

## SOBRE LA PERSPECTIVA

CONFERENCIAS EXPLICADAS EN EL CÍRCULO DE BELLAS ARTES (1)

### III

AMPLIACIONES DE LO QUE PRECEDE

Esta lección no se limitará ya á ampliar razonamientos, á discutir lo que se sabe, á esclarecer los conceptos adquiridos. En realidad no saldrá de los límites de aplicaciones de todo ello y aplicaciones sencillísimas, que no presentarán dificultad alguna á quien haya entendido bien lo que precede, y que pudiera considerar como sabidas; pero que, no obstante, conducirán á nuevos teoremas que tienen en todo momento aplicación, que facilitan de una manera notable la resolución de los problemas de la perspectiva y que, bajo este punto de vista, amplían los conocimientos anteriores.

El que absolutamente no quisiera dedicar á este estudio más tiempo que el de una ó dos sesiones, podría no pasar de aquí, pero haría mal. Ciertamente que con lo que precede le basta para cuanto pueda necesitar, sin descender á ciertos detalles; pero ya he dicho que no puede pretender saberlo todo tan bien como el que *estudia más*, ni resolver los problemas con la misma facilidad que el que *sabe mejor*. Además, poco será lo importante y verdaderamente fundamental de la perspectiva que, después de esta lección deje de saberse, y nadie calificará ciertamente de trabajo rudo y perseverante el de.... ¡estudiar tres lecciones!

Ante todo quiero fijar bien algunas ideas ya expuestas y de las que hemos de sacar gran partido.

He dicho que las perspectivas de rectas paralelas en el espacio y que *no sean paralelas al cuadro* son rectas que se cortan en un punto; que este punto se halla en la línea de horizonte si aquéllas son además horizontales, y que es precisamente la proyección del punto de vista, cuando además de horizontales son perpendiculares al cuadro.

Pero si las rectas paralelas en el espacio lo son también al cuadro, las perspectivas son asimismo rectas paralelas inclinadas de la misma manera con relación á una horizontal del cuadro, ó formando con ella el mismo ángulo que aquellas forman en el espacio con un plano horizontal. Por lo tanto, si además de ser paralelas al cuadro son horizontales ó verticales. horizontales ó verticales serán las perspectivas.

Si á esto se añade que las perspectivas de rectas que se cortan en el espacio son asimismo rectas que se cortan (puesto que la perspectiva del punto de intersección, por hallarse en las dos rectas, deberá hallarse en sus propias perspectivas y no podrá menos de ser la intersección de éstas), se podrá tener por dicho todo cuanto de general puede decirse de la perspectiva de líneas rectas. Con ser esto rigurosamente exacto, podría conducir á un error primero y después á no sacar partido de ciertos grupos especiales de líneas, que pueden no ser paralelas y aun cortarse en el espacio, siendo paralelas sus perspectivas. Tal sucede con todas las que están situadas en planos verticales que pasen por el ojo, cuyas perspectivas son verticales del cuadro. En efecto, todo cuanto se halla situado en

uno de esos planos, puntos, rectas en cualquier dirección, paralelas entre sí ó concurrentes, ó figuras, cualesquiera que sean, tendrán por perspectiva la línea recta de intersección con el cuadro; pero siendo los dos planos que la producen verticales, tendrá que serlo ella misma. Se ve, pues, que rectas paralelas contenidas en ese plano, no se cortarían en perspectiva, puesto que todas ellas tienen por perspectiva la misma vertical del cuadro, y asimismo rectas que se cortarían en ese plano no se cortarían en perspectiva porque tendrían todos sus puntos comunes en ésta. Y considerando no uno, sino varios de esos planos, veríamos grupos de rectas que se cruzan ó cortan en el espacio, teniendo por perspectivas rectas paralelas verticales del cuadro.

Ya había dicho que la perspectiva de toda visual era el punto de intersección con el cuadro, y ahora digo que la perspectiva de toda línea situada en el plano visual vertical es la vertical del cuadro que pasa por aquel punto, que es además el de concurso de todas las paralelas á aquella visual, situadas como se quiera en el espacio. Sobre esta interesante particularidad quería llamar la atención, porque constituye un teorema de perspectiva del que puede sacarse gran provecho. Yo, al menos, aunque no sea más que porque «cada maestrillo tiene su librillo», le tengo una gran afición y lo considero como verdaderamente fundamental.

Por todo punto en el espacio podemos, en efecto, hacer pasar dos rectas, una horizontal y paralela al cuadro, y otra situada de un modo cualquiera en el plano visual vertical que pasa por dicho punto, y la perspectiva de este punto quedará determinada desde que se sepa hallar la perspectiva de esas dos rectas; pero de una parte sabemos ya hallar la perspectiva de una horizontal cualquiera paralela al cuadro y situada á una cierta distancia de él, tanto gráfica como numéricamente, y ahora veremos como se halla la otra perspectiva, luego la del punto quedará completamente determinada.

Recuérdese que la perspectiva de la horizontal paralela al cuadro la sabemos hallar tanto si está situada en el plano horizontal que contiene el borde inferior del cuadro como en otro plano horizontal cualquiera, porque, ó construiríamos en este último caso la horizontal del cuadro intersección de éste con el plano horizontal que contuviera al punto y operaríamos con esa línea como con la del borde inferior, ó construiríamos la perspectiva de la horizontal que pasa por la proyección del punto, tomaríamos sobre ella la altura del plano y por el punto situado á esa altura, trazaríamos la paralela á la anterior: ó finalmente, recurriríamos al método de la fig. 26, que da gráfica ó numéricamente la solución, lo mismo cuando el punto está en el plano AH que á una altura cualquiera sobre él: todo esto lo sabemos hacer y, por lo tanto, de las tres maneras llegaríamos á trazar la perspectiva de la horizontal paralela al cuadro que pasará por un punto situado de una manera arbitraria en el espacio.

Y como la perspectiva de la otra recta de dirección asimismo arbitraria que pasa por el punto y está contenida en el plano visual vertical es una vertical del cuadro, bastará hallar el punto donde corta al borde inferior del mismo. Para completar estas ideas, vamos á hallar nuevamente la perspectiva del cubo. Sea (fig. 37) O el punto de vista, AB el cuadro, AOB el ángulo visual y 1 2 3 4 la planta del cubo. Las paralelas 1 2 y 3 4 al cuadro y distantes de él A — 1 2 y A — 3 4 las puedo

(1) Véase el número anterior.

construir sobre el cuadro llevando sobre su borde esas distancias calculadas para la perspectiva gráfica ó numéricamente: ahora trazaré desde O las visuales O1 (que coincide con la O4) O2 y O3 que cortan á la línea AB en los puntos 1, 4, 3 y 2, que llevaré al borde inferior trazando las verticales de esos puntos, cuyas intersecciones con las horizontales darán los puntos 1 2 3 4 de la perspectiva de la base, y, como además, sé que la distancia 1 — 2 debo llevarla de 1 á 1' y de 2 á 2', y que la 3 4 debo llevarla de 3 á 3' y de 4 á 4', quedará terminada la perspectiva del cubo.

Nótese que por este procedimiento no ha hecho falta línea de horizonte, ni punto de vista, ni puntos de distancia, ni escalas reducidas, ni aun cuando se necesite algo de ello en otros casos para calcular las alturas, hay forma de que las construcciones salgan fuera del cuadro porque, ni las distancias para trazar las horizontales, ni las intersecciones de los planos visuales verticales con el cuadro, pueden salirse de los bordes del mismo, y que, además, las perspectivas de los puntos se hallan determinadas por la intersección de líneas perpendiculares, que es el *summum* á que se aspira en las construcciones gráficas, circunstancias que justifican el elogio que antes hacía de este teorema.

Recordemos ahora, aunque lo sepamos, que todo grupo de paralelas tiene una visual que lo es, y como todas, incluso ésta, han de concurrir en el mismo punto en perspectiva, bastará hallar la intersección de esta última con el cuadro para tener la perspectiva del punto de concurso. Trazando, pues, desde el punto O (fig. 37) la visual paralela al grupo de rectas, se verá inmediatamente si corta ó no al cuadro y si se halla más ó menos lejos de él el punto de intersección. Y como suele ser muy interesante conocer esos puntos de concurso y por lo regular, se hallarán muy distantes del cuadro, conviene saber de qué manera se puede pasar sin ellos, sin que sea preciso hallar las perspectivas de dos puntos de cada recta.

