

REVISTA DE OBRAS PUBLICAS

FUNDADA Y SOSTENIDA POR EL CUERPO NACIONAL DE INGENIEROS DE CAMINOS, CANALES Y PUERTOS

NECESARIA PARA TODOS LOS CUERPOS FACULTATIVOS DE OBRAS PÚBLICAS, TORREROS DE FAROS, CONTRATISTAS
Y CUANTOS TENGAN RELACIÓN CON AQUÉLLAS

AÑO XLIII

SERIE 6.^a

Carreteras y caminos vecinales, puentes, ferrocarriles, tranvías, canales,
ríos, riegos, desecamientos, puertos, alumbrado
marítimo, aplicaciones de la electricidad y abastecimiento de aguas.

SE PUBLICA TODOS LOS JUEVES

TOMO II

NÚM. 27.

Redactor-Presidente. Ilmo. Sr. D. Luis Sáinz, Inspector general de primera clase del Cuerpo de Ingenieros de Caminos.
Redactores. Los Sres. Presidentes de las Comisiones regionales de Ingenieros.
D. Luis Gaztelu, Profesor de la Escuela de Caminos.
D. Manuel Maluquer, Ingeniero del mismo Cuerpo, *Secretario*.
Colaboradores. Todos los Ingenieros de Caminos.

Redacción y Administración: Puerta del Sol, 9.—Madrid.

SECCION DOCTRINAL

ATENEO DE MADRID

CONFERENCIAS SOBRE ELECTRICIDAD POR EL SR. MADARIAGA, PROFESOR DE DICHA ASIGNATURA EN LA ESCUELA DE MINAS.

III

Terminado el estudio de las unidades del sistema absoluto (C. G. S.), dió comienzo el Sr. Madariaga al de las *fuerzas centrales*. Definió la *fuerza* en general, diciendo que: *era una causa capaz de modificar el estado mecánico de un cuerpo*. Las fuerzas más importantes para nuestro estudio, son las llamadas *centrales*, y dentro de éstas, las *newtonianas*.

Una fuerza se llama *central*, cuando su línea de acción pasa por puntos fijos y su magnitud ó intensidad es función de la distancia que los separa; estos puntos fijos reciben la denominación de *centros de fuerza*.

Las fuerzas centrales reciben el calificativo de *newtonianas*, cuando son inversamente proporcionales al cuadrado de la distancia que separa los centros de fuerza. El nombre de *newtonianas* es debido á que las fuerzas originadas por la atracción universal, descubierta por Newton, dependen del modo antedicho de la distancia que separa los cuerpos. Las atracciones eléctricas y magnéticas son también fuerzas centrales newtonianas. Ahora bien; estas fuerzas no producen su efecto instantáneamente, sino que tarda un cierto tiempo en hacerse patente su influencia; comparando esto con lo que ocurre con las fuerzas que pudiéramos llamar industriales, que emplean un

cierto tiempo en su transmisión, nos vemos inducidos á admitir para las fuerzas físicas la existencia de un cuerpo intermedio, el éter, que desempeñe respecto á ellas, el mismo papel que las correas de transmisión, el aire comprimido, etc., en las fuerzas industriales.

Puso más de manifiesto el Sr. Madariaga esta semejanza en la trasmisión de las fuerzas industriales y de las físicas, por medio de un sencillo ejemplo: sea un tren, contra cuyo vagón de cola viene á chocar una locomotora partiendo de una cierta distancia; los resortes del tope de dicho vagón se contraen, y no pudiendo desarrollarse hacia el lado que está la locomotora, lo verifican en este sentido opuesto, impulsando á dicho vagón contra los toques del penúltimo. Se repite en éste un fenómeno análogo y así sucesivamente hasta llegar al primer vagón, que viene á quedar respecto á su posición primitiva á la misma distancia que el de cola quedó de la suya.

