

suelo de las principales ciudades continentales y de algunas americanas. El entarugado de madera hace ya bastantes años que viene empleándose en Madrid, y en ninguna parte mejor que en las oficinas del Ayuntamiento podrá saberse cuáles han sido los resultados, tanto respecto al coste de instalación como al de conservación; pero este último creemos sea bastante elevado, á juzgar por las muchas veces que hemos visto interceptada la vía por las reparaciones.

Respecto al asfalto natural, como hemos dicho al comienzo de este artículo, podría asegurarse que no hay en España noción de sus excelentes condiciones para pavimentos de vía pública, si no fuese por San Sebastián y Vitoria, que lo usan hace algunos años. Ahora, recientemente, la municipalidad de Bilbao ha cubierto con ese mineral muchos miles de metros en sus calles y paseos más concurridos. En Mayo de 1895 en Madrid, y, si nuestros informes son exactos, por iniciativa del Excmo. Ayuntamiento, se hicieron dos ensayos asfaltando un pequeño trozo en la calle del Arenal y otro de uno de los paseos del Retiro, trozos que hemos visitado recientemente y hemos podido observar que prueban las buenas condiciones de la caliza asfáltica de mina.

Esos dos trozos son los únicos de la vía pública de Madrid que tienen asfalto natural, que aquí es absolutamente nuevo. No hay, pues, para qué traer el recuerdo de antiguas aceras, puesto que jamás se ha visto en esta capital asfalto auténtico hasta que se han puesto las reteridas dos muestras hace dos años. Las antiguas aceras que muchas personas recuerdan eran de ciertas mezclas de industria llamadas asfalto indebidamente, y cuyos resultados son contrarios á los del asfalto verdadero.

Siendo los de este último, como son, en todas partes excelentes, nos permitimos recomendar al Municipio de Madrid que, descartando preocupaciones, ensaye el nuevo pavimento, pues, según todas las probabilidades, ha de ser una mejora interesantísima bajo los puntos de vista de la higiene y de la comodidad de los transeuntes y del vecindario.

E. O.

## SOBRE LA PERSPECTIVA

CONFERENCIAS EXPLICADAS EN EL CÍRCULO DE BELLAS ARTES (1)

Recordemos el partido que hemos sacado en cuanto precede de estas dos elementalísimas proposiciones: 1.<sup>a</sup> la perspectiva de una recta se determina por las perspectivas de dos de sus puntos, y 2.<sup>a</sup> la perspectiva de un punto se determina por la intersección de las perspectivas de dos rectas que pasan por él en el espacio. De suerte que la mayor ó menor facilidad con que se resuelvan los problemas de perspectiva depende de la habilidad que se tenga para hacer estas combinaciones, buscando para determinar la perspectiva de rectas puntos de ella fáciles de conocer y para determinar ciertos puntos, rectas cuya perspectiva se halle fácilmente. Ahora sabremos ya determinar en perspectiva el punto de concurso de rectas paralelas entre sí y no paralelas al cuadro, porque para ello no ha-

brá más que tomar dos de ellas y determinar la perspectiva de dos puntos de cada una, con lo cual se tendrán las perspectivas de dichas dos rectas. El punto donde vayan á concurrir en perspectiva será el de concurso de todas ellas en el cuadro. Este problema que hace un momento lo habíamos dejado pendiente, está ya también resuelto y ya veremos más adelante cómo se resolverá en el caso de que resulte dicho punto fuera del cuadro y á larga distancia, aunque siempre cabría ejecutar las operaciones en escala reducida y en un papel suficientemente grande y después copiarlo en el cuadro, con la sola condición de multiplicar las longitudes por el mismo número que representara la reducción hecha anteriormente.

Y como sabiendo hallar la perspectiva de un punto, se sabe hallar la de un objeto cualquiera, repitiendo la misma operación para tantos puntos como sean precisos para definirlo exactamente, vamos á hacer aplicación de ello á un cubo.

Supongamos que se halla situado en el plano horizontal y en la posición que indica la parte superior de la fig. 10, en la que se representa la base *abcd*: las dimensiones de las aristas verticales serán iguales á los lados *ab-bc-cd-da* y se proyectarán en *a, b, c* y *d*. El plano del cuadro estará representado por la línea AC y el otro plano vertical por AB. Por los puntos *a, d, c* y *b* tracemos las horizontales 1 2 3 y 4 y las verticales 5 6 7 8. Representemos en la parte inferior de la fig. 10 los bordes inferior é izquierdo del cuadro por AB y AC, y sean *d<sub>h</sub>* y *d<sub>v</sub>* la línea de horizonte, V el punto de vista, *d<sub>h</sub>* el de distancia horizontal y *d<sub>v</sub>* el de distancia vertical. Tracemos la línea AV perspectiva de la AB y llevemos sobre AC los puntos 1 2 3 y 4, que unidos con *d<sub>v</sub>* (basta poner la regla sin trazar la línea) determinarán las intersecciones 1' 2' 3' y 4' sobre la AV. Por estos puntos se trazarán las horizontales 1' 2' 3' 4', cuyas intersecciones con las que ahora diremos determinarán los puntos *a, b, c* y *d*. Llevemos sobre el borde inferior del cuadro los puntos 5 6 7 y 8 y uniéndolos con V tendremos las perspectivas de las perpendiculares al cuadro que pasan por los puntos *a, b, c* y *d* y que los determinarán por su intersección con las respectivas horizontales anteriores. Finalmente, por los puntos 5 6 7 y 8 se levantarán verticales iguales al lado del cubo 55' 66' 77' y 88', y uniendo los puntos 5' 6' 7' y 8' con el V se tendrían las perspectivas de las líneas que limitarían las alturas de las verticales levantadas en *a, b, c* y *d*, y por lo tanto, trazando éstas y hallando las respectivas intersecciones con las anteriores se determinarían los puntos *a', b', c'* y *d'* y, en consecuencia, la perspectiva del cubo, uniendo convenientemente esos puntos.

Este es el caso más general que se puede considerar, y para que se vea cómo se simplifica todo en los casos particulares vamos á hallar la perspectiva del cubo (fig. 11), suponiendo que su cara anterior sea el mismo cuadro (ó que tomamos por la línea AB de la página anterior la AB de ésta) y que el otro plano vertical sea otra cara del cubo (lo que equivale á tomar por la línea AC de la fig. 10 la AB de ésta).

En tal caso, la cara *abcd* está en el cuadro y es su propia perspectiva, y para hallar las perspectivas de las aristas perpendiculares á ella bastará unir esos puntos con el de vista V. Uniendo ahora el *c* con el de distancia vertical *d<sub>v</sub>* se determinará el punto *e*: trazando la horizontal de ese punto hasta que encuentre á la V se tendrá *f*: trazando la vertical *fg* hasta que encuentre á *bV* se tendrá *g*: y trazando la horizontal *gh* hasta

(1) Véase el número anterior.

que encuentre á  $cV$  se tendrá  $h$  y, por lo tanto, la perspectiva del cubo con una grandísima facilidad.

No se crea que estos resultados se obtienen con facilidad por tratarse de un cuerpo tan sencillo como el cubo. Lejos de eso, hemos hecho el estudio con la mayor generalidad, y las construcciones indicadas para determinar las perspectivas de puntos y rectas, son independientes de que unos y otros se hallen situados en un cubo ó en otro cuerpo cualquiera. Además, á los pintores acostumbrados á las perspectivas por sentimiento no les hace falta llevar el estudio de ellos á los detalles, bastándoles conocer las líneas generales de conjunto para tomarlas por guía y encajar en ellas el resto. Y no sólo la mayor parte de los edificios en su totalidad ó en sus cuerpos de construcción se asemejan á paralelepípedos, cuyas líneas generales no se determinarían con mayor ni menor dificultad que las aristas de un cubo, sino que sucede lo mismo con casi todos los elementos de construcción y la gran mayoría de los objetos.