El teorema de la semejanza de triángulos nos proporciona aún el medio de resolver este problema, que consiste en saber trazar por un punto una recta que vaya á pasar por el punto de intersección de otras dos.

Si se nos da una recta en perspectiva y un punto igualmente en perspectiva, y se pide que por el último se trace una paralela á la primera, habrá que distinguir dos casos, según que se conozca otra línea sobre la que ha de hallarse el punto como cuando se trata de rectas horizontales, cuyo punto de concurso está siempre en la línea de horizonte, ó que no se conozca y haya necesidad de determinarla por la perspectiva de dos puntos ó por el procedimiento que luego indicaré; pero reducido de este modo el segundo caso al primero ya no hay más que resolver el problema arriba indicado. Para ello, y suponiendo (fig. 38) que P sea el punto por el que se quiera hacer pasar una recta que concorra con las R y R', se cortan éstas por una recta cualquiera AB y se unen los puntos A y B con P: enseguida se traza á cualquiera distancia la recta A'B' paralela á AB y se trazan por los puntos A' y B' paralelas á AP y BP que se cortarán en P': la recta PP' irá á pasar por el punto de concurso de las R y R'. En efecto, si llamamos C al punto desconocido de concurso los triángulos CAP y CA'P' — CBP y CB'P' dan  $\frac{CP}{CP'} = \frac{AP}{A'P'} = \frac{BP}{B'P'}$ ; es decir,

que cuando esos triángulos tenían común el vértice C se verifica la última proporción, y recíprocamente verificándose ésta, como se verifica por construcción (puesto que hemos construido semejantes los triángulos ABP y A'B'P'), las rectas concurren en el mismo punto. Si el P estuviera al otro lado como en la fig. 39, la construcción se haría de la misma manera como en ella se indica. Y aunque de otras maneras se resuelve el mismo problema, considero ésta bastante elemental y suficiente para el objeto que nos proponemos.

No obstante, si las paralelas en el espacio fueran además horizontales, como su punto de concurso ha de hallarse en la línea de horizonte, se puede emplear el medio indicado en la figura 40. Se pide trazar por los puntos, equidistantes ó no, 1, 2 y 3 situados en una horizontal en perspectiva, rectas (también en perspectiva) paralelas á la OR. Se toma un punto P cualquiera en la línea de horizonte y se une con O, 1, 2 y 3; se cortan por una horizontal que interceptará las distancias O, 1, — 1, 2, — 2, 3, y se llevan desde R á 1' 2' 3', y estos puntos unidos con los 1, 2 y 3 darán las rectas — 1' 1 — 2' 2 y 3' 3 que resolverán el problema, por la tantas veces citada semejanza de triángulos que da, llamando C al punto de concurso,  $\frac{O1}{O, 1} = \frac{O1}{R1'} = \frac{12}{1, 2} = \frac{12}{1'2'}$  y  $\frac{23}{2, 3} = \frac{23}{2'3'}$  y como los numeradores de esas proporciones son iguales, lo serán también los denominadores. Pudiera convenir que la horizontal auxiliar estuviera situada al otro lado como en la fig. 41, lo cual no introduce dificultad alguna como se ve.

Otro de los problemas más interesantes consiste en saber llevar sobre una recta dada en perspectiva magnitudes dadas y dividirla en partes iguales ó proporcionales, y sobre esto diré ahora algunas palabras. Desde luego han de distinguirse dos casos; según que la recta sea paralela al cuadro ó tenga otra dirección cualquiera. En el primer caso todo se hace como si no se tratara de una recta en perspectiva, sino construida en un plano, de la manera ordinaria, porque ya he dicho que tratándose de rectas horizontales paralelas al cuadro, ó verticales ó situadas, en fin, de una manera arbitraria en planos paralelos al cuadro, las magnitudes que sobre ellas se lleven sólo varían en longitud con la distancia al cuadro, pero no por la posición que sobre ellas ocupen, de suerte que una vez determinada esa longitud ó longitudes con arreglo á la distancia se llevarán sobre la recta tantas veces como se quiera y del mismo modo se dividirá en un número dado de partes iguales ó proporcionales. No hay, pues, dificultad alguna, y sólo se necesita llamar la atención cuando la perspectiva sea vertical, porque según que represente una línea que *lo sea realmente*, en el espacio, ú otra que esté situada en un plano visual principal, estará comprendido en este caso ó en el que ahora examinaré y que constituye el verdadero problema, porque toda magnitud que se lleve en perspectiva de una recta que no sea paralela al cuadro en el espacio, varía de longitud según la posición que sobre la recta ocupe. En este segundo caso sólo nos interesa el especial de rectas horizontales, al cual se reduciría el caso general considerando la proyección, resolviendo el problema en ésta y trazando después por los puntos de división verticales que dividirán de la misma manera la recta en el espacio. Si suponemos (fuera de perspectiva), fig. 42, que en una recta AB tomamos una distancia Aa, que por A traza-

mos una horizontal (ó en otra dirección) AC, que por  $a$  trazamos en cualquiera dirección  $ab$ , que llevamos la dimensión  $Ab$  de  $b$  á  $b_1$ , de  $b_1$  á  $b_2$  etc., y que por  $b_1, b_2, \dots$  trazamos las paralelas á  $ba - b_1 a, b_2 a, \dots$  las distancias  $Aa, a_1, a_2, \dots$  serán iguales por la semejanza de triángulos tantas veces recorrida.

La dirección  $ab$  es indiferente, porque si hubiéramos elegido la  $ac$ , llevando  $Ac$  á  $c, c_1, c_2, \dots$  y trazando las paralelas  $c_1 a, c_2 a, \dots$  por el mismo teorema, hallaríamos los mismos puntos  $a_1, a_2, \dots$  que antes.

Pues esto mismo es lo que ha de hacerse en perspectiva. Supongamos que, por los medios ya conocidos, hemos llevado una vez (fig. 43) sobre AB la distancia dada  $Aa$ : tracemos la horizontal AC, tomemos en la línea de horizonte un punto arbitrario P (pues es arbitraria la dirección de las paralelas); unamos P con  $a$ , llevemos  $ab$  á  $b, b_1, b_2, \dots$  y, uniendo los puntos  $b_1, b_2, b_3, \dots$  con el P, determinaremos los  $a_1, a_2, a_3, \dots$  y las distancias  $Aa - a_1, a_2, \dots$  serán distancias iguales llevadas sobre AB. Si se hubiera tomado otro punto, el P' por ejemplo, uniéndolo con  $a$ , llevando  $Ac$  á  $c, c_2$  etc., y uniendo  $c_1$  con P' se obtendrían los mismos puntos  $a_1, a_2, \dots$ . Si sobre la recta AC no se pudiera llevar la distancia  $Ab$  tantas veces como fuera necesario, trazaríamos la horizontal  $a_3$  y sobre ella continuaríamos llevando la distancia  $a_3 d_1$  interceptada por las líneas P  $b_3$  y P  $b_1$ , tantas veces como fuera preciso; uniendo los puntos  $d_1, d_2, d_3, \dots$  con el P determinaremos nuevos puntos sobre AB.

Asimismo en la fig. 42, para obtener los puntos  $a_1, a_2, \dots$  podríamos haber trazado por  $b$  la paralela á AB,  $bd, d_1$  y luego por  $a$  una horizontal  $ad$ , por  $d$  la paralela á  $ba$ ; después por  $a_1$  la  $a_1 d_1$ , por  $d_1$  la paralela  $d_1 a_2$  y así sucesivamente, lo cual hecho en la fig. 44 da el medio de llevar tantas veces como se quiera una magnitud dada sobre la línea AV sin cuidarse de que quepa en el borde del cuadro, y es una manera de graduar esa línea, que supongo es la escala de longitudes, para poder llevar sobre ella directamente distancias dadas de un punto al cuadro. La fig. 45 indica cómo se llevaría sobre AV (ó sobre la perspectiva de otra línea cualquiera) la distancia 7,25 metros, sin hacer uso de la escala de anchuras ni del punto de distancia (reducido ó no) por cuyo medio ya sabemos hacerlo, empezando por llevar una vez una distancia conocida  $Aa$  igual á un metro, por ejemplo, y aplicando lo que precede; pero, en general, será más cómodo hacer uso de la recta horizontal inclinada  $45^\circ$ .

