metro de la luz, y (f) á la distancia focal es: $h = \frac{m}{f}$; luego $\tau = n\,\delta.\ \frac{m}{2\pi f}$. (1) Como (τ) vale $\frac{1''}{10}$, y (δ) debe ser menor de $5''$, en cuanto se fijen la distancia focal (*orden*) de un aparato, y el diámetro de su foco luminoso, queda determinado el número de lentes y su velocidad de rotación.

—Para terminar debemos considerar el caso en que el tiempo de duración del destello sea menor que (τ). Entonces solo se verá el destello hasta la distancia en que la intensidad absoluta del haz luminoso se reduzca al valor $I = \frac{q}{t}$, dada por la ley de Bloch para el tiempo de *aparición* correspondiente á (t), y allí solo se percibirá la mínima intensidad (λ).

Pero como acercándose al faro aumenta rápidamente (I), á menores distancias se llegará pronto á ver el destello con *toda* la intensidad correspondiente.

Podrá convenir esta reducción en el tiempo que dura un destello cuando se trate de aparatos de muy poca divergencia horizontal, ó cuando se quiera dar gran intensidad á los destellos á distancias menores del máximo alcance. Habrá que reducir, en este último caso, el número de lentes del aparato y aumentar su velocidad de rotación.

JOSÉ ALBELDA.

(Se continuará.)

Errata en la página 360, líneas 28 y 29.

En el número anterior, y en este artículo sobre *Alumbrado marítimo*, figura una errata en la página 360 al tratar de la *relación* entre los eclipses que separan grupos de destellos y los que separan destellos del mismo grupo. Las fracciones son de 5'' no de 1'', y por lo tanto, hay que corregir los numeradores, bien poniendo 5'' en vez de 1'', ó mejor quitando la indicación de segundo y dejando las abstractas.

ATENEO DE MADRID

CONFERENCIAS DEL SR. ECHEGARAY

Deducida la forma de $x_1 - x_2$ mediante las consideraciones expuestas y estudiadas las funciones de tres valores, fijándose principalmente en la empleada por Lagrange y Ferrari para resolver las ecuaciones de cuarto grado, pasó el Sr. Echegaray á ocuparse en el estudio del *dominio de racionalidad*.

Se entiende por dominio ó función de racionalidad con relación á cantidades cualesquiera R_1, R_2, R_3, ... el conjunto de todas las funciones algebráicas y racionales con coeficientes racionales. Las cantidades R pueden ser irracionales; quien ha de ser racional es la función en que entran tales cantidades.

Ese conjunto de funciones que constituyen el dominio de racionalidad es infinito y podría decirse, por extensión, que forma un grupo dada la semejanza entre la definición de los grupos y la del dominio; claro es que el producto de dos funciones cualesquiera de ese dominio es otra función del mismo; pero no sucede esto solamente con la multiplicación, pasa lo mismo con la suma. Por esto no daremos el nombre de grupo á ese conjunto de funciones.

Además en el dominio de racionalidad están comprendidos todos los números; se comprende esto teniendo presente que no se altera un número multiplicándole por la potencia cero de R; así el número 5 entra como $5R^0$.

Esta idea del dominio de racionalidad tiene más importancia que la que se le atribuye á primera vista, porque hay expresiones que no pueden descomponerse en factores más sencillos si no se amplía ó cambia el dominio de racionalidad.

Si, por ejemplo, las cantidades con relación á las cuales consideramos el dominio se reducen á una sola R y si hacemos $R = a$, la expresión $r^2 - a$ descompuesta en factores da $x^2 - a = (x + \sqrt{a})\,(x - \sqrt{a})$, los cuales no son del dominio indicado; pero si le ampliamos y hacemos $R_1 = \sqrt{a}$ y $R_2 = -\sqrt{a}$, los factores en que se descompone $x^2 - a$ pertenecen ya al nuevo dominio de racionalidad.

Por todo lo dicho se llega á la consecuencia de que al decir que una ecuación es ó no irreducible nos referimos implícitamente á que los factores en que se descompone no pertenecen ó pertenecen á un cierto dominio de racionalidad.

