

REVISTA DE OBRAS PÚBLICAS

FUNDADA Y SOSTENIDA POR EL CUERPO NACIONAL DE INGENIEROS DE CAMINOS, CANALES Y PUERTOS

NECESARIA PARA TODOS LOS CUERPOS FACULTATIVOS DE OBRAS PÚBLICAS, TORREROS DE FAROS, CONTRATISTAS Y CUANTOS TENGAN RELACIÓN CON AQUELLAS

AÑO XLIII

SERIE 6.ª

Carreteras y caminos vecinales, puentes, ferrocarriles, tranvías, canales,
ríos, riegos, desecamientos, puertos, alumbrado
marítimo, aplicaciones de la electricidad y abastecimiento de aguas.

TOMO I

NÚM. 20.

SE PUBLICA TODOS LOS JUEVES

Redactor-Presidente. Ilmo. Sr. D. Luis Sáinz y Gutiérrez, Inspector general del Cuerpo de Ingenieros de Caminos.
Redactores. Los Sres. Presidentes de las Comisiones regionales de Ingenieros.
D. Luis Gaztelu, Profesor de la Escuela de Caminos.
D. Manuel Maluquer, Ingeniero del mismo Cuerpo, *Secretario*.
Colaboradores. Todos los Ingenieros de Caminos.

Redacción y Administración: Puerta del Sol, 9.—Madrid.

SECCIÓN OFICIAL

MINISTERIO DE FOMENTO

DIRECCIÓN GENERAL DE OBRAS PÚBLICAS

Personal facultativo y de ferrocarriles.

Vistos el art. 37 de la vigente ley de Presupuestos y el Real decreto de 13 de Marzo próximo pasado organizando el personal de Ingenieros mecánicos de las Divisiones de ferrocarriles:

Vistos los expedientes personales de los 16 individuos que en la actualidad desempeñan el expresado cargo:

Considerando que con arreglo á la antigüedad, dentro de la categoría y clases adquiridas como tales Ingenieros mecánicos, deben ingresar en el nuevo Cuerpo los señores D. Alejandro Madrid Dávila, D. Alfredo Boccherini y Calonge, D. Juan Carlos Morillo, D. José Sánchez Solís, don Ricardo Aróstegui y D. Agustín Grima, por el orden enumerado, por tener todos hoy la categoría correspondiente al sueldo de 4.000 pesetas que disfrutaban y antigüedades, dentro de la misma de 9 de Noviembre del 76, 1.º de Abril del 79, 26 de Enero del 82, 1.º de Julio del 82, 25 de Mayo del 87 y 1.º de Agosto del 92, respectivamente, y á continuación los Sres. D. Pedro A. de Aranceta, D. Juan Flórez Llamas, D. José Amorós y Amill, D. Quintín Fernández Morales, D. José María López Jiménez, D. Francisco Ledesma y Alcalá, D. Baltasar Pons, D. Francisco Carlos Estibaús, D. Dimas Cabeza y D. Manuel Rosell, también por el orden en que han sido expresados, por disfrutar en la actualidad 3.500 pesetas de sueldo y tener antigüedades dentro de esta categoría de 5 de Julio del 82, 1.º de Agosto del 82, 1.º de Agosto del 82, 3.º de Octubre del 82, 16 de Octubre del 82, 1.º de Junio del 87, 1.º de Marzo del 88, 1.º de Agosto del 92, 11 de Septiembre del 93 y 14 de Septiembre del 93 respectivamente;

S. M. el Rey (Q. D. G.), y en su nombre la Reina Regente del Reino, ha tenido á bien:

1.º Nombrar Ingeniero mecánico primero, Jefe de Ne-

gociado de primera clase, con el sueldo anual de 6.000 pesetas, á D. Alejandro Madrid Dávila; Ingenieros mecánicos primeros, Jefes de Negociado de segunda clase, con el sueldo anual de 5.000 pesetas, á D. Alfredo Boccherini y Calonge y D. Juan Carlos Morillo; Ingenieros mecánicos primeros, Jefes de Negociado de tercera clase, con el sueldo anual de 4.000 pesetas, á D. José Sánchez Solís, D. Ricardo Aróstegui, D. Agustín Grima y D. Pedro A. de Aranceta; y por último, Ingenieros mecánicos segundos, Oficiales primeros de Administración, con el sueldo anual de 3.500 pesetas, á D. Juan Flórez Llamas, D. José Amorós y Amill, D. Quintín Fernández Morales, D. José María López Jiménez, D. Francisco Ledesma y Alcalá, D. Baltasar Pons, D. Francisco Carlos Estibaús, don Dimas Cabeza y D. Manuel Rosell.