Puede afirmarse resueltamente que si esta lección se ha entendido, se ha aprendido por completo la perspectiva y pudieran, en rigor, suprimirse las que siguen; pero no es conveniente suprimirlas, porque servirán de esclarecimiento, de ampliación y de consolidación de esos conocimientos, proporcionando mayor facilidad y desenvoltura en las aplicaciones, enseñando para ciertos casos métodos especiales sencillos, introduciendo simplificaciones en la ejecución, dando á conocer construcciones muy elegantes, y haciendo, en suma, que se sepa mejor lo que se sabe. No obstante, repito que con lo que se sabe puede, con más ó menos facilidad, bastarse á sí mismo el artista que necesita hacer uso de la perspectiva.

## II

### EXCLARECIMIENTOS DE LO QUE PRECEDE

Vamos á examinar lo que resulta de las diferentes posiciones relativas que pueden ocupar el ojo, el cuadro y el objeto, é imaginemos á los tres vistos de perfil, ó sea como si se proyectaran sobre un plano vertical, que es á lo que llamaremos en lo sucesivo, sin que pueda ya extrañar esta frase, *ver los objetos en proyección vertical ó proyectados verticalmente*; de la misma manera que se llama ver los objetos á *vista de pájaro* cuando se los ve como si se proyectaran en un plano horizontal, y también usaremos como análoga á esa frase la de *ver los objetos en proyección horizontal ó proyectados horizontalmente*.

Sea  $o$  la posición del ojo (fig. 12),  $C$  la del cuadro y supongamos que el objeto se reduce á una vertical limitada  $AB$ . En esta posición la perspectiva de esta línea será  $ab$ ; pero si este objeto se aleja, el ángulo de las visuales extremas irá disminuyendo y, por lo tanto, la magnitud de la perspectiva que será la  $a_1 b_1$  cuando llegue aquélla á ocupar la posición  $A_1 B_1$ . Es decir, que la perspectiva se agranda cuando el objeto se acerca y se achica cuando se separa.

Si permaneciendo fijos el cuadro y el objeto se acerca ó se para el ojo, veremos en la fig. 13 que la perspectiva se achica ó agranda; es decir, que suponiendo fijo el cuadro, la perspectiva se agranda si el ojo se separa ó si el objeto se acerca, y por el contrario, aquélla se achica si el espectador se aproxima ó el objeto se aleja.

Si suponemos ahora fijos el ojo y el objeto y que el cuadro se mueve, acercarse al ojo es separarse del objeto, y por las dos razones la perspectiva se achica, y recíprocamente si se aleja del espectador se aproxima al objeto y por las dos razones la perspectiva se agranda (fig. 14).

Se ve, pues, que la magnitud de la perspectiva no depende de la magnitud real del objeto ni de la distancia de éste al ojo, sino de la posición relativa del cuadro con relación á uno y otro, es decir, de la relación entre estas distancias.

Sólo la experiencia puede suministrar estos datos de distancias y ella nos dice que las mejores proporciones para que la perspectiva resulte exacta y agradable son éstas: 1.<sup>a</sup>, la distancia del ojo al cuadro debe oscilar entre vez y media y dos veces la mayor dimensión de éste, y 2.<sup>a</sup>, la distancia del ojo al objeto debe oscilar entre dos y tres veces la mayor dimensión del conjunto de objetos que se ha de representar (y que puede elevarse hasta cinco veces para perspectivas lejanas), acortándose cuando los objetos se ven de frente y alargándose en las perspectivas oblicuas. Dentro, pues, ó en la proximidad de esos límites intentaremos hacer las perspectivas, rechazando las demás por contrahechas, anamórficas, malas.

Antes de pasar adelante, y puesto que esta lección es ya para los que no quieren aprender en una sola la perspectiva y deseen saber algo más, voy á recordar, sin demostrarlo, un teorema elementalísimo de la categoría de los pocos que he recordado hasta ahora y del que se hace un uso constante para simplificar los procedimientos ya estudiados.

Si se corta un triángulo  $ABC$  (fig. 15) por una recta  $DE$  paralela á uno de los lados, los triángulos  $ABC$  y  $ADE$  que resultan, son semejantes, y por lo tanto, todas las líneas análogas ú *homólogas* son proporcionales; en consecuencia se tendrán estas relaciones  $\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE} = \frac{BC}{DE}$ , y poco importa que la recta  $DE$  corte á esos lados ó á sus prolongaciones como en las figuras 16 y 17; esas relaciones se verifican siempre.

Ahora veamos las figuras 12, 13 y 14 en proyección horizontal, ó sea á vista de pájaro (fig. 18), y supongamos que el ancho del conjunto de objetos que se han de reproducir es  $MN$  y que el espectador ó el ojo  $O$  se coloca á la distancia de él  $OA$  igual á tres veces  $MN$ . Sea además  $CC'$  el ancho del cuadro colocado á la distancia  $Oa$  igual á vez y media  $CC'$ . ¿Qué sucederá? Sucederá que el ángulo visual con relación al cuadro será  $COC'$  y con relación al natural  $MON$  menor que el anterior y, por lo tanto, si nos fijamos en el primero comprenderá la vista la longitud  $MN'$  y si se reproduce en perspectiva no estará con la distancia al ojo en la relación de uno ó tres; si, por el contrario, tomamos el ángulo  $MON$ , la perspectiva sólo ocupará en el cuadro el espacio  $cc'$  y quedarán unos trozos en él en claro; y tampoco se guardará la relación de uno á uno y medio adoptada para la del ancho del cuadro y la distancia al espectador.

Para que eso no suceda sería preciso por el teorema que acabo de recordar, que las relaciones  $\frac{OA}{MN}$  y  $\frac{Oa}{CC'}$  fueran iguales y las hemos fijado desiguales. Lo que habrá que hacer es tomar el ángulo  $MON$  y agrandar la perspectiva  $aa'$  hasta que ocupe todo el ancho del cuadro  $CC'$ ; pero sobre esto de agrandar ó achicar las perspectivas voy á decir, en general,

todo cuanto haga falta saber en cuantos casos puedan ocurrir.

Si imaginamos que el cuadro está á la distancia del objeto ó que el ojo equidista del cuadro y del objeto, ó lo que es lo mismo, que la perspectiva se hace de tamaño natural, entonces es claro que se llevan sobre el cuadro las distancias reales; pero esto, que puede hacerse en un retrato ó en la representación de un objeto de pequeñas dimensiones, no es el caso general. Lo regular es que si el objeto se copia del natural, tenga menores dimensiones la perspectiva, y si se copia de planos hechos, como de ordinario se hacen, en escala muy reducida el cuadro de perspectiva sea mayor. En el primer caso, si se quiere, por ejemplo, una perspectiva de dimensiones lineales cuatro veces menores que las del natural, todas las magnitudes del espacio se dividirán por cuatro para llevarlas al cuadro; y si se quiere una perspectiva cuyas dimensiones sean cuatro veces mayores que las que se toman en el plano, todas las magnitudes de éste se multiplicarán por cuatro en la perspectiva.

Es claro que si se quisiera para el cuadro las dimensiones del plano, lo que equivale á decir que la reducción de la perspectiva con relación al natural es la misma que la del plano al mismo, bastará llevar á la perspectiva las magnitudes del plano.

También, es claro, que si no se tomaran sobre el plano magnitudes, sino que se leyeran con la escala ó en cotas dimensiones reales, habría que reducirlas en vez de agrandarlas para el cuadro.

Y asimismo, es claro que puede construirse una escala con la que se lea directamente lo que sin reducciones ni ampliaciones haya de llevarse sobre el cuadro.

Pero en términos generales, se puede decir que lo primero es saber la relación en que se han de encontrar las magnitudes del cuadro y del objeto cuya perspectiva se hace para llevar esas magnitudes al primero multiplicadas por esa relación.

Por lo regular se preferirá para todo esto el uso de las escalas y de los números; pero nada más fácil que hacer esas reducciones ó ampliaciones gráficamente, si se quisiera llevar magnitudes con el compás, valiéndose del teorema hace un momento recordado de los triángulos semejantes. Se forma un ángulo con las dos rectas AC y AB, se lleva sobre la primera, por ejemplo, una magnitud del objeto y sobre la AB otra del cuadro en la relación que les corresponda, formando el triángulo ABC. Cualquiera otra dimensión del objeto se llevará sobre AC (AE por ejemplo), y trazando ED paralela á CB, se tendrá la distancia AD de la perspectiva (fig. 19).