Corresponde al estudio del dominio de racionalidad la resolución de varios problemas que no son sino la ampliación de otros problemas de Algebra elemental.

Representemos por R_1, R_2, R_3, ... las cantidades cuyo dominio consideramos y sean A_0, A_1, A_2, ... A_m las características de m funciones racionales de las R. Consideremos la ecuación

$$A_0(R_1, R_2, \ldots)x^m + A_1(R_1, R_2, \ldots)x^{m-1} + \ldots\ldots + A_m(R_1, R_2, \ldots) = 0.$$

El primer problema que se presenta es hallar x en función racional de R_1, R_2, ..., $x = B(R_1, R_2, \ldots)$, de tal modo que la ecuación anterior quede satisfecha.

El segundo problema consiste en descomponer la ecuación en factores que correspondan al dominio de racionalidad considerado.

Estos problemas dependen de otros teoremas análogos á los que se demuestran en Algebra al tratar de las cantidades primas.

Para resolver el primer problema hay que empezar por transformar la ecuación en otra cuyo primer coeficiente sea la unidad. Esta transformación se hace lo mismo que si la ecuación fuese numérica y se obtiene una ecuación cuyas raíces son las de la anterior multiplicadas por $A_0(R_1, R_2, \ldots)$.

Tomemos, pues, la ecuación

$$x^m + B_0 x^{m-1} + B_1 x^{m-2} + \ldots\ldots + B_{m-1} = 0,$$

teniendo presente que la hemos escrito así por abreviar; pero que en realidad los coeficientes B son las características de funciones racionales de R_1, R_2, ...; así, en vez de B_0, debe entenderse $B_0(R_1, R_2, \ldots\ldots)$; en vez de B_1, $B_1(R_1, R_2, \ldots\ldots)$, etc.

Para resolver esta ecuación hay que determinar un polinomio entero en R_1, R_2, ... que la satisfaga. El método que se sigue para determinarle consiste en buscar un lí-

(1) h = arco correspondiente al ángulo de divergencia φ, con el radio unidad. Como este ángulo vale en la práctica lo mismo que el ángulo bajo el cual se ve la luz desde un punto de la lente, se tiene: $\frac{m}{2} = f \operatorname{sen} \frac{\varphi}{2}$; de donde: $\frac{m}{f} = 2 \operatorname{sen} \frac{\varphi}{2}$; y sustituyendo el arco (h) á los dos senos: $h = 2 \operatorname{sen} \frac{\varphi}{2}$, se tiene $h = \frac{m}{f}$.

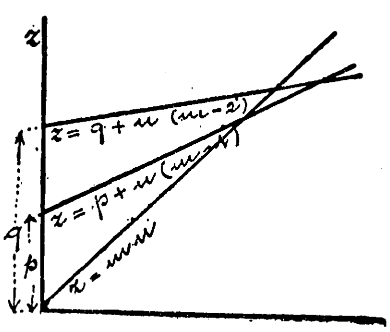
mite superior de los exponentes de R_1, R_2, ... Habiendo de ser x de la forma $x = \Sigma A R_1^{\alpha} R_2^{\beta} R_3^{\gamma}$ ..... todo se reduce á determinar los límites superiores de α, β, γ, ... Fijándonos particularmente en uno de los exponentes, en el de R_1, por ejemplo, ordenemos x con relación á las potencias decrecientes de esta letra y tendremos

$$x = AR_1^{n} + BR_1^{n-1} + \ldots..$$

Como este valor ha de satisfacer á la ecuación propuesta escribamos esta condición y poniendo en vez de B_0, B_1, ... sus valores desarrollados resultará

$$(AR_1^{n} + BR_1^{n-1} + \ldots..)^{m}$$
$$+ (A'R_1^{p} + B'R_1^{p-1} + \ldots) (AR_1^{n} + BR_1^{n-1} + \ldots)^{m-1} + \ldots.. = 0:$$

la mayor potencia de R_1 en el primer término es mn; en el segundo es $p + n(m-1)$; en el tercero $q + n(m-z)$; ..... Entre estas funciones lineales de n hay que buscar el límite superior, para lo cual se puede seguir dos métodos: el de las asíntotas y el gráfico que vamos á explicar.