No se olvide el problema inverso, que también sabemos resolver y que se necesita muchas veces. Dada en perspectiva la magnitud AB de una recta perpendicular al cuadro, hallar la verdadera (fig. 46). Se traza la horizontal AH, se une B con el punto de distancia D (reducida ó no); la recta BC será una horizontal inclinada  $45^\circ$  y, por tanto, en el espacio  $AB = AC$  (multiplicada ó no por la relación que corresponda al punto de distancia, se haya ó no reducido): la verdadera magnitud de AC se hallará uniendo C con V y midiendo sobre el borde del cuadro la distancia QE; ó sobre la escala de anchuras reducida y multiplicando por la reducción.

Si en vez de tratarse de llevar sobre la perspectiva de una recta una sola magnitud varias veces, se tratara de dos ó más magnitudes que se quisieran llevar alternativamente, se haría

exactamente lo mismo que dejamos dicho. Sean, en efecto (figura 47)  $Aa$  y  $ab$ , dos distancias desiguales llevadas sobre AV y se quiere repetir las alternativamente. Pues se unen los puntos  $a$  y  $b$  con el P arbitrario tomado sobre la línea de horizonte y se llevan las  $Aa$ , y  $a, b$ , á  $b_1, a_2 - a_2 b_2 - a_3 b_3, \dots$ , uniendo  $a_2, b_2, a_3, b_3, \dots$  con P se obtienen los  $a', b', \dots$  y si falta espacio en el borde del cuadro, se traza la horizontal  $b'$  y se repiten en ella las distancias  $b' d_1$  y  $d_1, d_2$  uniendo  $d_3, d_4, d_5$  con P. También puede hacerse la construcción análoga á la de la fig. 44 que está indicada en la fig. 48.

Si se tratara de dividir una recta en perspectiva en un número dado de partes iguales, lo que se haría fuera de la perspectiva está indicado en la fig. 49, á saber: se traza una recta cualquiera AC en la que se lleva una distancia arbitraria  $Aa$  tantas veces como partes iguales se quieran hacer de AB, por ejemplo, cuatro; se une C con B y por los puntos  $a, b$  y  $c$  se le trazan paralelas. La fig. 50 se refiere al caso de dividir AB en partes proporcionales á rectas  $Aa-ab-bc$  y  $cC'$  que se resuelve de la misma manera. Esto mismo se hace en la perspectiva (figura 51) que no necesita más explicación que mirarla. Aunque en estas figuras hemos tomado una perpendicular al cuadro, puede ser una recta cualquiera, y en la fig. 52 se ha dividido en tres partes iguales la perspectiva vertical AB de una línea comprendida en un plano visual vertical.

Es asimismo muy interesante saber resolver estos sencillísimos problemas: dada la perspectiva de una recta situada en el plano horizontal, trazarle una perpendicular en un punto dado, ó una recta que forme con ella un ángulo conocido, ó una paralela á cierta distancia, ó construir sobre ella un cuadrado ó una figura geométrica cualquiera, regular ó irregular, sea polígono, puntos ligados de cierta manera, círculo tangente en punto determinado y de un radio fijo, elipse definida con relación á ella de modo especial, etc., y todo esto lo sabremos hacer con sólo recordar conocimientos ya adquiridos, aclarándolos y consolidándolos.

Se pide, por ejemplo (fig. 53), que por el punto B de la recta en perspectiva AB se trace á ésta una perpendicular. Tracemos la horizontal AF y la recta VB hasta C: la recta CV es una recta perpendicular al cuadro y á la horizontal AF, y el plano ACV será, por lo tanto, horizontal: si suponemos ahora que se levanta girando alrededor de AF hasta que sea vertical y hallamos en ese plano la posición de la recta AB, podremos trazar en dicho plano la perpendicular pedida y ver cómo resulta en la perspectiva al deshacer el giro, con lo que el problema quedará resuelto.

Pero la recta VC, después del giro, se convertirá en la vertical DC, y sobre esta línea irá á parar el punto B. Podríamos servirnos de la horizontal que pasa por B, paralela al cuadro, para acabar de determinarlo (cosa que ya sabemos hacer); pero vamos á servirnos ahora, para acabar de fijar las ideas respecto á la construcción de las horizontales inclinadas  $45^\circ$ , de una de estas líneas. Si el punto de distancia estuviera dentro de los límites del dibujo no tendríamos más que unirlo con B y ver dónde corta á AF: esa distancia sería igual en el espacio á CB y no tendríamos más que llevarla sobre la vertical CD para fijar el D; pero si no está en los límites del dibujo, ya sabemos que podemos tomar una distancia VP, igual, por ejemplo, á la tercera parte de la distancia al punto de vista y uniendo P

con B, la distancia CE será también la tercera parte de la que deberíamos llevar sobre CD: llevaremos, pues, tres veces esa distancia sobre la vertical de C y quedará fijado el punto D y, por lo tanto, la recta AB, puesto que A queda fijo por pertenecer al eje de giro, habrá venido á ocupar la posición AD. Ahora podemos trazar en ese plano la perpendicular DF á AD (y si en vez de pedirse que sea perpendicular se pidiera que formara un cierto ángulo la trazaríamos con esa condición, siendo todo *exactamente lo mismo*) faltando sólo deshacer el giro para ver la posición en que queda después de él la recta DF. Pero al deshacer el giro, el punto F no cambia por estar situado en el eje y el punto D volverá á su posición primitiva B, luego la perspectiva de la perpendicular será BF y resuelve el problema. Si el punto F no estuviera dentro de los límites del dibujo, ya sabemos pasarnos sin él haciendo lo que hemos dicho en esta misma lección para trazar por un punto dado (B) una recta que vaya á concurrir con otras dos (AF y DF).

Pudiera suceder que al llevar tres veces CE sobre CD el punto A saliera fuera del cuadro; entonces acercáramos á B el punto A, como indica la fig. 54, ó tomaríamos (fig. 55) sobre la recta AB, (siendo B, el punto en el que se ha de trazar la perpendicular) un punto B tan próximo como convenga de A y trazaremos por él la perpendicular BF' con la misma construcción indicada y luego por B, una paralela B<sub>1</sub>G á BF. Si la BF corta á la línea de horizonte bastaría unir ese punto de intersección con B, y si no, ya sabemos trazar por B, una recta que vaya á concurrir con la PV y BF.

Si en vez de pedirse una perpendicular indefinida, se pidiera de una longitud dada (fig. 56) DG, la llevaríamos de D á G sobre la perpendicular y veamos dónde iría á parar el punto G al deshacer el giro. Construiríamos como antes la indefinida BF y desde luego caerá sobre ella el punto G; pero además está en la vertical GK que, después del giro, viene á KV; luego la intersección I será la posición de G y BI la perpendicular de la magnitud pedida.

Esto nos da el medio de resolver el problema de trazar una paralela á la perspectiva AB á una cierta distancia, porque le trazaríamos una perpendicular de esa magnitud y luego por el punto I una paralela á AB, ya uniendo el I con el M, si se conoce, ya trazando por él una línea que concorra con las PV y AB. Finalmente, pudiéramos trazar dos perpendiculares en dos puntos de AB de la misma longitud dada y unir los puntos extremos de estas perpendiculares. Directamente, pudiera hacerse como indica la fig. 57: después de hallar la posición AD de AB, se le traza la paralela GL á la distancia dada, y como al deshacer el giro el punto L no varía, se trazaría por este punto una paralela á AB como acabo de decir. Si se quisiera determinar otro punto, nada más fácil: se traza por D una recta cualquiera GDF, que después del giro será la FBI: el punto G se halla además en la vertical GK, que es KV después del giro, luego G habrá venido á I y LI será la paralela á AB.

La fig. 58 indica cómo se trazaría la perpendicular de magnitud conocida AG en el punto A. El punto G pertenece á la vertical GK, que después del giro es VI, y á la línea DMG, cuya perspectiva, después del giro, es BMI (porque D viene á B y M es fijo por estar sobre el eje); luego I será la perspectiva de G.

Vemos, pues, con cuánta facilidad hemos resuelto todos estos problemas, con sólo recordar cosas que ya sabíamos, y de la misma manera y haciendo lo mismo, resolveremos los que nos faltan de la enumeración hecha hace un momento, y que se reducen ya á construir sobre la perspectiva de una recta figuras geométricas de cualquiera índole.

Para trazar sobre AB un triángulo (fig. 59) hallaremos de la misma manera la posición AD de AB y construiremos sobre ella el triángulo: sea AGD, todo se reduce á buscar después del giro la perspectiva del punto G. Si trazamos por D una recta cualquiera ND prolongada hasta encontrar la AG en M, su perspectiva será la NBI y la de la vertical MQ será QV, luego la del punto M será I y la de la recta AM, AI, la de la vertical GL, LV y la del punto G el K, que se unirá con A y B y esa será la perspectiva del triángulo dado.

