujo el teorema considerándole como corolario del de Lagrange.

Hemos dicho que dada la ecuación $f(x) = 0$, la resolvente $\psi(V) = 0$ era de la forma $\pi(V - V_h) = 0$ en que V es una función de x_1, x_2, \dots, x_n y en la teoría de Galois igual á $a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n$.

Tomemos el factor $\psi(V)$ de $\psi(V)$ y escribamos que to-

das las raíces de $f(x) = 0$ son funciones racionales de V_1 , por ejemplo.

$$x_1 = R_1(V_1); x_2 = R_2(V_1); x_3 = R_3(V_1); \dots x_n = R_n(V_1).$$

Si V_h es raíz de $\psi(V) = 0$ las expresiones:

$$x_\alpha = R_1(V_h); x_\beta = R_2(V_h); \dots x_\mu = R_n(V_h)$$

reproducen la forma de R_1, R_2, \dots y ésta es igual ya se tome V_1 ú otra cualquiera raíz.

En efecto, x_i satisface á la ecuación propuesta y por tanto $f(x_i) = 0$, ó lo que es igual $f[R_1(V_1)] = 0$; esta expresión puede suponerse ser el resultado de sustituir V_1 en vez de V en $f[R_1(V)] = 0$: de aquí se deduce que esta ecuación y la $\psi(V) = 0$ tienen común la raíz V_1 y como $\psi(V)$ es irreducible, resulta que tienen comunes todas las raíces; luego $f[R_1(V_h)] = 0$; pero falta probar que no hay raíces iguales, y esto es claro, pues si fuese $R_2(V_h) = R_3(V_h)$ la ecuación $R_2(V) - R_3(V) = 0$ tendría la raíz V_h común con $\psi(V)$, y si esto fuese así tendrían comunes todas las raíces, y entre ellas la V_1 , resultando así $R_2(V_1) = R_3(V_1)$ ó $x_2 = x_3$, lo cual no es cierto.

En la última conferencia, hizo el Sr. Echegaray algunas indicaciones sobre la definición de las irracionales y sobre la ampliación del dominio de racionalidad mediante la introducción de las ecuaciones *adjuntas* que tanto simplifican ciertos problemas.

M. LUIÑA.

REVISTA EXTRANJERA

Comparación de los morteros de cemento y de cal.

El conocido especialista en cementos, M. Candlot, ha publicado recientemente en la revista francesa *Nouvelles annales de la construction* un interesante estudio comparativo entre los morteros de cemento y los de cal. En atención á la importancia del asunto, y dada la reconocida competencia del autor, nos proponemos publicar la traducción íntegra de ese trabajo en números sucesivos.

«La superioridad de los morteros de cemento de Portland sobre los de cal ha sido puesta en evidencia tantas veces, que parece superfluo añadir nuevos argumentos en apoyo de una verdad que no puede ser negada en serio. En el extranjero todas las obras de alguna importancia se ejecutan con mortero de cemento; el empleo de cales parecería un retroceso hacia los procedimientos ya anticuados de las épocas en que el constructor no poseía otra regla que la rutina. En Francia, donde el arte de las construcciones ha alcanzado hace ya tiempo un nivel tan elevado, parece que existe actualmente, respecto á ciertos puntos, un verdadero estado de inferioridad; se puede atribuirlo en gran parte á la ignorancia de las cualidades y propiedades de los materiales más usuales; los constructores se contentan con nociones vagas y generalmente erróneas; para no citar más que un ejemplo, la opinión de que las mezclas de cal y de cemento son malas á causa de la diferencia de fraguado de estos productos es

casi unánime. No es necesario, sin embargo, un estudio muy largo de las cales y de los cementos para saber que no existen estas pretendidas discordancias de fraguado y de cristalización.

En Alemania y en Austria no hay ingeniero, arquitecto ó contratista que no posea nociones bastante precisas sobre los materiales de construcción, y especialmente sobre las cales y cementos; se sabe apreciar el valor de una argamasa y se comprende el interés que ofrece el empleo de un mortero de gran resistencia. Entre nosotros ¿cuántos arquitectos ó contratistas se encontrarían, aun entre los que han ejecutado las obras más importantes, que tengan ideas exactas sobre los materiales de agregación? ¡Y cuántos obstáculos se encuentran por esa razón para conseguir que se adopten procedimientos nuevos! ¡Cuántas invenciones que aquí no se tomaron en serio han vuelto á nuestro país después de haber sido adoptadas y de haberse desarrollado en el extranjero!

No se puede explicar, sino por la rutina ó por un conocimiento imperfecto de los productos hidráulicos, la preferencia que se ha dado frecuentemente á los morteros de cal en un gran número de obras construidas estos últimos años; un ejemplo reciente, y por desgracia bastante concluyente, ha hecho ver lo que pueden costar estos errores (1).