La línea de horizonte puede ocupar una posición cualquiera en el cuadro. Lo más frecuente es que vaya en el centro; pero ya se comprende que si se trata de copiar una plaza desde un balcón deberá estar muy alta, y si se quiere copiar una población situada en alto desde una playa, deberá estar muy baja. Es siempre, según se ha dicho, la perspectiva del horizonte, ó la intersección con el cuadro del plano horizontal que pasa por el ojo.

Asimismo es lo regular que el punto de vista se proyecte hacia el centro del cuadro ó en el centro mismo; pero puede variar á la derecha ó á la izquierda, según convenga dar á una parte más importancia que á otra, ó se haga depender el efecto de la oblicuidad con que se mire.

Y nada más habría que decir del punto de vista, si no fuera

forzoso combatir un error extendido entre artistas y en los libros más serios, que dedican muchas páginas á consolidarlo. Se dice, en efecto, que los cuadros han de verse desde el punto de vista, so pena de no hallar el efecto; que el espectador no puede ver cuadros si no sabe algo de perspectiva que le permita colocarse en el punto más conveniente; que es defectuosa la colocación de algunos en los museos, porque no se les puede ver sino fuera del punto de vista, etc., etc. Lo primero que se necesita para que un cuadro se vea bien, es que *sea posible la visión*, sin que la impidan los reflejos, la excesiva proximidad ó una oblicuidad muy marcada.

Si imaginamos, exagerando, que se cierran los balcones, en la obscuridad no habrá evidentemente visión; si nos colocamos en punto donde con relación á la luz se produzcan los mayores reflejos del barniz, tampoco veremos nada, y de ahí el que se prefiera la luz cenital que los evita en sumo grado; si nos acercamos tanto al cuadro que no lo abarcamos de una sola mirada, perderemos el efecto y si nos alargamos mucho, no apreciaremos los detalles; finalmente, si se ve el cuadro *de canto* ó poco menos, será imposible *verlo bien*. El espectador evita instintivamente estas exageraciones que hacen imposible la visión ó la producen de mala manera; pero dentro de los límites racionales y de que hablaré más adelante, verá siempre el cuadro del mismo modo. Si fueran esculturas, bajos relieves, cuerpos, en fin, de tres dimensiones, evidentemente se verían de distinta manera según el punto de vista que se eligiera; pero el cuadro sólo tiene dos dimensiones y lleva en sí mismo la luz y la perspectiva, de suerte que el espectador *no puede dejar de verlo de un punto determinado aunque esté colocado en otro*: sin ilusión no hay forma de ver en un cuadro que tiene dos dimensiones objetos que tienen tres, y esa ilusión hace girar al cuadro hasta colocarse normalmente á la visual principal, porque, en suma, así como el punto de vista define la perspectiva y no puede ser más que una, la perspectiva define el punto de vista y es inútil buscar uno ú otro, porque es único y *lo lleva el cuadro en sí*. Si estas ideas elementales necesitaran confirmación, bastaría recordar los elogios que se hacen de ciertas vírgenes pintadas por los más ilustres artistas, y de ciertos notables retratos, de los que se dice que tienen la particularidad de *mirar á todas partes*. ¡Y qué había de suceder siendo un plano! ¡No mirarían á todas partes si tuvieran tres dimensiones, porque influiría la colocación del espectador! Entonces sólo mirarían á un punto; pero *la particularidad* de esos cuadros no es otra que la de *mirar al punto de vista, y miran á todas partes*, porque (dentro de los límites indicados arriba) es *indiferente* la posición del espectador para mirarlos, *viéndolos siempre desde el punto de vista*, porque la ilusión se produce como si girara el cuadro del modo antes dicho. En otro lugar diré cuando realmente hay deformación.

Fijada la distancia del ojo al cuadro, quedan asimismo fijos de posición los puntos de distancia de que se hace un uso frecuente en la perspectiva; pero *en las buenas*, estarán siempre fuera del cuadro, y cuando no sea posible añadir papel ó lienzo ó colocar listones con puntas á los que se sujeten hilos que hagan oficio de reglas; cuando las dimensiones del cuadro ocupen la pared del estudio y no haya prolongación posible ¿cómo nos valdremos de esos puntos? Cabe desde luego hacer lo que se indico en la primera lección, ó sea hacer una perspectiva en

escala tan reducida como sea preciso para que sobre papel ó lienzo y después copiarlo en el cuadro agrandando inversamente las dimensiones. Cabe también sustituir la construcción geométrica por un sencillísimo cálculo numérico basado en el teorema de la semejanza de triángulos como indica la fig. 20.

Supongamos utilizado el punto de distancia D para trazar la recta inclinada  $45^\circ$  DB y determinar el punto  $a$ : este punto se determinaría si pudiéramos calcular la distancia Ad, porque la llevaríamos sobre el borde del cuadro y uniendo  $d$  con B sería como haber unido D con B; pero esa distancia se calcula fácilmente, porque en los triángulos BDF y Bda se verifica que  $BE:BA :: DE:x = \frac{BA \times DE}{BE}$  y estas magnitudes son todas conocidas: BA se conoce desde luego, así como DE, y como se conocen DV y CV se conoce DC = AE y BE.

Pero, aun cuando la lección primera proporciona, como se ve, los medios de resolver el problema, bueno será indicar el modo de que las construcciones gráficas no salgan de los límites del cuadro, valiéndonos siempre del sencillísimo y fecundo teorema de la semejanza de triángulos. Vamos á demostrar que una línea arbitraria EF (fig. 21) sirve lo mismo que la DB para determinar el punto  $a$ . En efecto, los triángulos semejantes DaV y AaB dan  $\frac{Va}{aA} = \frac{DV}{AB}$  y los igualmente semejantes EVa y AaF dan  $\frac{Va}{aA} = \frac{EV}{AF}$  luego como dos

cosas iguales á una tercera son iguales entre sí,  $\frac{DV}{AB} = \frac{EV}{AF}$ ; es decir, que en vez de tomar la distancia VD se puede

tomar una arbitraria VE igual á la 3.<sup>a</sup>, 4.<sup>a</sup> ó 5.<sup>a</sup> parte de VD, según convenga para que el punto E no salga del cuadro y la recta EF no corte muy oblicuamente á la AV, con la condición de llevar sobre el borde inferior del cuadro en vez de la distancia AB otra AF reducida en la misma proporción. El punto F puede llamarse *de distancia reducida*.

Recordemos ahora que para trazar en la fig. 9.<sup>a</sup> la horizontal  $ch$  determinábamos el punto  $v$  por la intersección de la perpendicular al cuadro CV con la  $C' d'v$  inclinada  $45^\circ$ ; pero, sirviéndonos de este mismo teorema, nada más fácil que construir sobre el cuadro una horizontal paralela á él y á una cierta distancia sin valerse de la perpendicular CV ni de la inclinada  $C' d'v$ . Sea (fig. 22) en proyección vertical, O el ojo CA el cuadro y H la horizontal, distante del cuadro la magnitud AH. No habrá más que unir O con H que corta al cuadro en  $a$ , y tomar la distancia Aa para llevarla en el cuadro desde el borde inferior hacia arriba; pero si se quiere calcular numéricamente esa distancia, como la distancia AH es conocida, así como la OP, y también la PA (distancia del ojo al cuadro) se conoce PH y en los triángulos semejantes OPH y aAH, se tiene  $PH:AH :: OP:\infty$ .

Recordemos asimismo que en la fig. 10 cuando, después de determinar los puntos  $abc$  y  $d$  de la base del cubo, queríamos llevar sobre ellos las alturas iguales  $aa' - bb' - cc'$  y  $dd'$ , hallábamos esos puntos  $a'b'c'$  y  $d'$  por la intersección de esas verticales con las líneas  $5'V - 6'V - 7'V$  y  $8'V$ , y que para construir estas líneas llevábamos sobre los puntos  $5, 6, 7$  y  $8$  las distancias iguales á la arista del cubo  $55' - 66' - 77'$  y  $88'$ .