Sabiendo esto, se sabe construir sobre la perspectiva A un polígono cualquiera, regular ó no, porque un polígono (fig. 60) ABCDEF se descompone en los triángulos AFB — AEB — ADB y ACB y se hallarían enseguida simplificaciones que abreviarían la repetición del mismo problema, porque, por ejemplo, las vértices F y E, D y C se encuentran sobre rectas cuya perspectiva se halla fácilmente, como acabamos de ver, porque cortan al eje, de suerte que determinados esos puntos, queda determinado el polígono y se habría llegado á hacerlo en este caso sin más trabajo que el del simple triángulo.

Por este medio podríamos construir el cuadrado sobre la línea AB; pero lo sabemos hacer ya de otro modo que nos da otro procedimiento general aplicable á un polígono cualquiera. En efecto, sabemos trazar por los puntos A y B de AB dos perpendiculares de una magnitud igual á AB, y uniendo los extremos de las perpendiculares estaría hecha la perspectiva del cuadrado. Podíamos habernos contentado con una perpendicular en A ó en B igual á AB, luego por el extremo de esa perpendicular una paralela á AB y finalmente, otra paralela á ésta por B ó A, todo lo cual sabemos hacer sin dificultad alguna sabiendo lo que precede.

Ahora bien; si consideramos un polígono cualquiera, regular ó no (fig. 61), ABCDEF, bajando las verticales FG, EH, DI y CJ podemos determinar la posición de los vértices FEDC, porque hemos aprendido á hacer todo lo que sigue: 1.º, llevar sobre la perspectiva la magnitud GJ; 2.º, dividirla en partes proporcionales á GA, AH, HB, BI é IJ, y 3.º, á trazar perpendiculares en los puntos IHIJ de magnitudes iguales á GF, HE, ID y JC, hallándose después en la ejecución simplificaciones que se ocurren al primer golpe de vista; pero vamos á indicar otro procedimiento general en el que se empleen las horizontales á 45º, cuyo uso nos proponemos acabar de entender bien en esta lección.

Sea (fig. 62) AB la perspectiva de la línea sobre la que se quiere construir un polígono de tantos vértices como se quiere, regular ó irregular. Hallaremos como antes la posición AD de la recta AB en el plano del cuadro y sobre ella construiremos el polígono A 1 2 3 4 D, por ejemplo, faltando sólo hallar las perspectivas de 1 2 3 4 al deshacer el giro. Para no complicar el dibujo se puede construir aparte, como indica la fig. 63, en la escala que convenga, y se ve desde luego que cada vértice (el 2, por ejemplo) está situado entre la vertical 2 2, y sobre la inclinada á 45º 2 2'. Llevaremos, pues, sobre la horizontal

AE de la fig. 62 (teniendo en cuenta la escala) los pies de las verticales 1, 2, 3, 4, y uniendo estos puntos con V tendremos un sistema ó grupo de rectas sobre las que han de hallarse las perspectivas de los vértices del polígono; pero por ser la recta 2 2' inclinada á 45°, 2 2' = 2, 2': luego, sin trazar esas rectas, bastará llevar las alturas 1 1, — 2 2, — 3 3, y 4 4, (reducidas en la proporción en que lo esté PV) á partir de los pies 1, 2, 3, y 4, y obtendremos los puntos 1' 2' 3' y 4', que unidos con P darán un segundo grupo de rectas sobre las que también se hallarán las perspectivas de los vértices y quedarán, por lo tanto, determinados por las intersecciones ILMN. El cuadrado, que es frecuente tener que construir, está indicado en la fig. 64, y por este procedimiento es sencillísimo: basta mirar el dibujo para entenderlo sin explicación.

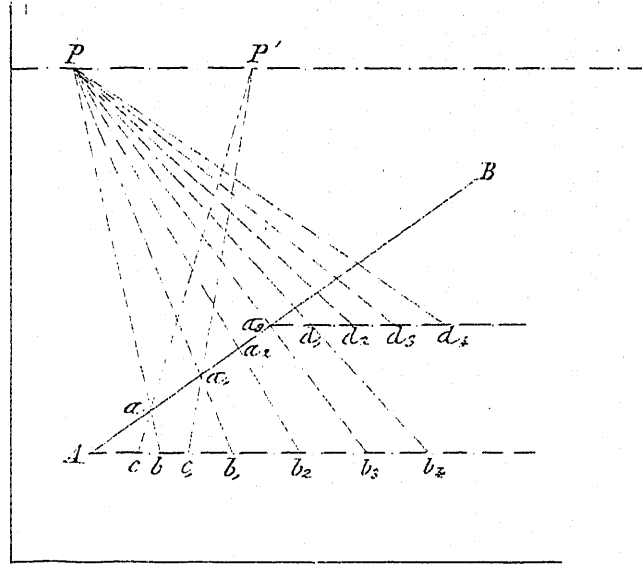
Si en vez de tratarse de polígonos se tratara de curvas, todo se haría exactamente lo mismo, porque éstas se determinan por puntos, y una vez elegidos los más característicos y el número de los que se juzgan necesarios para que la curva resulte continua, puedan suponerse vértices de un polígono y aplicarse el método de éstos. Diré, pues, sólo dos palabras del círculo. Si se pide la perspectiva de un círculo de radio dado, tangente á una recta AB en un punto G (fig. 65), se hallará como antes AD, se referirá G á F y se trazará el círculo tangente con el radio dado. Si se diera la perspectiva del centro y se pidiera la de un círculo de radio dado con ese centro, se hallaría la posición de ese punto, como tantas veces lo hemos hecho en las figuras anteriores con el punto B, valiéndonos de una perpendicular al cuadro que pase por él y una horizontal cualquiera paralela al cuadro que sirva de eje de giro, y se trazará la circunferencia con el radio dado. Construido el círculo en ese plano, se fijan en él los puntos cuya perspectiva se quiera hallar y se hace como para un polígono; pero si se quiere mucha exactitud en el trazado será mejor circunscribir al círculo un polígono regular de tantos lados como puntos se quieran, hallar la perspectiva del polígono (que siendo regular es de ordinario más fácil aún) y se marcan en la perspectiva de los lados los puntos medios; por todos esos puntos deberá pasar la curva y además, será tangente á los lados, lo cual sujeta mucho el trazado y da una gran exactitud.

Para resolver todos los problemas de esta lección, que son de una utilidad suma, pudieran darse otras soluciones, acaso más sencillas y que resultan de la combinación de unas y otras, y no hay para qué decir que algunas más elegantes; pero esos procedimientos que se ocurren naturalmente á los que tienen gran costumbre de usar la geometría y la conocen extensamente, no son los mejores para los que no se hallan en este caso. Entre un procedimiento muy elegante, pero del que no se tiene convencimiento, que se emplea como receta, que fácilmente se olvida y que, acaso, en la práctica se equivoca, y otro más tosco, pero que se aprende con facilidad, se emplea con persuasión y en todo momento se recuerda, es preferible lo segundo cuando se trata de enseñar á quienes no tienen por profesión las matemáticas.

Terminaré ya esta lección indicando que cuanto he dicho para hallar la perspectiva de figuras situadas en el plano horizontal que pasa por el borde inferior del cuadro es aplicable á otro plano horizontal cualquiera, porque todo tiene el más alto grado de generalidad posible. Tanto el método gene-