Y 2.º Disponer se publique en la *Gaceta* la presente Real disposición, á fin de que los interesados puedan interponer las reclamaciones que respecto del orden de colocación en que se relacionan estimen procedentes, en el plazo de diez días, contados desde la fecha de la publicación.—(*Gac.* de 15 Mayo 96.)

SECCIÓN DOCTRINAL

POSICIÓN DESFAVORABLE DE LAS CARGAS AISLADAS

SOBRE LAS VIGAS EMPOTRADAS POR SUS EXTREMOS

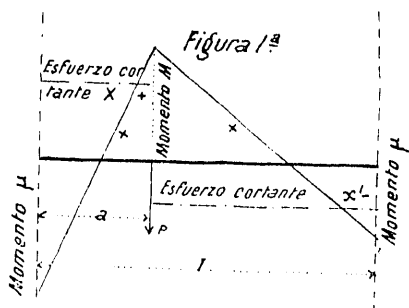
Al estudiar los casos de equilibrio en las vigas empotradas de que vamos á ocuparnos, no pretendemos decir nada nuevo que no sea ya sabido por los lectores de la REVISTA; tratamos sencillamente de consignar algunas fórmulas, mediante las cuales pueda resolverse, desde luego, un problema de situación de cargas que hemos visto resuelto por tanteos en un proyecto de puente metálico muy notable.

Se trata de situar sobre una viga empotrada por

sus extremos un sistema determinado de pesos, de modo que produzcan los mayores esfuerzos de flexión y cortantes.

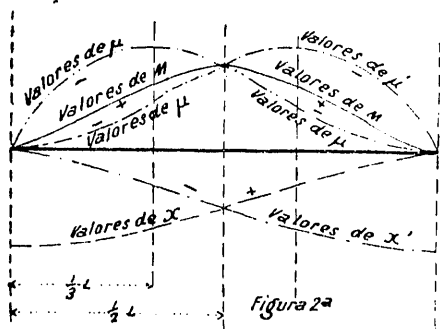
Este problema, estudiado en todos los tratados de Mecánica Aplicada para las vigas apoyadas en sus extremos, no lo hemos visto resuelto en el caso á que se refieren estas notas, y por esto y por habernos llamado la atención sobre él la resolución por tanteos á que nos hemos referido, vamos á tratar de estudiarlo del modo más sencillo y breve que nos sea posible.

Si las cargas se redujeran á un solo peso (fig. 1.^a),



las máximas flexiones se verificarían, como es sabido, en los apoyos con signo negativo; es decir, produciendo extensión por encima de la fibra neutra y compresión por debajo, y en el punto de aplicación del peso con signo positivo. Estos tres momentos, cuando el peso está en el centro de la viga, son iguales, y cuando no sucede esto, es mayor, en valor absoluto, el de empotramiento más próximo al punto de aplicación.

Las leyes de variación de estos esfuerzos y de los



cortantes en función de la abscisa del punto de aplicación de la carga, se expresan gráficamente del modo indicado en la fig. 2.^a y algebraicamente por las siguientes fórmulas:

$$\mu = \frac{P}{l^2} (al^2 - 2a^2l + a^3) \dots (1) \quad \mu' = \frac{P}{l^2} (la^2 - a^3) \dots (2)$$

$$M = \frac{2P}{l^3} (a^3 - 2la^2 + l^2a) \dots (3)$$

$$X = \frac{P}{l^3} (2a^3 - 3la^2 + l^3) \dots (4)$$

$$X' = \frac{P}{l^3} (3a^2l - 2a^3) \dots (5)$$

pudiéndose expresar las tres últimas en función de las primeras del siguiente modo:

$$M = \mu \frac{2a}{l} \dots (6) \quad X = \mu \frac{3a + (l-a)}{la} \dots (7)$$

$$X' = \mu' \frac{3(l-a) + a}{l(l-a)} \dots (8)$$

La discusión de estas fórmulas y de las curvas que representan, es muy sencilla y conocida, por cuya razón no creemos necesario detallarla, consignando sólo la situación y valores de los máximos desde el punto de vista que nos interesa.

El momento de empotramiento μ es máximo para el valor $a = \frac{1}{3}l$ que hace cero su derivada con relación á esta variable. en el apoyo opuesto, μ' es máximo con $a = \frac{2}{3}l$, posición simétrica de la primera. En estos dos casos los momentos son iguales, como es lógico, y valen $\frac{4}{27}Pl$.