Lo hacía así para no introducir una dificultad con una simplificación, quitando valor al método general que venía exponiendo; pero esas cuatro alturas podía haberlas sustituido por una sola llevada al borde de la izquierda del cuadro, y en general, sobre ese borde se pueden siempre llevar las distancias verticales para determinar las alturas, en vez de hacerlo en los puntos  $5, 6, 7, 8$ , y análogos. En efecto (fig. 23), para calcular en perspectiva la altura  $gh$ , lo mismo es llevar al punto  $f$ , la altura real  $fe$  y trazar la línea  $eV$  para hallar la intersección con la  $hg$  que llevar esa altura  $fe$  al borde del cuadro en  $ab$  unir  $b$  con  $V$ , trazar la horizontal  $hd$  y luego la vertical  $dc$  porque  $dc = gh$ . El tantas veces citado teorema nos dice que en los triángulos  $eVf$  y  $gVh$  se tiene  $\frac{ef}{gh} = \frac{fV}{hV}$ ; en los  $aVf$  y  $dVh$ ,  $\frac{fV}{hV} = \frac{aV}{dV}$  y por tanto,  $\frac{ef}{gh} = \frac{aV}{dV}$ ; pero en los  $aVb$  y  $dVc$  se tiene  $\frac{aV}{dV} = \frac{ab}{cd}$  luego  $\frac{ef}{gh} = \frac{ab}{cd}$  y como  $ef = ab$  también  $gh = cd$ .

Pero no se necesita esta demostración, engorrosa acaso, para los que no tienen costumbre de ello, porque nos basta fijarnos en las conclusiones á que llegamos en la lección primera.

Allí dijimos que las líneas tales como  $gh$  y  $cd$  miden siempre en perspectiva la distancia entre paralelas tales como las  $eV - fV$  y  $bV - ab$  y que se degradaban ó disminuían en magnitud tanto más cuanto más lejos estuvieran del cuadro, lo cual quiere decir que líneas iguales en altura y situadas á la misma distancia del cuadro tienen la misma altura en perspectiva, y como la distancia entre las paralelas  $aV, bV$  y  $fV, eV$  es la misma, las magnitudes  $gh$  y  $cd$  que se hallan á la misma distancia del cuadro (porque sus pies  $h$  y  $d$  están sobre la horizontal  $dh$ ) deberán ser iguales en perspectiva. De modo que si se quisiera llevar la misma altura  $ab$  sobre un punto  $i$  en perspectiva, bastaría trazar la horizontal  $ih$  y la vertical  $kl$ , y esta sería la altura que debería llevar desde  $i$  hasta  $m$ . Y si sobre otro punto  $n$  se quisiera construir una altura distinta de las anteriores, llevaría esa altura sobre el mismo borde izquierdo del cuadro  $as$ , uniría  $s$  con  $V$ , trazaría la horizontal  $np$  y la vertical  $pq$ , que sería la magnitud que debería llevar sobre  $n$  de  $n$  á  $r$ .

Para completar estas ideas, vayan dos ejemplos. Supongamos (fig. 24) que  $abc$  y  $d$  son las perspectivas de cuatro puntos sobre las cuales se quiere llevar una misma distancia AB en perspectiva: trazaremos la línea BV y luego las horizontales  $aa' - bb' - cc'$  y  $dd'$  y las verticales  $a'a'' - b'b'' - c'c''$  y  $d'd''$ , que serán las alturas buscadas  $aa_1 - bb_1 - cc_1$  y  $dd_1$ . Supongamos ahora (fig. 25) que  $abc$  y  $d$  sean las perspectivas de cuatro puntos sobre las cuales se quiere llevar alturas distintas (que tomaremos sobre el borde del cuadro) AD, AE, AB y AC: se trazan las líneas DV, EV, BV y CV y cada una servirá para determinar la altura correspondiente por el mismo sistema.

Se ve pues, que para calcular todas las distancias verticales en perspectiva pueden llevarse siempre las distancias reales sobre el borde del cuadro, y como fácilmente pudiera graduarse y construir en él una escala sobre la que se tomaran las magnitudes para unir las con el punto de vista por medio de una regla y determinar las intersecciones que hicieran falta,

de aquí que se considere ese borde como la *escala de alturas*.

De la misma manera se llama al borde inferior *escala de anchuras*, porque sobre él se llevan las magnitudes reales que sirven para determinar las distancias horizontales paralelas al cuadro, según se hallen más ó menos alejadas del mismo.

Finalmente, llamaremos *escala de longitudes* á la línea perpendicular al cuadro que una en perspectiva el vértice inferior izquierdo del mismo con el punto de vista, porque ella mide las magnitudes tomadas en esa dirección. En España se le llama por lo general *escala de degradación*, porque da, en efecto, la medida de lo que los objetos se degradan ó achican al alejarse del cuadro. Sobre las otras escalas, las medidas son las de una escala ordinaria; pero sobre esta última tendría que construirse de una manera especial, aunque fácil, para que pudieran tomarse en ella directamente. En la fig. 26 (análoga á la 22) si suponemos la escala tendida en la horizontal AH y que representan decímetros las distancias iguales tomadas á partir del cuadro, uniéndolas con el punto O, darán en la recta C la escala de degradación, que se llevaría desde el borde inferior del cuadro hacia arriba, y donde las horizontales cortarían á la línea AV quedaría ésta graduada.

Sirva esto para indicar cómo se construiría la escala y cómo se hallaría la perspectiva de un conjunto de paralelas al cuadro situadas en el plano horizontal.

También hubiéramos sabido graduar la escala de longitudes, haciendo uso de lo que ya sabemos; esto es, unir los puntos de la escala de anchuras con el de distancia horizontal ó los de la escala de alturas con el de distancia vertical, y las intersecciones con la escala de longitudes, en los dos casos daría la graduación de ésta.

Fijándonos ahora otra vez en las escalas de anchos y de alturas, podrá suceder que las distancias reales que hayan de llevarse sobre los bordes inferior y lateral del cuadro, sean mayores que la anchura y el alto del mismo, sin que sea posible añadir papel ó lienzo ni listones ni nada, como dijimos al tratar de los puntos de distancia, y, aunque también nos serviría en este caso el procedimiento de la perspectiva reducida ó el del cálculo numérico de las distancias  $ab - cd$ , por la semejanza de los triángulos AVD,  $abD$  y VBC,  $cdG$  (figura 28) será muy conveniente indicar el medio de que todas las construcciones geométricas queden dentro del cuadro, y también para esto nos sirve el consabido teorema de la semejanza de triángulos. En efecto, si por el punto P situado á la cuarta parte de OV trazamos la horizontal PX y la vertical PY por la semejanza de los triángulos OVC y PVM; OVD y PVN, si las líneas OV y PV están en la relación de cuatro á uno, también estarán en esa misma relación las líneas OC y PM; OD y PN, luego en vez de llevar las distancias horizontales y verticales sobre las líneas OC y OD, podremos llevarlas sobre las PX y PY con la condición de dividir las por cuatro y determinaremos como antes la posición de las líneas VC y VD, es decir, que los bordes del cuadro se sustituyen por una horizontal y una vertical arbitrarias, teniendo cuidado de llevar sobre ellas distancias reducidas en la proporción en que cada una (PM y PN) esté con las OC y OD.

Según lo que parece, la disposición del cuadro, preparado de modo que todas las construcciones gráficas resulten exteriores, es la que indica la fig. 20. En ella ABCD es el cuadro,

HH' la línea de horizonte, V el punto de vista en el cuadro, P el punto de distancia reducida, DV la escala de longitudes ó de degradación y EX, EY las escalas de anchuras y alturas reducidas. Para trazar las líneas inclinadas  $45^\circ$  se llevarán sobre CD las distancias reducidas en la proporción que lo está VP, y las magnitudes que se llevan sobre las EX y EY se reducirán asimismo en la proporción de DV á EV.

Para terminar ya esta lección, sólo me falta poner más de relieve algunas de las conclusiones ya establecidas, ampliando algunos razonamientos.

Hemos visto que las distancias se degradan ó achican á medida que se alejan del cuadro; pero no cuando se mueven en un plano paralelo á éste, ya se vayan muy lejos á la derecha ó á la izquierda, ya hagan lo mismo hacia arriba ó hacia abajo. Aunque ya pudiera pasar esto por demostrado, como sobre esto es frecuente ver ideas equivocadas conviene detenerse y dar una demostración concluyente, fundada también en la semejanza de triángulos como todo lo que ha sido objeto de esta lección.