ral expuesto en la primera lección para hallar la perspectiva de un punto, como el indicado después, para el mismo fin, definiendo la posición de cada uno por la paralela al cuadro y horizontal, cuya posición en el cuadro determinábamos gráfica ó numéricamente y por otra recta situada en un plano visual son independientes de la altura del punto. Conviene, además, fijar bien las ideas respecto á que para hallar la perspectiva de figuras situadas en un plano horizontal cualquiera, puede hallarse la de su proyección sobre el que pasa por el borde inferior del cuadro y llevar después sobre cada punto la altura constante igual á la distancia de los dos planos, cuyas dimensiones, variables en perspectiva, sabemos calcular en función de la distancia al cuadro, por medio de las escalas de alturas, ó de anchuras, ó sustituir el borde inferior del cuadro por la intersección con el cuadro del plano horizontal de que se trate y operar con ella como con la del borde. No niego que pueda parecer un exceso de celo impertinente el insistir sobre ideas que debieran pasar por evidentes; pero prefiero esto á que se piense, como alguna vez he visto, que es una perspectiva nueva la de los techos cuyo plano es superior al de horizonte y aun al del borde superior del cuadro, ó la de los reflejos sobre el agua, cuya superficie puede estar por debajo del borde inferior del mismo. Cuando se trata de techos, podrá haber algún embarazo para invertir las construcciones, si se prefiere esto, como convendrá casi siempre, á seguir los procedimientos generales ordinarios; pero como en el fondo no hay diferencia alguna, será siempre pequeñísima dificultad que se vencerá rápidamente. En cuanto á la perspectiva de los reflejos sobre el agua, brevísimas indicaciones bastarán para no considerarlo como caso especial y menos aún distinto del general de la perspectiva. Basta saber que el reflejo de un punto situado á una cierta altura sobre la superficie del agua, llega al ojo como si procediera directamente de otro punto situado en la vertical y á la misma distancia de la superficie tomada por debajo de ella (puesto que (fig. 66) debiendo ser iguales los ángulos  $\alpha$  de incidencia y de reflexión, la dirección en que llega al ojo el reflejo de P es la del punto P' situado por debajo á igual distancia de la superficie), para comprender que la perspectiva de los reflejos es la perspectiva de los objetos que los producen, pero invertidos y *simétricamente colocados* con relación á la superficie del agua, lo cual no quiere decir que sean *simétricas también* las perspectivas, porque éstas varían con el punto de vista. Pero, así como el decir que la perspectiva de los objetos reflejados es la de los mismos objetos invertidos y colocados simétricamente con relación á la superficie reflejante, puede conducir al error de pensar que asimismo son simétricas las dos perspectivas directa y reflejada, el asegurar que las perspectivas son desiguales y no simétricas, puede conducir al error de pensar que esto sucede en todos los casos, sin excepción, lo cual no es exacto.

Las perspectivas directa y reflejada de figuras situadas en planos verticales paralelos al cuadro son perfectamente simétricas, cambie como quiera el punto de vista. Cuando los planos son verticales, pero no paralelos al cuadro, la simetría se limita á los puntos situados en líneas verticales, pero las superficies de las figuras construídas en ellos, aunque compuestas de infinito número de verticales puestas unas á continuación de otras y simétricas en las dos perspectivas, se deforman al re-