De igual suerte, en el caso de la electrización por influencia, por ejemplo, tenemos un cuerpo que viene á ser la locomotora del caso anterior; la electrización que se le comunica por un medio cualquiera, representa el impulso del caso de la locomotora; la capa de éter que le rodea, es la que recibe directamente la influencia del cuerpo electrizado, resultando por tanto con una cierta carga, que á su vez sirve para electrizar la capa siguiente. Así sucesivamente de capa en capa de éter, será trasmitiendo la electrización hasta resultar influidas las capas que rodean el cuerpo que se quiere electrizar. Como se ve la modificación eléctrica producida en el primer cuerpo se manifiesta en el segundo por intermedio de las capas de éter. Dedúcese de todo esto que la hipótesis del éter solo permite reducir al espacio intermolecular la acción

á distancia, análogamente á lo que ocurre en la transmisión de las fuerzas industriales. Así al tirar de una cuerda para atraer un objeto, la tensión muscular ó mecánica ejercida se transmite al primer elemento de cuerda, de éste al siguiente, etc.

En el estudio que vamos á hacer, designaremos con el nombre de electricidad la causa que, por ejemplo, produce la atracción del péndulo de *módula* de sauco, por una varilla de ámbar, al ser frotada ésta, y diremos que un cuerpo tiene doble, triple, etc., *cantidad, masa ó carga* de electricidad que otro, cuando sus acciones sobre un tercero guardan estas mismas relaciones. Resulta de aquí que si designamos por m y m' las cantidades de electricidad de dos cuerpos en presencia, la acción que entre ellos se desarrolla será proporcional á m y m' ; como además es una fuerza *newtoniana* tendrá por expresión:

$$f = K \frac{mm'}{r^2}.$$

Si una de las masas es la unidad

$$f = K \frac{m}{r^2}.$$

Cuando las dos masas eléctricas son del mismo signo se repelen, y como en este caso la expresión de f es positiva, se conviene en tomar positivas las repulsiones y negativas las atracciones. Para hallar la naturaleza de K basta sustituir las dimensiones de las unidades correspondientes en la fórmula anterior

$$\text{LMT}^{-2} = \text{KM}^2\text{L}^{-2},$$

de donde, para que la fórmula sea homogénea, es necesario que

$$K = [\text{L}^3\text{M}^{-1}\text{T}^{-2}];$$

en el estudio de los dieléctricos, veremos la importancia de este coeficiente de proporcionalidad.

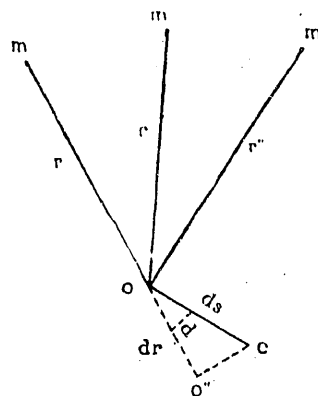
Supongamos que en diversos puntos físicos tenemos concentradas cantidades de agente eléctrico $m, m', m'', \dots$; si colocamos en sus inmediaciones un nuevo punto con la *unidad de masa* positiva, éste será solicitado por fuerzas que emanan de $m, m', m'', \dots$ y que tendrán una cierta resultante de línea de acción, sentido é intensidad determinados que varía, naturalmente, con la posición de la masa unidad considerada. Tendremos, pues, en cada punto del espacio una acción en general distinta. Una región del espacio, caracterizada de este modo, recibe el nombre de *campo de fuerzas*. Es evidente que al desplazamiento de una masa de naturaleza definida entre dos de sus puntos corresponde un trabajo. Cuando el desplazamiento se efectúa bajo la influencia y en la dirección de la fuerza resultante, hay *producción de trabajo*; si el desplazamiento tiene lugar en sentido contrario al de la fuerza, hay *gasto de trabajo*; la dirección de la resultante antedicha es la *dirección del campo* y su magnitud la *intensidad* del mismo.