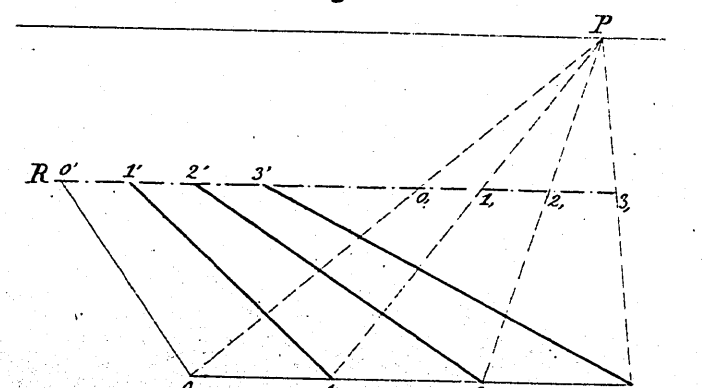
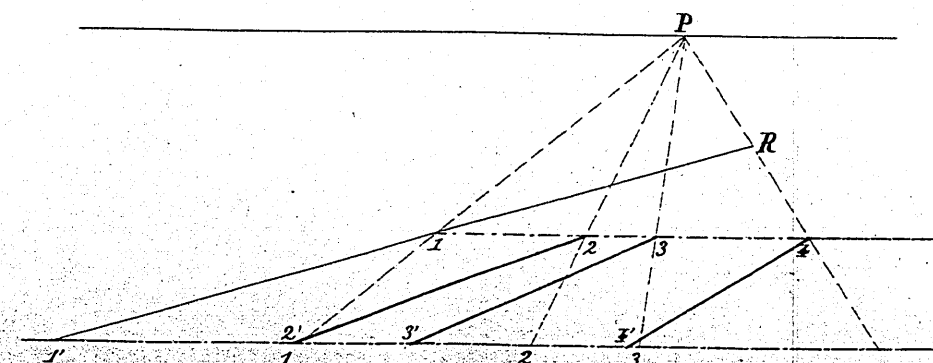
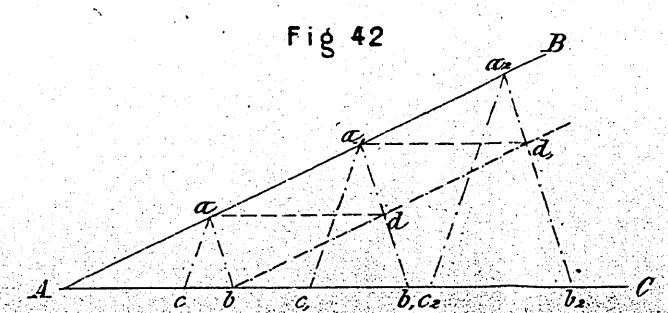
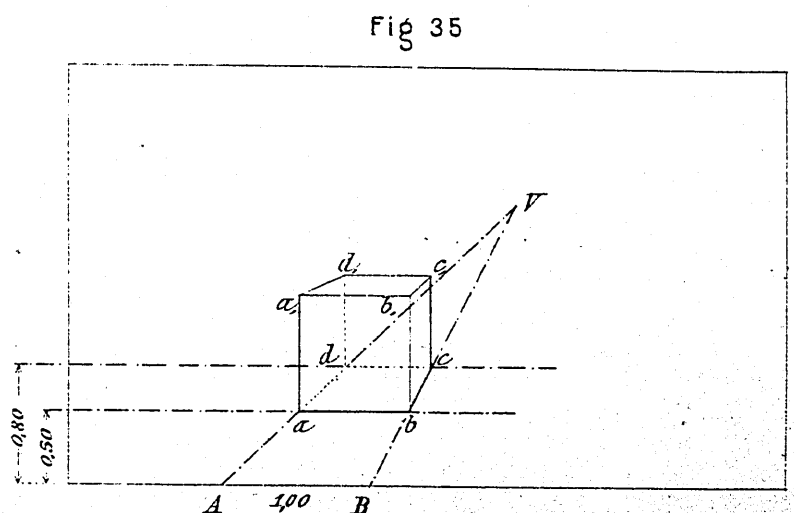
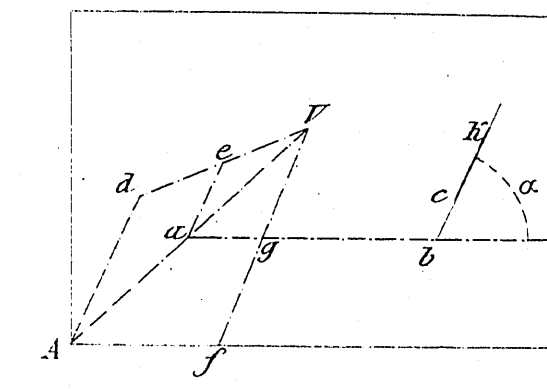
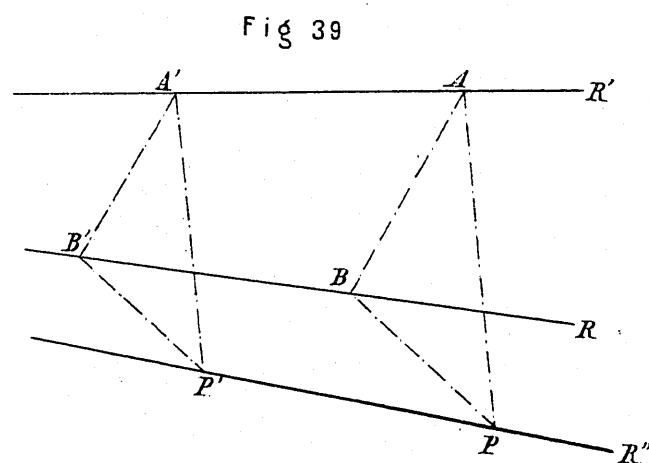
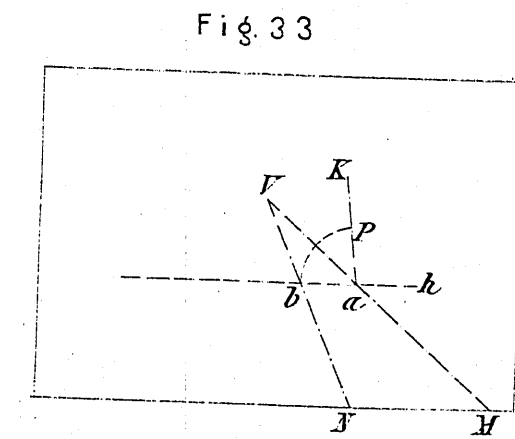
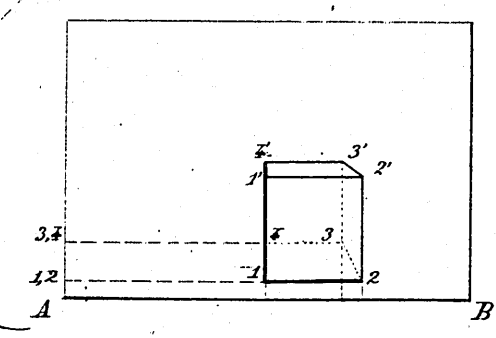
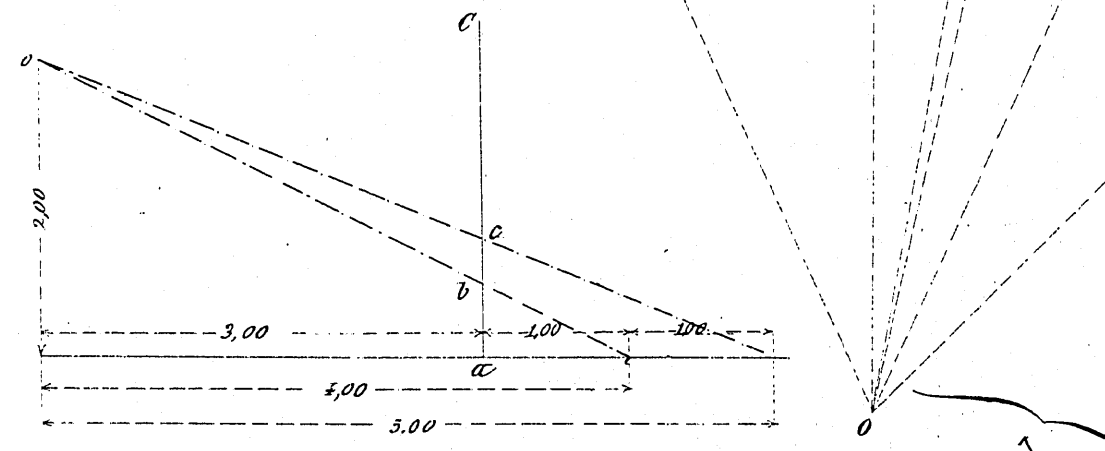
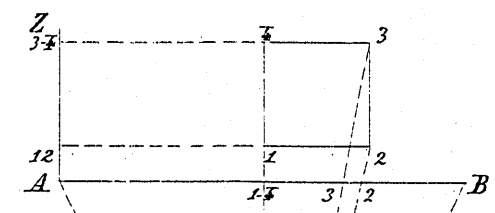
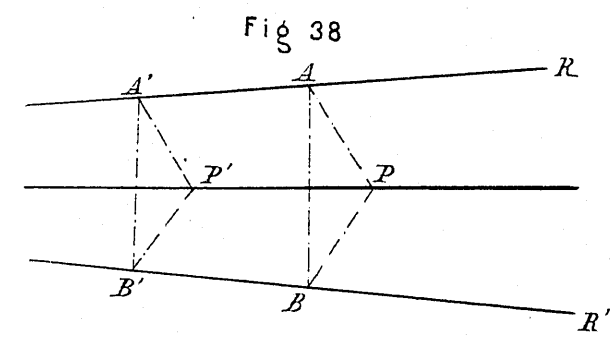
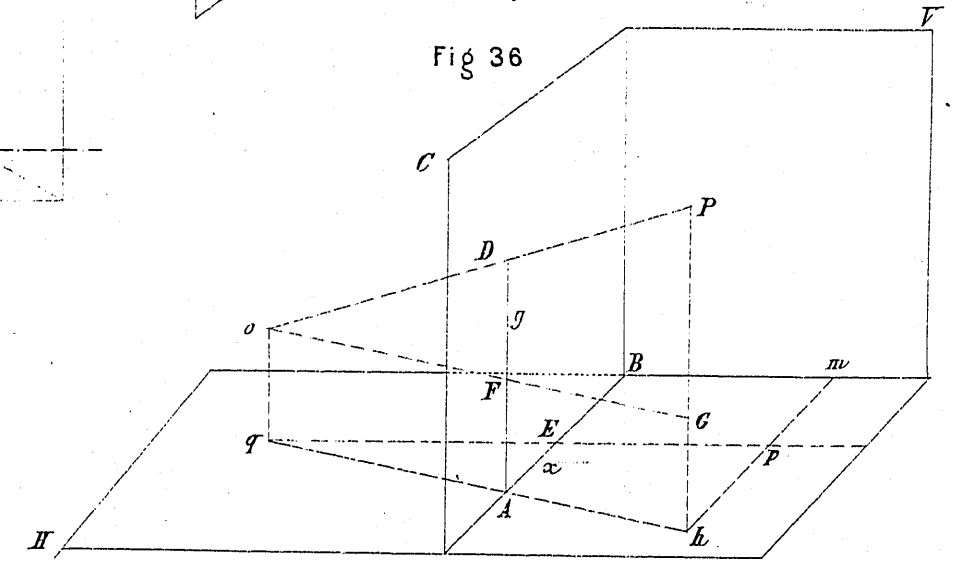
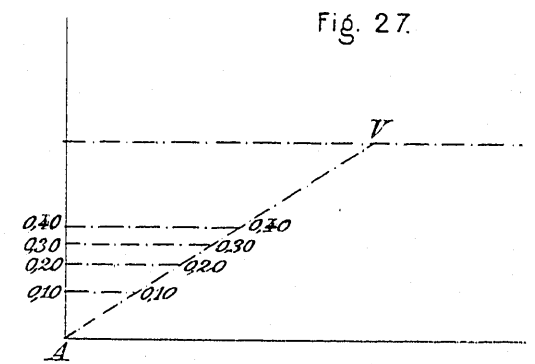
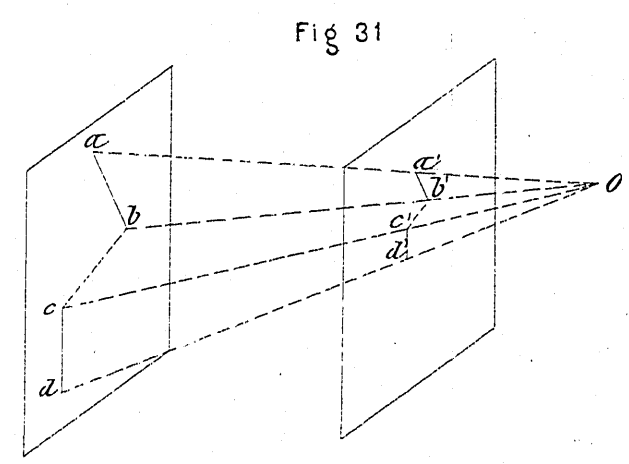
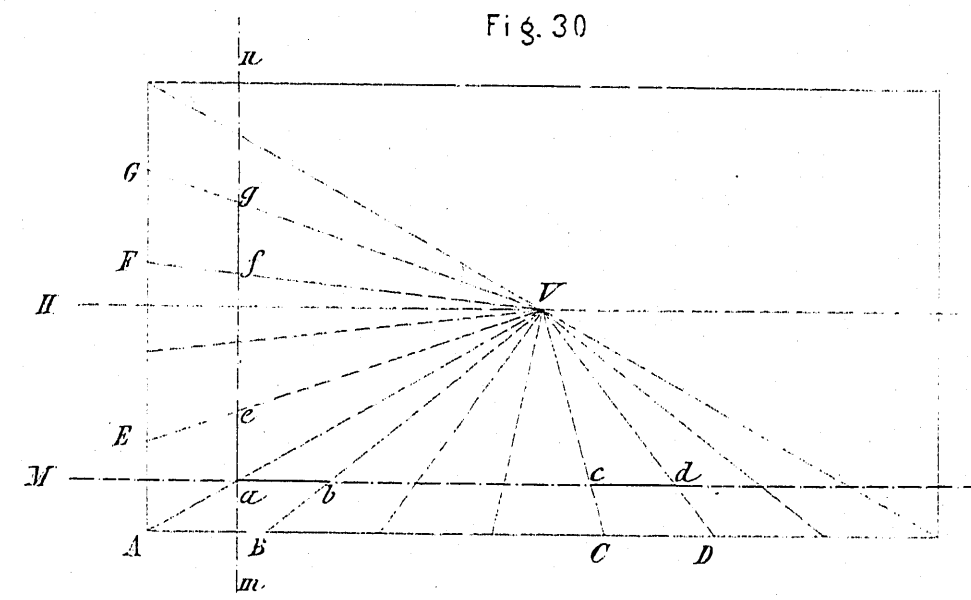