PERSPECTIVA

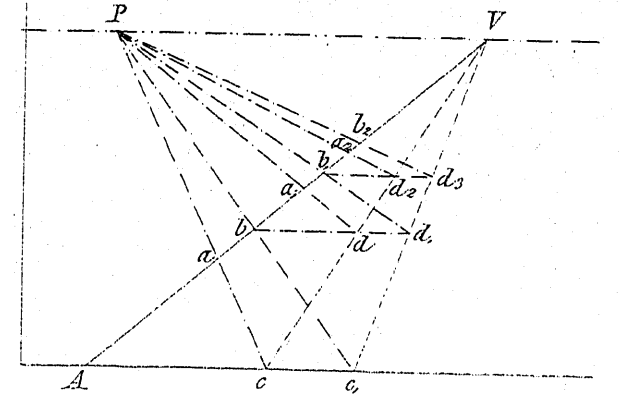


Fig 44

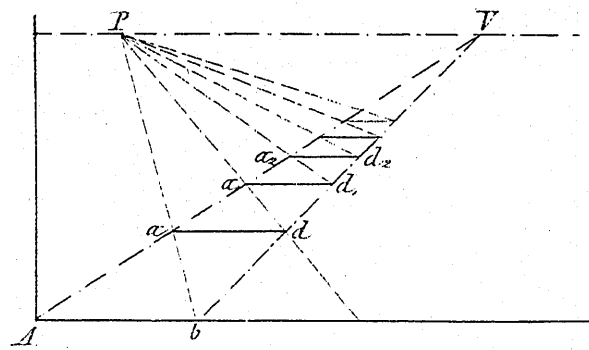


Fig 46

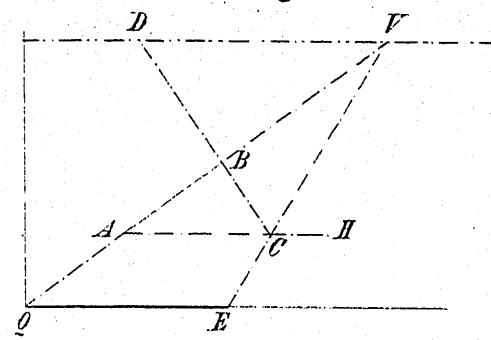


Fig 47

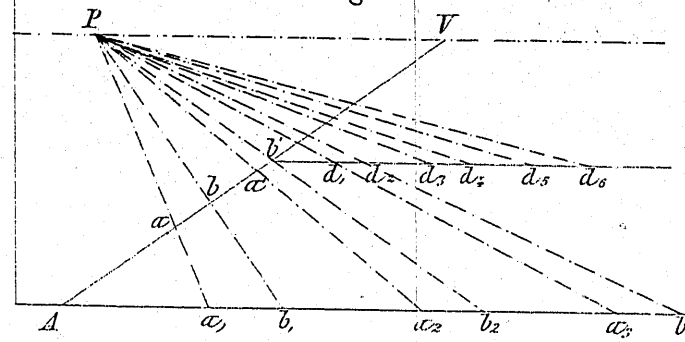


Fig 45

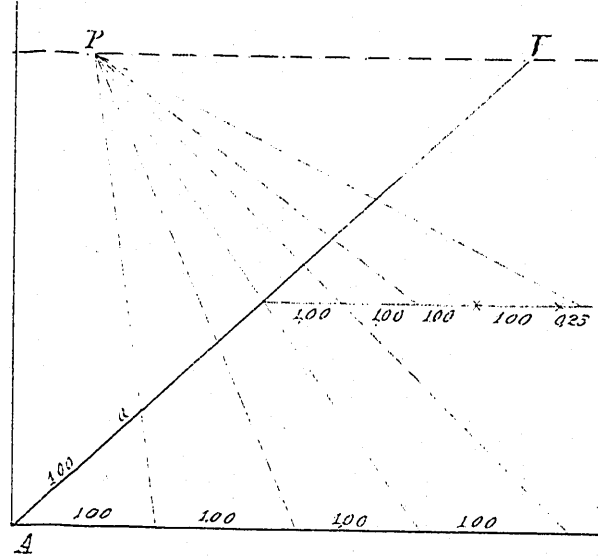


Fig 49

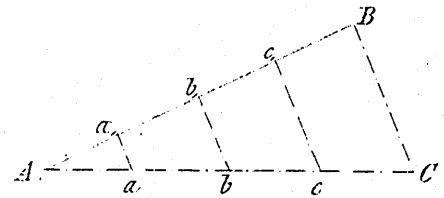


Fig 50

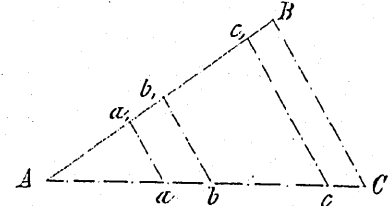


Fig 51

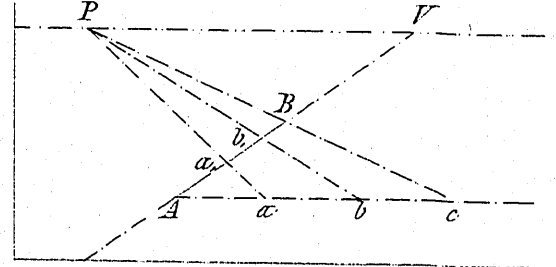


Fig 52

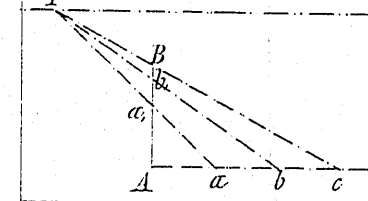


Fig 55

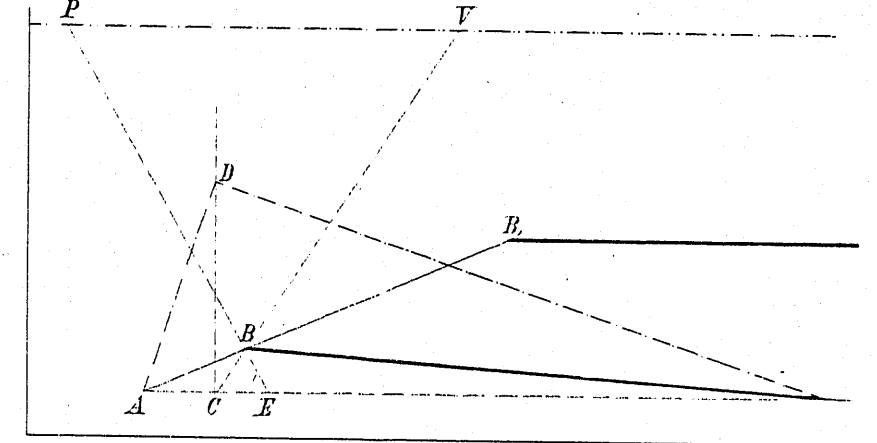


Fig 53

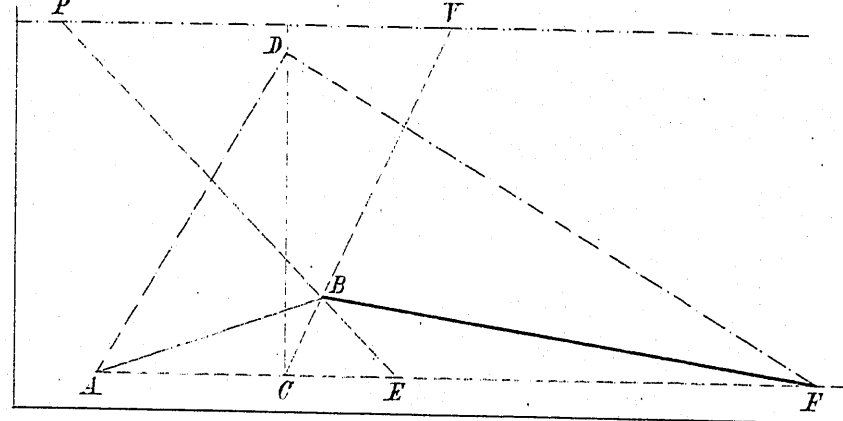


Fig 54

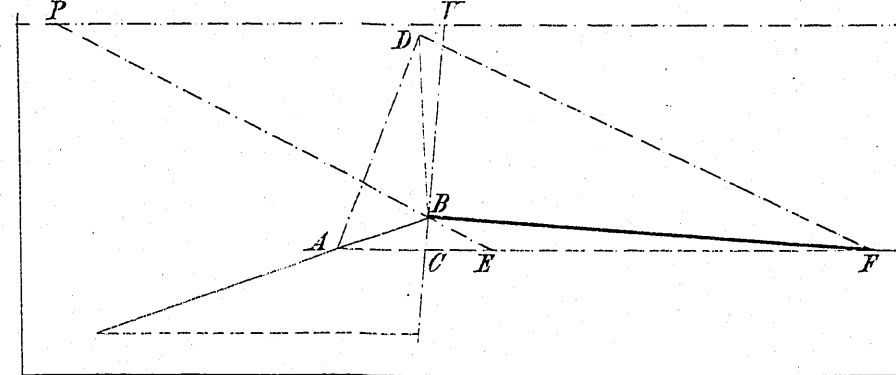


Fig 56

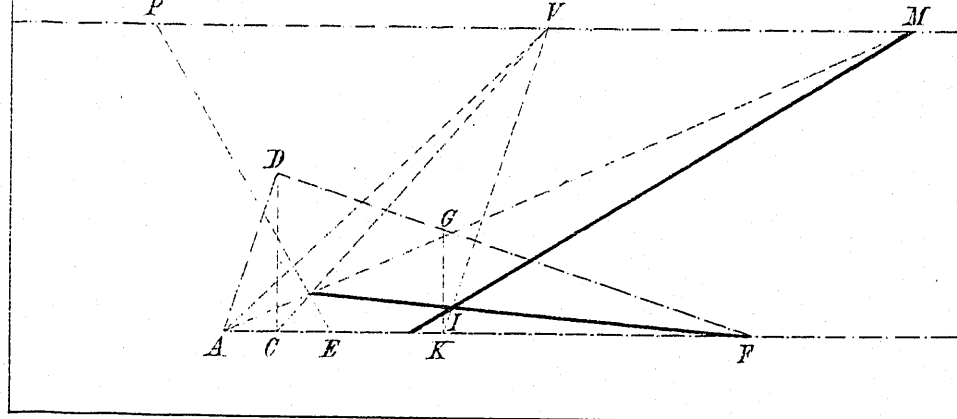