Hagamos $z = mn$ y construyamos la recta representativa de esta ecuación tomando dos ejes coordenados con relación á los cuales sean n las abscisas y z las ordenadas; esta recta pasará por el origen y tendrá un coeficiente angular igual á m.

Construyamos igualmente el lugar representado por la ecuación $z = p + n(m-1)$: pasará por un punto del eje de las z, situado á la distancia p del origen, y formará con el eje de las n un ángulo menor que la anterior, puesto que su coeficiente angular es $m - 1$.

Representando análogamente las demás funciones lineales obtendremos una serie de rectas cuya inclinación es cada vez menor, las cuales nos permitirán hallar el mayor valor de n. Lo que acabamos de decir respecto á R_1 se repite para R_2, R_3, ... y conocidos los mayores exponentes de estas letras quedará determinado el polinomio más general que satisface la ecuación dada.

El otro problema es más complicado: para resolverle, ésto es, para descomponer un polinomio en otros dentro del dominio de racionalidad, es preciso recordar varios teoremas conocidos ya por el Algebra elemental y que se aplican á los polinomios de que nosotros hablamos. Sin entrar en la enumeración de estos teoremas auxiliares vamos á exponer el ingenioso método ideado por Picard para resolver la cuestión que nos ocupa.

Sea la ecuación

$$A_0 x^{m} + A_1 x^{m-1} + A_2 x^{m-2} + \ldots.. + A_m = 0$$

en la cual los coeficientes pertenecen al dominio de racionalidad y cuyo tipo es $A(R_1, R_2, \ldots..)$.

Se trata de descomponer el polinomio en otros dos

$$A_0 x^{m} + A_1 x^{m-1} + \ldots.. + A^{m}$$
$$= (B_0 x^{\alpha} + B_1 x^{\alpha-1} + \ldots..) (C_0 x^{\beta} + C_1 x^{\beta-1} + \ldots..)$$

cuyos coeficientes B y C sean de la misma índole que los A.

Se parte de que el polinomio propuesto tendrá las raíces x_1, x_2, ... x_m: si el polinomio se ha descompuesto en varios factores, en el primero de éstos estarán α raíces de las m y será igual á $B_0(x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_\alpha)$, y los coeficientes de este factor

$$\frac{B_1}{B_0} = p_1, \quad \frac{B_2}{B_0} = p_2, \ldots..$$

serán las funciones simétricas elementales de x_1, x_2, ... x_α, cuyos coeficientes serán á su vez funciones racionales del dominio R_1, R_2, ... Pero no sabemos qué raíces van á entrar en ese primer factor y por esto hay que buscar las combinaciones de esas m raíces α á α y hallar las funciones simétricas dentro del dominio de racionalidad. Con este objeto formemos la función auxiliar $y - p_1 t_1 - p_2 t_2 - \ldots..$ siendo t indeterminadas y siendo

$$p_1 = -\Sigma_1^{\alpha} x_1; \quad p_2 = \Sigma x_1 x_2; \text{ etc.}$$

Si en vez de ser las raíces del primer factor las que constituyen la primera de las C_m^{α} combinaciones de m letras tomadas α á α fueran las que constituyen otra combinación, los coeficientes p_1 p_2, ... cambiarían tomando otros valores p'_1 p'_2, ... y formando la función $y - p_1' t_1 - p_2' t_2 - \ldots..$, en la que las t son las mismas indeterminadas que entran en la función anterior, y repitiendo lo mismo para las otras combinaciones, llegaremos á formar C_m^{α} funciones de la forma $y - p_1^{(\varepsilon)} t_1 - p_2^{(\varepsilon)} t_2 - \ldots..$ Multiplicando todas estas expresiones obtendremos $\pi(y - p_1 t_1 - p_2 t_2 - \ldots..)$ que es de grado C_m^{α}. Este producto es una función simétrica de las raíces x_1, x_2, ... x_m porque una sustitución cualquiera cambiaría unas p en otras, alterando solamente el orden de los factores. Como además las p se determinan en función de los coeficientes, resulta que la ecuación $\pi = 0$ es de la forma