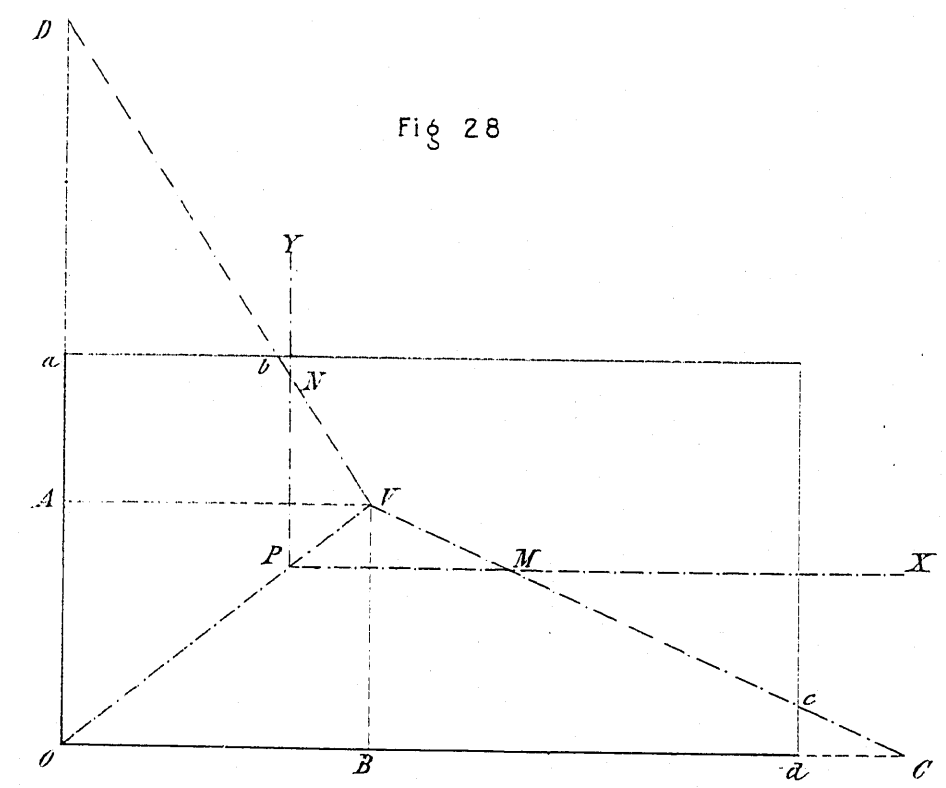
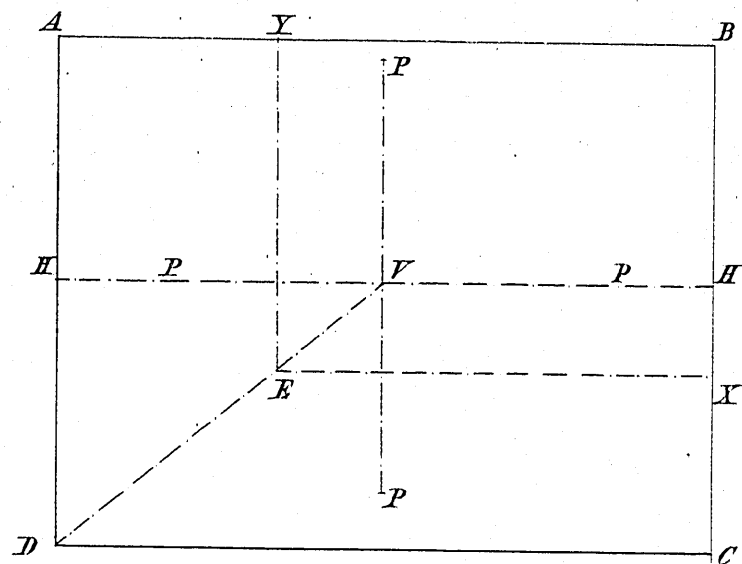
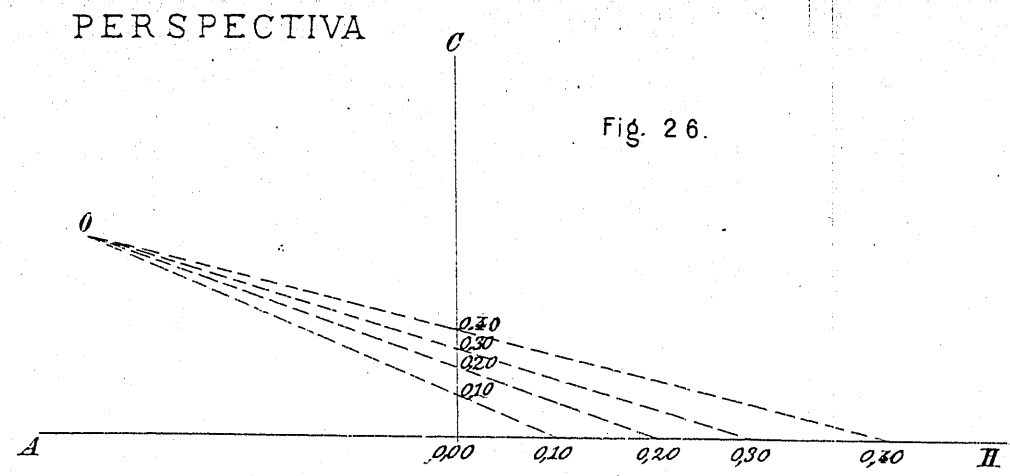
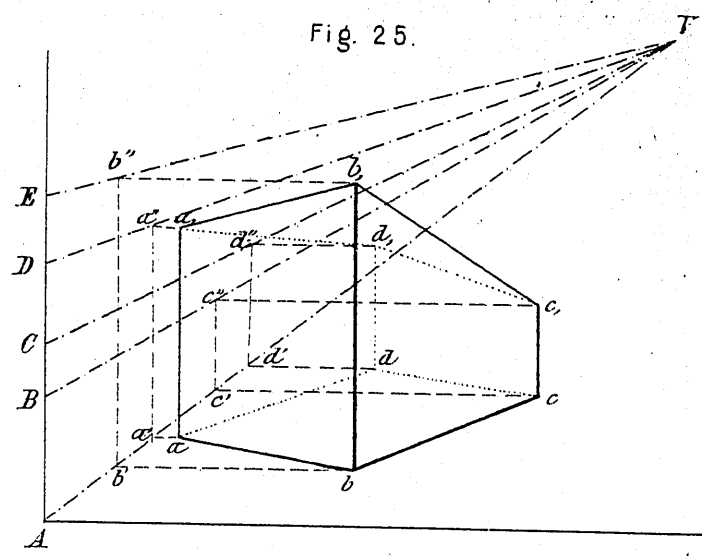
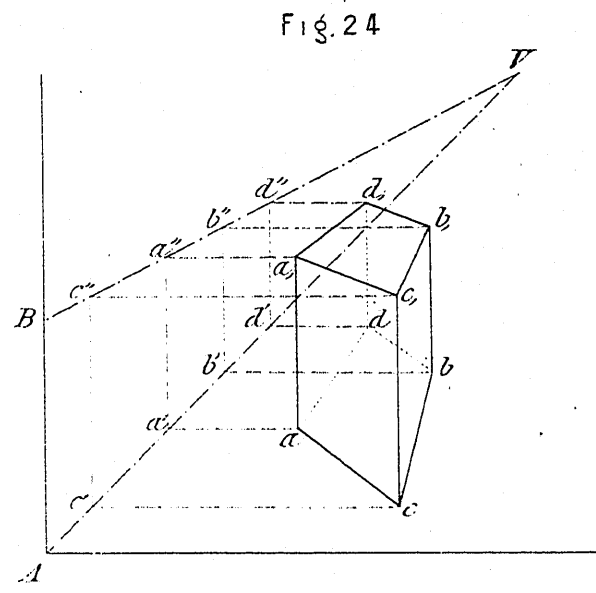
Supongamos el borde inferior del cuadro (fig. 30) dividido en siete partes y unamos los puntos de división con el V: cortemos ahora esas rectas por la horizontal MN y tomemos dos cualesquiera de las porciones interceptadas, por ejemplo, las  $ab$  y  $cd$ : voy á demostrar que son iguales, con lo que habré demostrado que la dimensión  $ab$  es la misma en perspectiva, cualquiera que sea la posición que ocupe sobre la horizontal