El momento positivo M es máximo para $a = \frac{1}{2}l$ y alcanza entonces el valor $\frac{1}{8}Pl$.

Para esta situación de la carga, los valores de μ y μ' son iguales á M y se tiene, por consiguiente,

$$\mu = \mu' = M = \frac{1}{8}Pl.$$

Tiene de notable esta posición, contrariamente á lo que sucede en las vigas apoyadas, que es la más favorable que puede ocupar la carga por ser la que con más igualdad distribuye los esfuerzos y la en que el máximo en valor absoluto es menor.

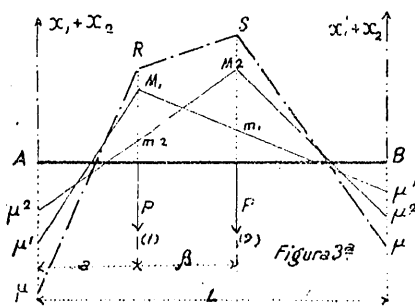
Las reacciones ó esfuerzos cortantes son máximas para $a = 0$ y $a = l$, respectivamente, para la del origen y para la opuesta y valen entonces P la una y 0 la otra.

Resulta de lo expuesto que uno de los momentos de empotramiento es siempre mayor que el máximo positivo y, por lo tanto, que el máximo maximorum se verifica siempre en el apoyo y la situación correspondiente de la carga es la definida por la abscisa $a = \frac{1}{3}l$ ó por la simétrica $a = \frac{2}{3}l$, siendo entonces

$$\text{el valor de la flexión máxima } M = \frac{4}{27}Pl.$$

Si consideramos ahora un sistema de dos pesos, unidos de un modo invariable, caso que se refiere al en que un solo carro pase sobre la vigueta de un punto, fácilmente llegaremos á conclusiones análogas á las deducidas para el caso de un solo peso en cuanto se refiere al valor absoluto de los momentos de flexión; es decir, que el máximo se verifica siempre en los empotramientos y, por lo tanto, que á las variaciones de estos momentos podemos concretarnos al objeto que nos hemos propuesto.

El polígono representativo de las flexiones en cada una de las posiciones de la carga, es de la forma



ma $\mu RS\mu'$, y, por lo tanto, los máximos positivos sólo pueden producirse en uno de los vértices R ó S. A los efectos de la investigación del máximo, nos bastará, pues, examinar lo que sucede en cada uno de estos vértices mientras recorre el sistema de pesos la primera mitad de la viga, porque en el recorrido de la segunda se reproducirán simétricamente los valores encontrados en la primera.

El momento en el apoyo de origen á que nos vamos á referir, será $\mu = \mu_1 + \mu_2$, y los positivos en los puntos de aplicación de los pesos, $M_{(1)} = M_1 + m_2$ y $M_{(2)} = M_2 + m_1$.

Desde luego, $M_{(2)}$ es siempre menor que μ ; pues debiendo considerarse el punto correspondiente, sólo mientras recorre la primera mitad de la viga, hemos visto, en el caso de un solo peso, que siempre $\mu_1 > M_1$ y $\mu_2 > M_2$ y, por lo tanto, $\mu_1 + \mu_2 > M_1 + M_2$ y con mayor razón $\mu > M_2 + m_1$.

En cuanto á $M_{(1)}$ se compone de dos partes: la primera M_1 , menor siempre que μ_1 , y la segunda $m_2 = X_2 a - \mu_2$; la expresión del momento será, pues,

$$M_{(1)} = M_1 + X_2 a - \mu_2.$$

Expresando M_1 y X_2 en función de los momentos parciales de empotramiento, para lo cual bastará hacer uso de las fórmulas (6) y (7) relativas al caso de un solo peso, tendremos:

$$M_1 = \frac{2a}{l} \mu_1 \quad \text{y} \quad X_2 = \frac{3(a + \beta) + l - (a + \beta)}{l(a + \beta)};$$

y sustituyendo en el valor de $M_{(1)}$, resulta:

$$\begin{aligned} M_{(1)} &= \frac{2a}{l} \mu_1 + \frac{3(a + \beta) + l - (a + \beta)}{l(a + \beta)} a \mu_2 - \mu_2 \\ &= \frac{2a}{l} (\mu_1 + \mu_2) - \frac{\beta}{a + \beta} \mu_2, \end{aligned}$$

expresión siempre menor que $\mu_1 + \mu_2$, y que demuestra que el momento de empotramiento más próximo al centro del sistema de pesos es siempre mayor que el máximo positivo.