$$F(y, t_1, t_2, \ldots.. R_1, R_2, \ldots..) = 0$$

de la cual ya han desaparecido las x. El dominio de F es t_1, t_2, ... R_1, R_2, ... y podemos hallar los valores racionales de y (según nos enseña el problema primero) los cuales han de ser precisamente de la forma

$$p_1 t_1 + p_2 t_2 + p_3 t_3 + \ldots..$$

El teorema siguiente es de gran importancia: *una ecuación irreductible* $F(x) = 0$ *que tiene una raíz común con otra* $f(x) = 0$ *divide á ésta.* Si no la dividiese tendría un máximo común divisor $\theta(x)$ de primer grado, el cual dividiría á $F(x)$ y éste no sería irreductible. Luego si $F(x)$ y $f(x)$ tienen una raíz común $F(x)$ está toda ella contenida en $f(x)$.

Vamos á demostrar ahora el teorema de Abel enunciado por primera vez en una Memoria sobre funciones elípticas y demostrado por Galois

Sean x_1, x_2, ... x_n las raíces, no conocidas, de la ecuación $f(x) = 0$; formemos una función racional de estas raíces que tenga $N = n!$, valores, esto es, cuyo grupo sea el número total de sustituciones. Ya hemos visto que la función que satisface esta condición, es la lineal de coeficientes desiguales $V = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_n x_n$. Aplicando á V todas las sustituciones resultan los valores

$$V_1 = V, V_2, V_3, \ldots V_N.$$

La ecuación que tiene por raíces estos N valores de V, es la siguiente:

$$(V - V_1)(V - V_2)\ldots(V - V_N) = 0$$

que desarrollada se convierte en la

$$V^N - \Sigma V_1 . V^{N-1} + \Sigma V_1 V_2 . V^{N-2} - \ldots + V_1 V_2 \ldots V_N = 0$$

los coeficientes son funciones simétricas de $x_1, x_2, \ldots x_n$ y pueden, por tanto, expresarse en función de los de $f(x) = 0$.

La ecuación anterior es la *resolvente* de Galois, y juega importantísimo papel en la teoría de las ecuaciones, no porque pueda resolverse, que en general no se puede porque es de un grado enorme, sino porque con su ayuda se determinan las leyes generales de este estudio.

El teorema de Abel, al que sirve de preparación lo que hemos dicho poco há, establece que cualquier raíz, x_1 por ejemplo, es una función racional de cualquiera de los valores de V. Vamos á demostrar este teorema estableciendo que x_1 es función racional $V_1 : x_1 = R_1(V_1)$.

Dejemos fija la raíz x_1 y hagamos con las demás todas las permutaciones posibles, que son $(n-1)! = \mu$. Formemos una ecuación de grado μ cuyas raíces sean $V_1, V_2, \ldots V_\mu$. Esta ecuación $(V - V_1)(V - V_2)\ldots(V - V_\mu) = 0$, ya no es simétrica con relación á $x_1, x_2, \ldots$; pero si dividimos $f(x)$ por $x - x_1$ los coeficientes del cociente son funciones de los coeficientes de $f(x)$ y además de x_1: luego los coeficientes de $(V - V_1)(V - V_2)\ldots(V - V_\mu) = 0$ se expresarán en función F de V y x_1.

La ecuación $F(V, x_1) = 0$ se satisface para $V = V_1$: luego $F(V_1, x_1) = 0$. Pero $F(V_1, x_1)$ puede considerarse como el resultado de pasar x_1 en vez de x en la ecuación $F(V_1, x) = 0$: verificándose esta ecuación por el valor x_1 y siendo éste también raíz de $f(x) = 0$, resultan tener estas dos ecuaciones una raíz común y solamente una como fácilmente se demuestra; al hallar el *m.c.d.* de $F(V_1, x)$ y $f(x)$ encontramos como último divisor, una función de primer grado en x y cuyos coeficientes serán racionales respecto de V_1 y de los coeficientes de $f(x) = 0$. El *m.c.d.* será, pues, de la forma $x - R_1(V_1)$ y como tiene por raíz x_1 resulta $x_1 - R_1(V_1) = 0$ ó $x_1 = R_1(V_1)$ según deseábamos demostrar.