Claro es que, conocidas las coordenadas de los

puntos $m, m', m'', \dots$, así como las del punto unidad, podemos determinar por medios analíticos las fuerzas

$$K \frac{m}{r^2}, \quad K \frac{m'}{r'^2}, \quad K \frac{m''}{r''^2}, \dots$$

siendo r, r' y r'' las distancias de m, m' y m'' al punto de masa uno, componer estas fuerzas y tener, por tanto, la intensidad del campo en un punto; pero este procedimiento es muy largo y enojoso. Se simplifica considerablemente el problema de hallar la intensidad del campo, por la consideración de una cierta función llamada *potencial*, definida por Laplace y estudiada por Green y Gauss. Para definir esta función imaginemos que la unidad de masa positiva se halla concentrada en O , dentro del campo constituido por las masas $m, m', m'', \dots$, y bajo cuya acción combinada experimenta un desplazamiento $OO' = ds$; este desplazamiento representa un cierto trabajo realizado por la intensidad del campo en O , y como esta intensidad es resultante de las acciones de $m, m', \dots$, sobre la masa unidad, su trabajo será la suma de los trabajos que realizan para ese desplazamiento cada una de las fuerzas centrales.



Llamando r la distancia mo , la fuerza que emana de m , será $\frac{Km}{r^2}$, y el trabajo realizado que la corresponde al pasar su punto de aplicación de o á o' : $\frac{Km}{r^2} ds \cos \alpha$; pero $ds \cos \alpha = OO' = dr$; luego tendremos $\frac{Km}{r^2} dr$.

Repetiendo este razonamiento para las otras masas $m', m'', \dots$, el trabajo elemental realizado será:

$$\frac{Km}{r^2} dr + \frac{Km'}{r'^2} dr' + \frac{Km''}{r''^2} dr'' + \dots = K \Sigma \frac{m}{r^2} dr.$$

Pues bien, se da el nombre de función potencial á la expresión $+ K \Sigma \frac{m}{r^2}$, que suele designarse por

V y cuya diferencial es $dV = - K \Sigma \frac{m}{r^2} dr$. El potencial es, por consiguiente, una función cuya diferencial, tomada con signo contrario, representa el trabajo elemental de la intensidad del campo:

$$(1) \quad -dV = K \Sigma \frac{m}{r^2} dr.$$

Además, $V = +K\Sigma \frac{m}{r}$ expresa que el potencial en un punto es *proporcional a la suma de las relaciones entre las masas que constituyen el campo y sus distancias al punto cuyo potencial se define*. La expresión (1) nos da el trabajo elemental; integrándola entre límites definidos por dos posiciones $0_1, 0_2$ de la masa unidad, tendremos el trabajo finito realizado por la intensidad

$$\int_{V_1}^{V_2} dV = K\Sigma m \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r^2} = V_1 - V_2,$$

siendo V_1 y V_2 los potenciales en 0_1 y 0_2 respectivamente; de aquí se deduce que *el trabajo realizado por las fuerzas del campo, al pasar la unidad de masa positiva de 0_1 a 0_2 , es igual a la diferencia de los potenciales de estos dos puntos*.

Como se ve este trabajo es independiente de la trayectoria recorrida y sólo depende de la posición de los puntos extremos. Si la unidad de masa fuese desde la posición 0_1 a una posición fuera del campo, en donde las acciones $K \frac{m}{r^2} dr$ son nulas; es decir, $r = \infty$, tendremos:

$$\int_{V_1}^{V_\infty} dV = K\Sigma m \int_{r_1}^{\infty} \frac{dr}{r^2} = V_1 - V_\infty;$$

pero $V = +K\Sigma \frac{m}{r}$ es cero cuando $r = \infty$, luego queda:

$$V_1 = K\Sigma m \int_{r_1}^{\infty} \frac{dr}{r^2},$$

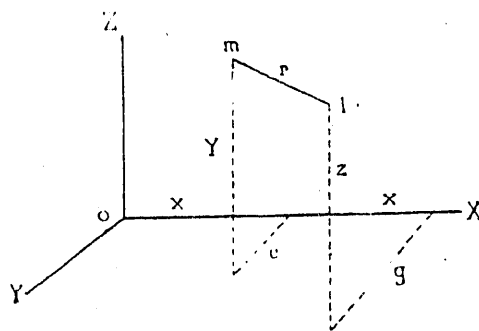
de donde se deduce que el potencial en un punto viene medido por el *trabajo efectuado por las fuerzas del campo para trasladar la unidad de masa positiva desde ese punto al límite del campo*. Esto justifica la denominación de *potencial* que recibe la función V .