MN: Los triángulos semejantes AVB y  $aVb$  dan  $\frac{AV}{aV} = \frac{AB}{ab}$ ; los CVD y  $cVd$  dan  $\frac{VD}{Vd} = \frac{CD}{cd}$ ; pero los AVD y  $aVd$  dan  $\frac{AV}{aV} = \frac{VD}{Vd}$ ; luego  $\frac{AB}{ab} = \frac{CD}{cd}$  y como  $AB = CD$ ,  $ab = cd$ .

Supongamos ahora que el otro borde del cuadro se ha dividido en cinco partes iguales entre sí y á las anteriores, de suerte que  $AB = AE$ ; unamos los puntos de división con V, tracemos la vertical  $nm$  y demostraremos del mismo modo que dos cualesquiera de los segmentos  $ae$  y  $fg$  son iguales, ó sea que la magnitud  $ae$  no varía en perspectiva, cualquiera que sea la posición que ocupe sobre la vertical  $nm$ . En efecto, los triángulos AVE y  $aVe$  dan  $\frac{AV}{aV} = \frac{AE}{ae}$  y los FVG y

$fVg$  dan  $\frac{GV}{gV} = \frac{FG}{fg}$  pero los AVG y  $aVg$  dan  $\frac{AV}{aV} = \frac{GV}{gV}$  luego  $\frac{AE}{ae} = \frac{FG}{fg}$  y como  $AE = FG$ ,  $ae = fg$ .