Tratando nosotros solamente de buscar la posición de cargas que produce el máximo absoluto y el valor de este momento, podemos, en virtud de lo expuesto, concretarnos á estudiar las variaciones del momento de empotramiento, cuyo máximo es el máximo maximorum del sistema.

Haciendo uso del principio de la superposición de los esfuerzos y de la fórmula (1), relativa al caso de un solo peso, tenemos que en el sistema de dos pesos de que nos ocupamos

$$\begin{aligned} \mu &= \mu_1 + \mu_2 = \frac{P}{l^2} (a^3 - 2la^2 + l^2a) \\ &+ \frac{P}{l^2} [(a + \beta)^3 - 2l(a + \beta)^2 + l^2(a + \beta)] \end{aligned}$$

ó lo que es lo mismo:

$$\begin{aligned} \mu &= \frac{P}{l^2} [2a^3 - (4l - 3\beta)a^2 + (3\beta^2 - 4l\beta + l^2)a \\ &+ (\beta^3 - 2l\beta^2 + l^2\beta)]. \quad (9) \end{aligned}$$

Igualando á cero la derivada de esta expresión con relación á la abscisa y deduciendo el valor de a , se obtiene:

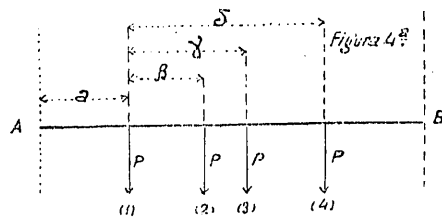
$$a = \frac{2}{3} l - \frac{1}{2} \beta - \sqrt{\frac{1}{9} l^2 - \frac{1}{4} \beta^2} \quad (10)$$

abscisa que define la posición más desfavorable de las cargas, y que llevada á la ecuación (9), cuyos coeficientes son fáciles de calcular, dará el valor del mayor momento de flexión que el sistema de cargas puede desarrollar en la viga.

En el caso de pesos móviles que más generalmente se presenta en la práctica al calcular las viguetas de los puentes, es decir, cuando son cuatro los pesos unidos de un modo invariable dos á dos, la resolución del problema es igualmente sencilla.

Se demuestra del mismo modo que lo hemos hecho en el caso anterior, que el máximo maximorum de los momentos de flexión es el máximo de los que sufre el empotramiento, y este máximo se deduce de modo análogo á como entonces lo hicimos.

Refiriéndonos á la notación de la figura 4.ª, la



expresión de los momentos parciales de empotramiento y de su suma, que es el valor buscado, será como sigue:

$$\mu_1 = \frac{P}{l^2} [a^3 - (2l - 3\beta)a^2 + (\beta^2 - 4l\beta + l^2)a + (\beta^3 - 2l\beta^2 + l^2\beta)];$$

$$\mu_2 = \frac{P}{l^2} [a^3 - (2l - 3\beta)a^2 + (3\beta^2 - 4l\beta + l^2)a + (\beta^3 - 2l\beta^2 + l^2\beta)];$$

$$\mu_3 = \frac{P}{l^2} [a^3 - (2l - 3\gamma)a^2 + (3\gamma^2 - 4l\gamma + l^2)a + (\gamma^3 - 2l\gamma^2 + l^2\gamma)];$$

$$\mu_4 = \frac{P}{l^2} [a^3 - (2l - 3\delta)a^2 + (3\delta^2 - 4l\delta + l^2)a + (\delta^3 - 2l\delta^2 + l^2\delta)];$$

$$\mu = \mu_1 + \mu_2 + \mu_3 + \mu_4 = \frac{P}{l^2} \left[4a^3 - [8l - 3(\beta + \gamma + \delta)] a^2 + [3(\beta^2 + \gamma^2 + \delta^2) - 4l(\beta + \gamma + \delta) + 4l^2] a + [(\beta^3 + \gamma^3 + \delta^3) - 2l(\beta^2 + \gamma^2 + \delta^2) + l^2(\beta + \gamma + \delta)] \right]; \quad (11)$$

La derivada con relación á la abscisa es:

$$\frac{d\mu}{da} = \frac{P}{l^2} \left[12a^2 - [16l - 6(\beta + \gamma + \delta)] a + [(\beta^2 + \gamma^2 + \delta^2) - 4l(\beta + \gamma + \delta) + 4l^2] \right];$$

y el valor de a , que la hace cero,

$$a = \frac{2}{3} l - \frac{1}{4} (\beta + \gamma + \delta) - \sqrt{\frac{1}{9} l^2 - \frac{1}{4} (\beta^2 + \gamma^2 + \delta^2) + \frac{1}{16} (\beta + \gamma + \delta)^2}; \quad (12)$$

Este valor, que define la posición desfavorable de las cargas, sirve para calcular, llevado á la ecuación (11), el mayor momento de flexión que puede producir el sistema sobre la viga.