Llamando H a la intensidad del campo (que tiene la dirección de ds en la figura anterior), tenemos por la primera definición de potencial:

$$Hds = -dV \quad H = -\frac{dV}{ds},$$

lo cual nos dice que, conocida la dirección del campo, la magnitud de la intensidad es la derivada del potencial respecto a esa dirección, tomada con signo contrario. Resulta, pues, que la intensidad del campo está dirigida en el sentido de los potenciales decrecientes.

Pasemos a demostrar dos propiedades importantes del potencial. Tenemos la masa unidad concentrada en un punto definido por sus tres coordenadas x, y, z y sean m, m', m'' las masas que constituyen el campo; sean (α, β, γ) las coordenadas del punto en que se encuentra concentrada la masa m ; en el punto (x, y, z) habrá un cierto potencial V que variará al cambiar cualquiera de esas coordenadas; en una palabra, $V = f(x, y, z)$; pues bien, vamos a demostrar:



1.º Que las componentes de la intensidad del campo, según los tres ejes x, y, z , en el punto (x, y, z) son iguales, aunque de signo contrario, a las derivadas parciales del potencial con relación a x, y, z respectivamente, particularizadas en cada caso por los valores correspondientes de dichas coordenadas. En efecto, sabemos que $V = +K \frac{m}{r}$, de donde:

$$\frac{dV}{dx} = -K\Sigma \frac{m}{r^2} \frac{dr}{dx}$$

$$\frac{dV}{dy} = -K\Sigma \frac{m}{r^2} \frac{dr}{dy}$$

$$\frac{dV}{dz} = -K\Sigma \frac{m}{r^2} \frac{dr}{dz}$$

pero $r^2 = (x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 + (z - \gamma)^2$, luego

$$2r \frac{dr}{dx} = 2(x - \alpha)$$

y

$$\frac{dr}{dx} = \frac{x - \alpha}{r};$$

análogamente

$$\frac{dr}{dy} = \frac{y - \beta}{r}$$

$$\frac{dr}{dz} = \frac{z - \gamma}{r}$$

Sustituyendo, queda:

$$\frac{dV}{dx} = -K\Sigma \frac{m}{r^2} \frac{x - \alpha}{r}$$

$$\frac{dV}{dy} = -K\Sigma \frac{m}{r^2} \frac{y - \beta}{r}$$

$$\frac{dV}{dz} = -K\Sigma \frac{m}{r^2} \frac{z - \gamma}{r}$$

Pero la acción de m sobre 1 vale $K \frac{m}{r^2}$ y proyectándola sobre el eje x , $K \frac{m}{r^2} \frac{x - \alpha}{r}$ (pues $\frac{x - \alpha}{r}$ es el coseno del ángulo que forma ml con dicho eje); por tanto, $K\Sigma \frac{m}{r^2} \frac{x - \alpha}{r}$ será la componente según el eje x de la intensidad, y llamándola X resulta:

$$X = -\frac{dV}{dx}$$

Análogamente:

$$Y = - \frac{dV}{dy}$$

$$Z = - \frac{dV}{dz}$$

2.º Que la suma de las derivadas segundas del potencial es nula; es decir, que

$$\frac{d^2V}{dx^2} + \frac{d^2V}{dy^2} + \frac{d^2V}{dz^2} = 0.$$

En efecto, basta tan sólo constituir dicha función; tenemos:

$$\frac{dV}{dx} = -K \sum m (x - \alpha) r^{-5}$$

$$\frac{dV}{dy} = -K \sum m (y - \beta) r^{-5}$$

$$\frac{dV}{dz} = -K \sum m (z - \gamma) r^{-5}$$

de donde

$$\frac{d^2V}{dx^2} = -K \sum m \left[r^{-5} - 3(x - \alpha) r^{-4} \frac{dr}{dx} \right]$$