Esto nos dice que la altura de una figura en un cuadro es independiente de la altura á que se halla colocada sobre el plano horizontal del borde del cuadro y que sólo disminuye en razón de su alejamiento del cuadro y que, por lo tanto, esté alta ó baja, se determina su altura como si estuviera situada en dicho plano horizontal; pero vamos á demostrar, además, que puede determinarse con la escala de anchos sin hacer uso para nada de la de alturas. Hemos visto, en efecto, que los triángulos AVB y  $aVb$  dan  $\frac{AV}{aV} = \frac{AB}{ab}$  y que los AVE y  $aVe$  dan  $\frac{AV}{aV} = \frac{AE}{ae}$ , luego  $\frac{AB}{ab} = \frac{AE}{ae}$  y como  $AB = AE$ ,  $ab = ae$ . Es decir, que á la distancia  $Aa$  del pla-



no las magnitudes iguales AB y AE tienen magnitudes iguales en perspectiva, ó que una magnitud dada tiene á una cierta distancia del cuadro una magnitud fija en perspectiva, lo mismo si se coloca horizontal que verticalmente. Bastaría también haber dicho que teniendo la misma mínima distancia las paralelas AV y BV, AV y EB, medida en distancia en cada sistema de ellas á la misma distancia del cuadro, deberán obtenerse magnitudes iguales y, por lo tanto en vez de llevar la altura en AE para hallar la *ae*, se ha podido llevar en AB y determinar *ab* que es igual á *ae*.

Pero es tan interesante fijar bien estas ideas, frecuentemente equivocadas, que voy á demostrar, en general, que dos magnitudes iguales situadas de una manera cualquiera sobre un plano paralelo al cuadro, tienen en perspectiva magnitudes iguales. Sean (fig. 31) *ab*, *cd*, las magnitudes iguales situadas de una manera arbitraria.

$$\text{Se tiene } \frac{bo}{b'o} = \frac{ab}{a'b'} \text{ y } \frac{co}{c'o} = \frac{cd}{c'd'}; \text{ pero } \frac{bo}{b'o} = \frac{co}{c'o}$$

$$\text{luego } \frac{ab}{a'b'} = \frac{cd}{c'd'} \text{ y como } ab = cd \text{ también } a'b' = c'd'.$$

Así, pues, si á la distancia *Aa* del cuadro (fig. 32) y en el plano paralelo que pasa por *a*, hubiera una línea inclinada con relación al horizontal un ángulo  $\alpha$  cuya perspectiva sería también una recta inclinada  $\alpha$  grados como la *bK* y se quisiera llevar desde el punto *c* de ella una magnitud igual á dos metros, por ejemplo, podría, siguiendo el método general, trazar una paralela por el punto *A*, llevar los dos metros de *A* á *d*, unir *d* con *V*, trazar *ae* paralela á *Ad*, y esa sería la distancia que llevaría de *c* á *K*; pero sería lo mismo llevar en *Af* los dos metros, unir *f* con *V* y *ag* sería igualmente la magnitud buscada que llevaría á *cK*.

Recordemos ahora cómo fijamos al final de la lección primera la posición del punto *P* en la fig. 9.<sup>a</sup> y veamos al final de ésta cómo pudiéramos fijarlo con lo que ahora sabemos. Trazaríamos (fig. 33) desde luego la horizontal *h* á la distancia que se nos diera del cuadro, y como entonces la perpendicular al cuadro que pasa por *a*; pero ahora tomaríamos la altura en *MN* (ó en la escala reducida de anchuras) y con *NV* determinaríamos la magnitud *ab* que llevaría sobre la vertical *aK* hasta *P*.

Supongamos que queremos construir ahora el cubo de la lección primera con estos datos. Está apoyado sobre el plano horizontal que pasa por el borde inferior del cuadro; tiene dos caras paralelas á éste, la anterior dista del mismo un metro, la arista del cubo es también igual á un metro y el ojo dista del cuadro tres metros. Las paralelas *ab* y *dc* se pueden trazar directamente (fig. 35), hallando (fig. 34) las magnitudes *ab* y *ac* gráficamente ó numéricamente por estas proporciones:

$$4 : 1 :: 2 : x = 0,50$$

$$5 : 2 :: 2 : x = 0,80.$$

Se llevan al cuadro las alturas 0,50 y 0,80 y se trazan las líneas *ab* y *dc*. Tomo un punto conveniente *A* en el borde del cuadro, llevo un metro de *A* á *B*, uno *A* y *B* con *V* y queda en perspectiva la base *abcd*. Ahora la distancia *ab* es la que tengo que llevar en las verticales *aa*, y *bb*, y la *dc* sobre la *dd*, *cc*, con lo que queda terminada la perspectiva del cubo.

Como se ve, ningún conocimiento nuevo hemos adquirido en esta lección; nos hemos limitado á discutir, á esclarecer lo que sabíamos, ampliando tan sólo, los razonamientos, no los

teoremas, excepción hecha del de la semejanza de triángulos, que hemos recordado, y que ha sido tan fecundo.

No sabemos, pues, más, pero sabemos mejor; y ya se podrá apreciar, cómo cuando se sabe mejor se van soltando los andadores propios de los métodos generales, que si tienen la ventaja de ser siempre aplicables á todos los casos, son en algunos más engorrosos que otros especiales propios de cada uno.

La mejor demostración de cómo se van soltando los andadores á medida que se sabe más, pudiera darla ahora, si no temiera molestaros (y no vendría mal á los que han perdido la lección primera) indicando como, por saber manejar el sencillo teorema de la semejanza de triángulos, podríamos en unos minutos aprender á hallar la perspectiva de un punto, que fué objeto de toda la lección primera, siendo además inútil la de hoy, porque nos hemos propuesto enseñar en ella el modo de que las construcciones gráficas no salgan fuera del cuadro, y por ese procedimiento á que me refero no puede temerse semejante cosa, obteniéndose numéricamente los resultados que se llevan sobre el cuadro.

Sea, en efecto (contra mi propósito, porque no pensaba decir esto; pero sólo os detengo unos minutos) *P* un punto (figura 36) definido por sus distancias al cuadro *C*, al plano vertical *V* y al horizontal *H*, siendo, por lo tanto, conocidas *Bm*, *mh* y *hP*; siendo *O* el ojo, *q* su proyección, *qp* la visual principal y *OP* la visual del punto *P*; bastará calcular las distancias *BA*, que se llevará sobre el borde inferior del cuadro, y *AD* sobre la vertical del punto anteriormente obtenido. Pero *BA* es igual á *BE* más *AE = x*; y como *BE* es igual á la distancia del punto de vista al cuadro, y por tanto, conocida, bastará determinar *x*.

Asimismo *DA = DF = y + FA*, que es la altura del ojo y conocida, por lo tanto, bastando determinar *y*. Pero por la semejanza de los triángulos *qEA* y *qph*  $\frac{x}{ph} = \frac{qE}{pq}$  siendo todas cantidades conocidas, y por la semejanza *ODF* y *OPG*  $\frac{y}{PG} = \frac{OF}{OG} = \frac{qA}{qh} = \frac{qE}{qp}$  en donde sucede lo mismo, luego  $x = \frac{qE}{qp} ph$  é  $y = \frac{qE}{qp} PG$ , siendo para los dos valores común la relación  $\frac{qE}{qp}$ .

(Se continuará.)

AMÓS SALVADOR.

## REVISTA EXTRANJERA

### Prescripciones de seguridad para las instalaciones eléctricas, según la Asociación de los electricistas suizos. (1)

#### G.—LÍNEAS.

Art. 22. En las líneas aéreas, los alambres que se empleen deben comprobarse por medio de ensayos de rotura por tracción, de suerte que presenten una gran seguridad, aun á la temperatura de  $-20^{\circ} \text{C}$ .

Los alambres desnudos para líneas aéreas tendrán por lo menos 3 mm. de diámetro.

(1) Véase el número 2.