Fig 57

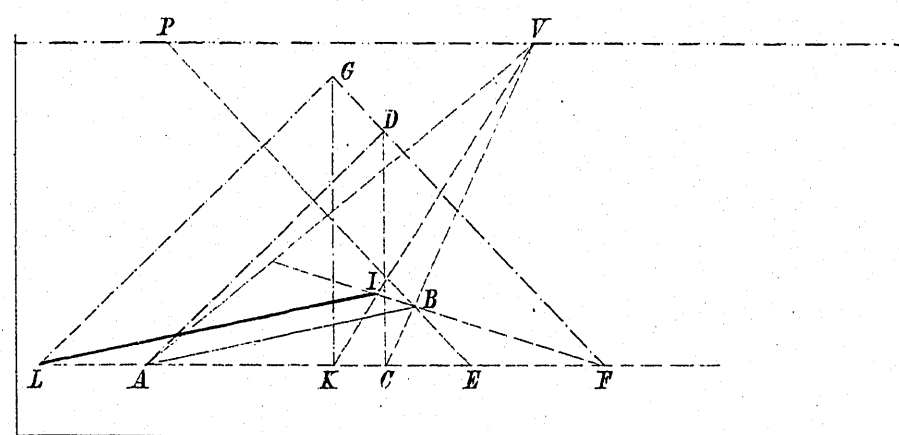


Fig 58

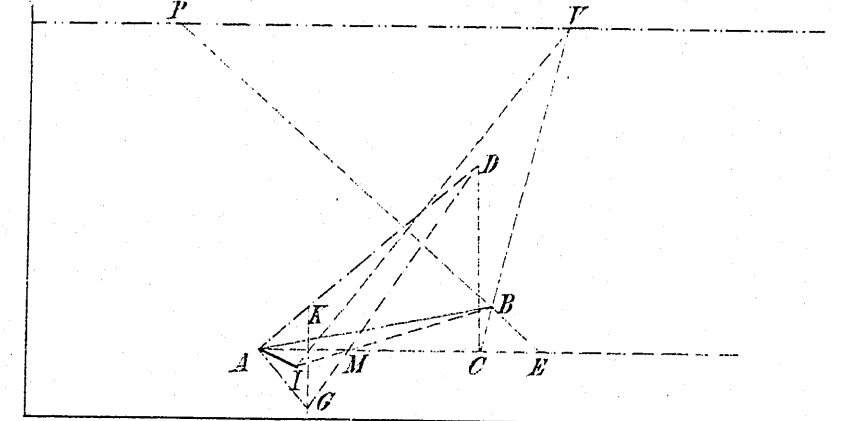


Fig 59

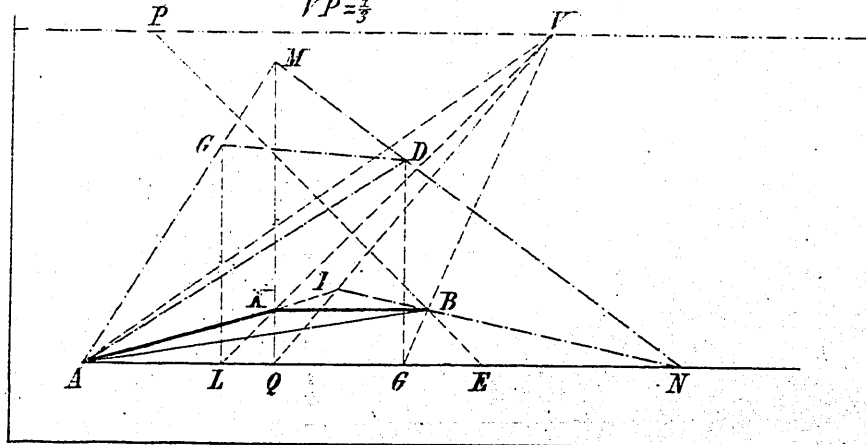


Fig 60

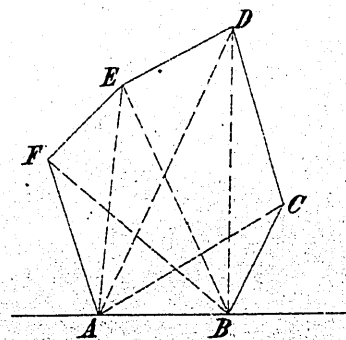


Fig 61

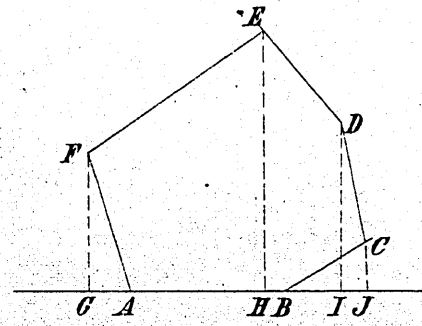


Fig 62

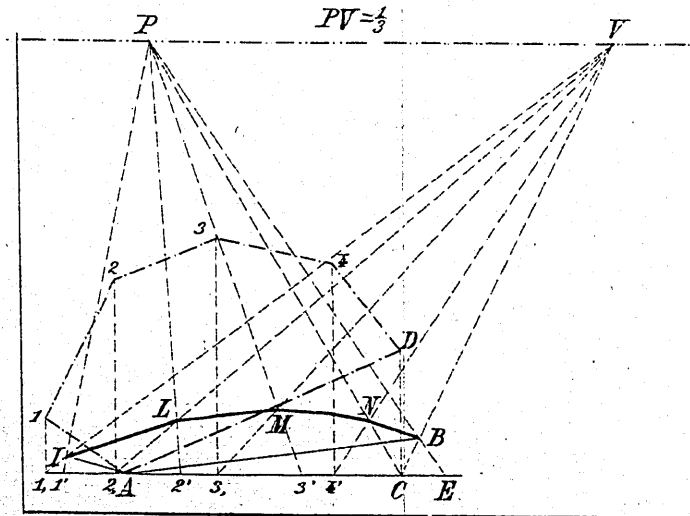
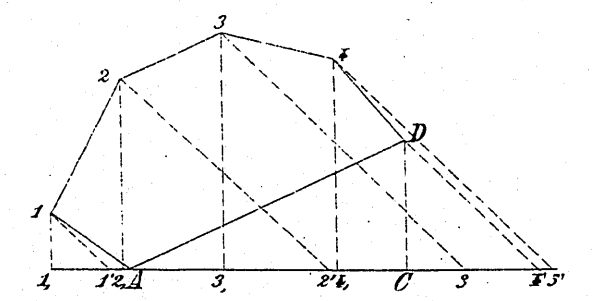
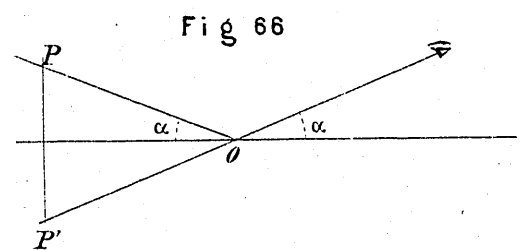
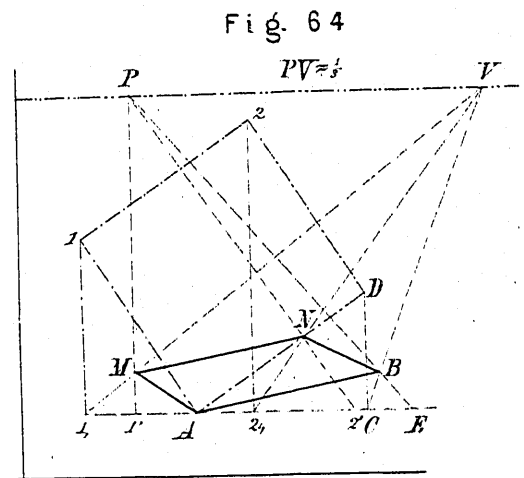
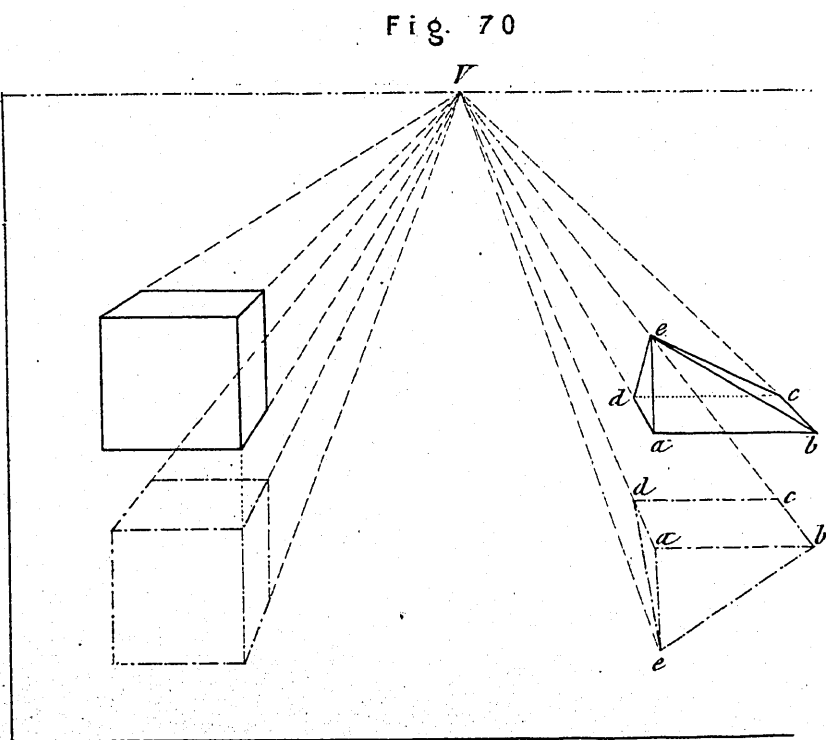
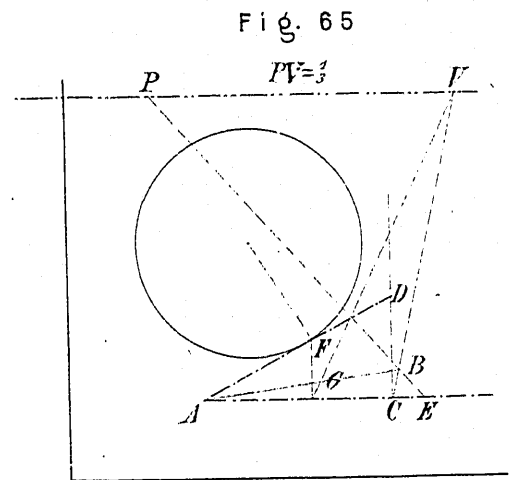
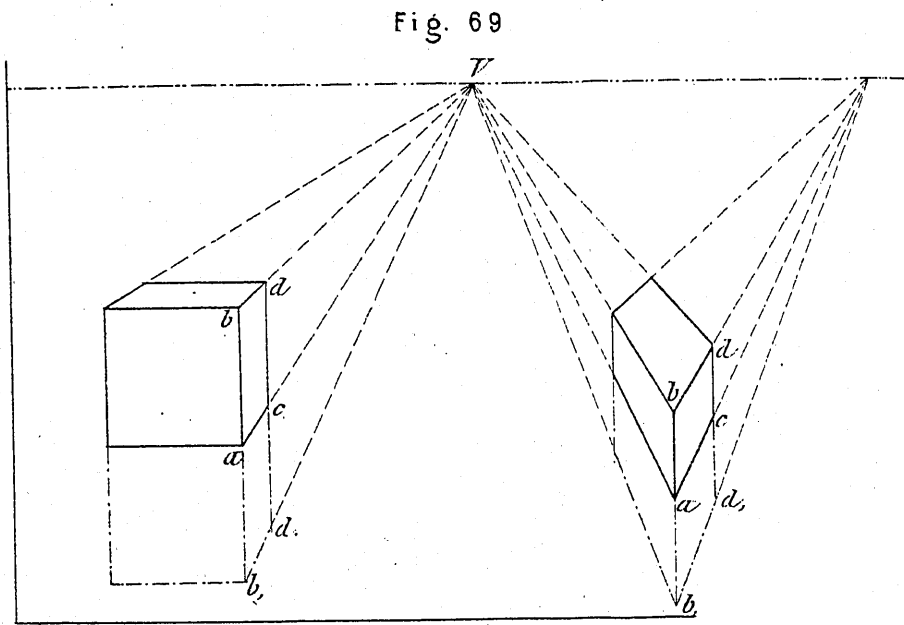
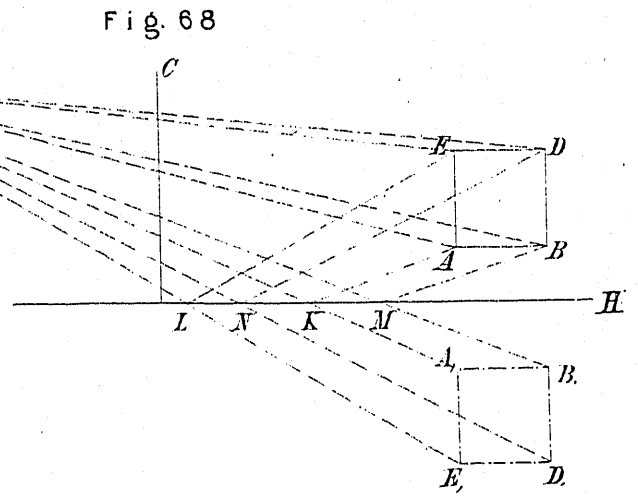
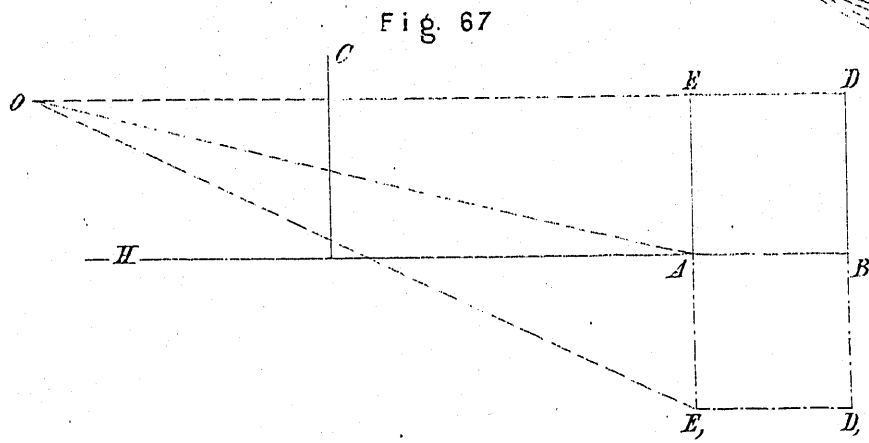