$$= -K \sum m \left[r^{-5} - 3(x - \alpha) r^{-4} \frac{x - \alpha}{r} \right]$$

$$= -K \sum m r^{-5} \left[1 - 3r^{-2} (x - \alpha)^2 \right];$$

análogamente

$$\frac{d^2V}{dy^2} = -K \sum m r^{-5} \left[1 - 3r^{-2} (y - \beta)^2 \right]$$

$$\frac{d^2V}{dz^2} = -K \sum m r^{-5} \left[1 - 3r^{-2} (z - \gamma)^2 \right],$$

sumando miembro á miembro y teniendo en cuenta la relación $r^2 = (x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 + (z - \gamma)^2$, resulta:

$$\frac{d^2V}{dx^2} + \frac{d^2V}{dy^2} + \frac{d^2V}{dz^2}$$

$$= -K \sum m r^{-5} \left[3 - 3r^{-2} r^2 \right] = -K \sum m r^{-5} [3 - 3] = 0.$$

Según queríamos demostrar. La expresión

$$\frac{d^2V}{dx^2} + \frac{d^2V}{dy^2} + \frac{d^2V}{dz^2} = 0$$

recibe el nombre de ecuación de Laplace por haber figurado en su estudio sobre la atracción universal.

E. HORSTMANN.

A. CASADESÚS.

Alumnos de la clase de Electricidad de la Escuela de Caminos.

INFORME

SOBRE EL ANTEPROYECTO DE FERROCARRIL ELÉCTRICO ENTRE PAMPLONA, ESTELLA Y LOGROÑO, REDACTADO POR LA JUNTA TÉCNICA DE LOS FERROCARRILES DE NAVARRA (1).

Hemos experimentado una verdadera satisfacción al leer el anteproyecto de ferrocarril movido por electricidad entre Pamplona, Estella y Logroño, presentado á la Excm. Diputación por nuestro compañero D. Emilio Azarola; anteproyecto en el que revela su autor mucha laboriosidad y sólidos conocimientos en materia de ferrocarriles, y especialmente en la aplicación de la energía eléctrica á la tracción.

Informar este proyecto es difícil misión; por lo tanto tememos que nuestro trabajo sea deficiente; á pesar de esto manifestaremos nuestra sincera opinión, puesto que la Excm. Diputación se ha dignado pedirnosla.

Empieza el Sr. Azarola, en su luminoso escrito, por explicar con una claridad grande la necesidad que sienten los pueblos de una red de fáciles vías de comunicación, á fin de verter sus productos en los centros comerciales de primer orden, porque es indudable que los que carecen de estos medios, quedándose completamente aislados, no disfrutan de los inmensos beneficios que gozan los que están relacionados con los grandes núcleos sociales.

La misión de proporcionar estos lazos de unión corresponde en este caso concreto á la Excm. Diputación Foral, que es la cabeza de la provincia; por eso, conociendo muy bien los deberes que debe cumplir, hace mucho tiempo que viene estudiando con especial solicitud la manera de resolver este difícil problema.

Se trata luego en el anteproyecto del punto más difícil en materia de ferrocarriles, y es la determinación del ancho de vía que debe adoptarse.

Son tantos los factores que entran en la resolución de este problema y tantas las cantidades desconocidas, que no es posible, en la inmensa mayoría de los casos, determinar á priori la solución mejor; por eso, como dice muy bien el Sr. Azarola, se han sufrido tantos desengaños, á pesar de haberse propuesto soluciones basadas en estudios profundos hechos por eminentes Ingenieros. Nosotros no nos atreveríamos á fijar hoy el ancho que conviene adoptar para la red general de ferrocarriles de Navarra, si sólo nos limitáramos á tomar como base para resolver este punto el coste kilómetro de las obras y la importancia del tráfico probable, porque es evidente, que existen ferrocarriles de un ancho de vía muy reducido que han desarrollado un tráfico verdadera-

(1) Habiendo publicado la Revista, en los números 14, 15 y 16, el trabajo del Sr. Azarola, nos creemos en el caso de dar á conocer á nuestros lectores, para que puedan juzgar por sí mismos el pro y el contra de esta interesante cuestión, el adjunto dictamen que acaba de ver la luz pública en Pamplona.—(Nota de la Redacción.)