La demostración del teorema de Abel es de gran importancia, no por hacer comprender la verdad del teorema, que de modo más inmediato se puede demostrar, sino porque permite hallar relaciones importantes entre los varios factores que entran en la teoría que exponemos.

Que ese teorema puede demostrarse mucho más fácilmente que como lo demostró Galois, nos lo hizo ver el señor Echegaray, quién dedujo el teorema considerándole como corolario del de Lagrange.

Hemos dicho que dada la ecuación $f(x) = 0$, la resolvente $\Psi(V) = 0$ era de la forma $\pi(V - V_h) = 0$ en que V es una función de $x_1, x_2, \ldots x_n$ y en la teoría de Galois igual á $a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_n x_n$.

Tomemos el factor $\psi(V)$ de $\Psi(V)$ y escribamos que todas las raíces de $f(x) = 0$ son funciones racionales de V_1, por ejemplo.

$$x_1 = R_1(V_1);\ x_2 = R_2(V_1);\ x_3 = R_3(V_1);\ \ldots\ x_n = R_n(V_1).$$

Si V_1 es raíz de $\psi(V) = 0$ las expresiones:

$$x_\alpha = R_1(V_h);\ x_\beta = R_2(V_h);\ \ldots\ x_\mu = R_n(V_h)$$

reproducen la forma de $R_1, R_2, \ldots$ y ésta es igual ya se tome V_1 ú otra cualquiera raíz.

En efecto, x_1 satisface á la ecuación propuesta y por tanto $f(x_1) = 0$, ó lo que es igual $f[R_1(V_1)] = 0$; esta expresión puede suponerse ser el resultado de sustituir V_1 en vez de V en $f[R_1(V)] = 0$: de aquí se deduce que esta ecuación y la $\psi(V) = 0$ tienen común la raíz V_1 y como $\psi(V)$ es irreductible, resulta que tienen comunes todas las raíces; luego $f[R_1(V_h)] = 0$; pero falta probar que no hay raíces iguales, y esto es claro, pues si fuese $R_2(V_h) = R_3(V_h)$ la ecuación $R_2(V) - R_3(V) = 0$ tendría la raíz V_h común con $\psi(V)$, y si esto fuese así tendrían comunes todas las raíces, y entre ellas la V_1, resultando así $R_2(V_1) = R_3(V_1)$ ó $x_2 = x_3$, lo cual no es cierto.

En la última conferencia, hizo el Sr. Echegaray algunas indicaciones sobre la definición de las irracionales y sobre la ampliación del dominio de racionalidad mediante la introducción de las ecuaciones *adjuntas* que tanto simplifican ciertos problemas.

M. Luiña.

REVISTA EXTRANJERA

Comparación de los morteros de cemento y de cal.

El conocido especialista en cementos, M. Candlot, ha publicado recientemente en la revista francesa *Nouvelles annales de la construction* un interesante estudio comparativo entre los morteros de cemento y los de cal. En atención á la importancia del asunto, y dada la reconocida competencia del autor, nos proponemos publicar la traducción íntegra de ese trabajo en números sucesivos.

«La superioridad de los morteros de cemento de Portland sobre los de cal ha sido puesta en evidencia tantas veces, que parece superfluo añadir nuevos argumentos en apoyo de una verdad que no puede ser negada en serio. En el extranjero todas las obras de alguna importancia se ejecutan con mortero de cemento; el empleo de cales parecería un retroceso hacia los procedimientos ya anticuados de las épocas en que el constructor no poseía otra regla que la rutina. En Francia, donde el arte de las construcciones ha alcanzado hace ya tiempo un nivel tan elevado, parece que existe actualmente, respecto á ciertos puntos, un verdadero estado de inferioridad; se puede atribuirlo en gran parte á la ignorancia de las cualidades y propiedades de los materiales más usuales; los constructores se contentan con nociones vagas y generalmente erróneas; para no citar más que un ejemplo, la opinión de que las mezclas de cal y de cemento son malas á causa de la diferencia de fraguado de estos productos es