El valor de ciertas cales hidráulicas, cuya reputación es muy merecida, no puede ser negado, y nadie podrá pretender que se deba emplear siempre el cemento. Pero se considera el cemento como un producto muy caro y que no se debe adoptar sino cuando es imposible evitarlo. Contra este error queremos protestar. Hace unos quince años, el cemento se vendía efectivamente á precios elevados; no siempre se fabricaba con esmero y daba lugar á algunos fracasos; de ahí cierta desconfianza, que persiste aun entre algunos ingenieros que no han seguido los progresos de esta industria (2). Pero el precio de los cementos ha bajado mucho; se puede obtener muy buen cemento de Portland á 30 francos la tonelada sobre vagón en la fábrica; las fábricas se han multiplicado y los procedimientos de fabricación son hoy bastante perfectos para poder tener la seguridad de encontrar en casi todas productos de resultados absolutamente seguros.

Los elementos del precio de los morteros han cambiado mucho, por lo tanto, y en muchos casos, el mortero de cemento no resulta más caro que el de cal; pero permite sobre todo realizar verdaderas economías por la elección de las proporciones, por las modificaciones que se pueden adoptar respecto á las dimensiones de las obras, por los medios de ejecución, etc. Para demostrar una vez más las ventajas de los morteros de cemento, nos ha parecido interesante resumir en pocas líneas los resultados teóricos ó prácticos obtenidos en diversos puntos.

M. Batard, ingeniero de puentes y calzadas en Cette, ha realizado durante varios años consecutivos ensayos de morteros de cal y de cemento con proporciones diversas y arenas diferentes. Hé aquí la conclusión que ha deducido de estos experimentos:

(1) Véase el artículo de M. E. Coignet, *Génie civil*, tomo XXVII, número 19, página 201, sobre las causas de la catástrofe de Bouzey.

(2) Es sensible, por otra parte, que se encuentren en ciertas obras informaciones tan inexactas como esta, por ejemplo: «El de primera calidad se vende á 55 francos la tonelada en la estación de Boulogne. A pesar de las numerosas ventajas que ofrece el empleo de estos cementos, el ingeniero debe, pues, por razón de economía, limitar su aplicación á las partes en que son necesarios... (Procédés et Matériaux de construction, por A. Debauxe, edición de 1894)»

«El interés que hay en emplear morteros que ofrezcan gran resistencia á la tracción es, evidentemente, general para todas las obras; pero presenta una importancia muy especial para las obras llamadas á trabajar por flexión, y en las cuales, por consiguiente, la resistencia á la tracción entra directamente en juego; las bóvedas, los zampeados de las esclusas ó de los diques secos de carena, los bloques artificiales de revestimiento de diques, etc.

»En este último caso, teniendo en cuenta el precio, á menudo muy elevado, del metro cúbico de hormigón ó de mampostería, parece que no se debería vacilar nunca al elegir la naturaleza y las proporciones de las materias susceptibles de proporcionar el mejor mortero, siendo así que esta elección puede frecuentemente duplicar el valor de las obras á cambio de un gasto suplementario relativamente de poca importancia.

»En Cette, por ejemplo, la cal vale 20 francos la tonelada, el cemento 42 francos; la arena de la playa de Cette cuesta, por metro cúbico, 1,50 francos y la arena de Argelés de 7 á 8 francos; en estas condiciones, la diferencia de precio entre mamposterías ú hormigones ejecutados, por una parte, con mortero de arena de Cette, en proporciones de un metro cúbico de arena y 400 kilogramos de cal, y por otra, con mortero de 1 metro cúbico de arena de Argelés y 500 kilogramos de cemento, es de 7,50 francos para la mampostería y de 11 francos para el hormigón muy rico.

»Mas si se comparan las resistencias de los dos morteros precedentes en diversas épocas, llama la atención la enorme superioridad del mortero de cemento sobre el de cal; al mes, la resistencia del primero es tres ó cuatro veces mayor que la del segundo; más tarde, desde los tres meses hasta cuatro años, es por lo menos doble. No hay, pues, solamente mayor rapidez en el fraguado, lo cual muchas veces es una ventaja, sino también una resistencia final mucho mayor; sin contar con que los morteros de cemento resisten mejor, según parece, á la acción química del agua del mar. (1)»

(Se continuará.)

Amperímetro térmico de mercurio.

Diversas revistas técnicas extranjeras han tratado recientemente del amperímetro térmico de mercurio, debido á M. Charles Camichel. A fin de dar una idea de este aparato, traducimos á continuación la nota presentada por su autor á la Academia de Ciencias de París, en sesión de 5 de Julio próximo pasado.

Los amperímetros y voltímetros térmicos ofrecen grandes ventajas; no son influidos por la proximidad de las máquinas y se aplican muy bien á la medición de las corrientes alternativas. Se utiliza generalmente, en estos aparatos, la dilatación de un alambre, amplificándola por medio de un mecanismo adecuado. Sin embargo, existen aparatos térmicos fundados en la dilatación del aire; la *Reason manufacturing Company*, de Brighton, construye amperímetros térmicos en los cuales una ampolla llena de aire está rodeada de varias vueltas de una banda de platinoide, recorrida por la corriente que se trata de medir; el aire contenido en esta ampolla se dilata y su aumento de pre-

(1) Comisión de las cales y cementos en el Ministerio de Obras públicas. Documentos leídos en la sesión de 17 de Julio de 1890.