Con las fórmulas anotadas puede resolverse el problema en los casos más frecuentes de la práctica; pero la solución encontrada puede generalizarse extendiendo las expresiones (11) y (12) al caso de un número cualquiera de pesos iguales, para lo cual bastaría escribirlas del siguiente modo:

$$\mu = \frac{P}{l^2} \left[ma^3 - (2ml - 3(\beta + \gamma + \delta + \dots)) a^2 + (3(\beta^2 + \gamma^2 + \delta^2 + \dots) - 4l(\beta + \gamma + \delta + \dots) + ml^2) a + ((\beta^3 + \gamma^3 + \delta^3 + \dots) - 2l(\beta^2 + \gamma^2 + \delta^2 + \dots) + l^2(\beta + \gamma + \delta + \dots)) \right]; \quad (13)$$

$$a = \frac{2}{3} l - \frac{1}{m} (\beta + \gamma + \delta + \dots) - \sqrt{\frac{1}{9} l^2 - \frac{1}{m} (\beta^2 + \gamma^2 + \delta^2 + \dots) + \frac{1}{m^2} (\beta + \gamma + \delta + \dots)^2}; \dots \quad (14)$$

En estas fórmulas, m representa el número de pesos que se encuentran á la vez sobre la viga, y las demás letras tienen el significado ya conocido de las fórmulas anteriores.

Con lo expuesto creemos haber alcanzado el fin que nos proponíamos en estas notas, cuyo resumen puede concretarse en las siguientes conclusiones:

1.^a Cualquiera que sea el número de pesos que actúen sobre una viga empotrada, el máximo maximorum, en valor absoluto, de los momentos de flexión desarrollados en ella, es el máximo de los producidos en los empotramientos.

2.^a La situación de cargas que produce este momento puede expresarse de un modo general por la fórmula (14), que da el valor de la distancia del primer peso al apoyo considerado en función del núme-

ro m de pesos y de las distancias $\beta, \gamma, \delta, \dots$, etc., de cada uno de ellos al primero.

3.^a El valor absoluto del momento de empotramiento se expresa de un modo general por la fórmula (13), en cuya expresión deben sustituirse los deducidos para a , según la (14), para obtener el máximo valor de las flexiones.

4.^a La máxima reacción ó el mayor esfuerzo cortante se produce en cada apoyo cuando las cargas están lo más cerca posible de él.

Las fórmulas anteriores, aunque aparentemente complicadas en su escritura, son muy fáciles de calcular en la práctica, y los términos constantes, refiriéndose, en el caso más general del cálculo de viguetas, á la batalla y separación de los carros, que varían generalmente muy poco, pueden tenerse calculados de una vez para siempre en los casos más corrientes.

Sevilla, Abril 1896.

J. OCHOA.

REFORMAS DE LOS FORMULARIOS Y PLIEGOS

DE CONDICIONES

Parécenos interesante publicar en la REVISTA los puntos salientes de los informes remitidos por los Ingenieros á quienes la Superioridad, con muy acertado acuerdo, ha consultado sobre el particular.

En el servicio ordinario de provincias se han evidenciado muchas deficiencias de los actuales formularios, y dado su constante manejo pueden formular opiniones concretas sobre ellos.

Entre las provincias que han dedicado á este punto su atención figura, además de las de Burgos y León (1), la de Oviedo, que lo hace con bastante detenimiento, y nos permitimos extractar algunas de las opiniones emitidas, que pueden influir sensiblemente en las mejoras que se trata de introducir en la contratación de las obras públicas.

Procederemos del mismo modo con los informes de otras provincias, rogándoles se sirvan remitirnos artículos sobre el mismo asunto.

OPINIONES DE LOS INGENIEROS DE LA PROVINCIA DE OVIEDO

Expropiaciones.—El artículo 9.^o del Pliego de condiciones generales, establece que los terrenos que han de expropiarse para las obras serán pagados por el contratista con bonificación del 1 por 100 en razón del anticipo del dinero. Esto no se ha llevado aún á la práctica (por lo menos en esta provincia), porque la ley de expropiación no proporciona facilidades para ello. Hay que convenir que los trámites que exige un expediente de expropiación son una gran rémora para el desarrollo de las obras públicas, y que sus inconvenientes deberían tratar de evitarse.

(1) Véanse los números 15 y 18.