Fig 63



PERSPECTIVA



flejarse. Aunque se trate de planos paralelos al cuadro, pueden no ser las perspectivas simétricas, á pesar de serlo para cada uno de ellos, las de cuanto contienen, porque puede suceder que los colocados delante no impidan la visión directa de ciertos puntos y no permitan, en cambio, que se reflejen. Finalmente, cuando los planos son horizontales ó tienen otra inclinación cualquiera, las perspectivas pueden diferenciarse de una manera notable, como sucede, por ejemplo, cuando se quiera representar un puente reflejado sobre el agua: si el punto de vista está bastante alto, se verá directamente la calzada, pero no el intradós de las bóvedas de los arcos, y, en cambio, la perspectiva reflejada verá las bóvedas y no la calzada. En este caso, ya se ve que se diferenciarán, tanto más, cuanto más alto esté el punto de vista, y en general, el ojo no puede ver en la perspectiva reflejada lo que *el agua no ve* en la directa, y recíprocamente.

Supongamos (figuras 67 y 68) que H sea el plano del agua, C el del cuadro, O el punto de vista y ABDE un cubo apoyado sobre la superficie ó á cierta altura de ella, siendo A, B, D, E, otro cubo invertido y simétrico. Desde luego se ve que cuanto se halle en el plano AE tendrá las dos perspectivas simétricas, cualquiera que sea la altura de O, porque ya hemos visto que en planos paralelos al cuadro las magnitudes de las perspectivas no dependen de la posición en ellos. Del mismo modo se ve que ese plano EA no impide que sea visto el punto D del DB directamente (y si no existiera el plano ED se verían más puntos del BD); pero no puede reflejarse porque lo impide la masa AED.

En la fig. 67 se ve el plano ED directamente; pero no el simétrico E, D, y el plano AB no se ve directamente ni reflejada. En la fig. 68 se ve directamente el plano ED, y no el simétrico E, D, porque sólo la arista E puede reflejarse en L; la D no puede reflejarse en N y ningún otro punto del plano comprendido entre E y D. En cambio, sólo la arista A puede verse directamente y reflejada en K y ningún otro punto del plano AB se ve directamente; pero todo él se ve reflejado entre K y M. La fig. 69 representa las perspectivas directas y reflejadas de un cubo y un paralelepípedo, y en ella se ve que las verticales *ab* y *cd* tienen perspectivas simétricas *ab*, *cd*, y lo mismo sucedería con toda otra vertical contenida en el plano, y no por eso son simétricas las figuras *acdb*, *acd*, *b*. En esta figura se supone la base sobre la superficie reflejante y en la 70 elevada sobre ésta; pero como la simetría del cubo confunde para darse cuenta de la inversión de las figuras, se ha hecho para una pirámide de la que la cara *abc* es paralela al cuadro, y, por tanto, es simétrica en el reflejo, y no pueden ser más distintas las dos perspectivas.

Y ya sabemos todo cuanto de fundamental encierra la perspectiva, sin que, sabiendo lo que precede, puedan hallar dificultad alguna para resolver los problemas que se presenten aquellos que tienen el dibujo por base de su profesión. Hará falta acaso una mayor ó menor práctica para adquirir la soltura necesaria y consolidar los conocimientos adquiridos, pero nada más. En las lecciones siguientes demostraré prácticamente que es exacto lo que digo; pero quiero demostrarlo desde luego haciendo una distinción muy interesante.

Si yo dijera que *todos* los que sepan lo que precede pueden resolver cuantos problemas de perspectiva se presenten, sería

una indiscutible exageración y, en suma, una afirmación inexacta; pero yo no digo *todos*, sino *aquellos cuya profesión tiene por base el dibujo*.

Se pueden presentar, en efecto, problemas de perspectiva imposibles de resolver sin conocimientos muy extensos de geometría y particularmente de geometría descriptiva, y cuando se trata de ciertos detalles, de molduras y de posiciones especiales de cuerpos de revolución, la determinación de ciertas curvas y los puntos exactos de sus terminaciones exigirían no sólo esos conocimientos, sino los más delicados del análisis matemático. Pero si al llegar ahí, no pueden pasar adelante los que no han hecho esos estudios, en cambio, para nada lo necesitan los que conocen y practican el dibujo, porque teniendo la costumbre de la perspectiva *por sentimiento*, con él atienden á los detalles, necesitando tan solo las directrices, las líneas de perspectiva generales en donde encajen los detalles, y para esto sobra con lo dicho. Nótese que si los matemáticos pueden ir mucho más allá que los artistas en la resolución geométrica de los problemas de perspectiva, no llegarán jamás por ningún género de procedimientos á hallar la perspectiva de una figura humana, á hacer geoméricamente un retrato, á representar por intersecciones de líneas ó trazados de curvas la pasión que expresa una contracción del rostro ó la intensidad de una mirada, y esto que es el *sumum* de la perspectiva, lo realizan por sentimiento y acaso con facilidad los verdaderos artistas.

No pueden pasar éstos de donde otros pasan; pero con todo ello llegan á donde sólo ellos llegan. Y por eso decía y nuevamente afirmo que los que se dedican á la pintura y, en general, al dibujo, saben con lo que precede cuanto en perspectiva les es necesario conocer, pero *ellos, no todos*.

AMÓS SALVADOR.

## REVISTA EXTRANJERA

### Prescripciones de seguridad para las instalaciones eléctricas, según la Asociación de los Electricistas suizos.

Conclusión (1).

#### I.—PRESCRIPCIONES RELATIVAS AL MONTAJE

Art. 37. Los conductores colocados en molduras se dispondrán con separaciones regulares. Los conductores deben quedar sujetos simplemente por las cubiertas; cada ranura no debe contener más de un conductor.

Para los cruzamientos de cañerías de agua y de gas, se debe reforzar el aislamiento, tanto eléctrica como mecánicamente.

En los cruces de muros y tejados se emplearán tubos de protección resistentes.

Si estos tubos son metálicos, se aislarán interiormente.

Cuando se hayan de colocar varios conductores en un mismo tubo, se tendrá cuidado de disponerlos con una separación de un centímetro, por lo menos, de modo que esta separación quede invariable.

Art. 38. El empleo de los conductores llamados *dobles*, que

(1) Véase el núm. 3.