

REVISTA DE OBRAS PUBLICAS

FUNDADA Y SOSTENIDA POR EL CUERPO NACIONAL DE INGENIEROS DE CAMINOS, CANALES Y PUERTOS

NECESARIA PARA TODOS LOS CUERPOS FACULTATIVOS DE OBRAS PÚBLICAS, TORREROS DE FAROS, CONTRATISTAS
Y CUANTOS TENGAN RELACIÓN CON AQUELLAS

AÑO XLIII

SERIE 6.^a

Carreteras y caminos vecinales, puentes, ferrocarriles, tranvías, canales,
ríos, riegos, desecamientos, puertos, alumbrado
marítimo, aplicaciones de la electricidad y abastecimiento de aguas.

TOMO II

NÚM. 24.

SE PUBLICA TODOS LOS JUEVES

Redactor-Presidente... Ilmo. Sr. D. Luis Sáinz, Inspector general de primera clase del Cuerpo de Ingenieros de Caminos.
Redactores..... Los Sres. Presidentes de las Comisiones regionales de Ingenieros.
D. Luis Gaztelu, Profesor de la Escuela de Caminos.
D. Manuel Maluquer, Ingeniero del mismo Cuerpo, *Secretario*.
Colaboradores..... Todos los Ingenieros de Caminos.

Redacción y Administración: Puerta del Sol, 9.—Madrid.

SECCION DOCTRINAL

ATENE0 DE MADRID

CONFERENCIAS DEL SEÑOR ECHEGARAY

Encargado el ilustre Ingeniero de Caminos don José Echegaray de explicar un curso, acerca de algún punto de las matemáticas, en la Escuela de Estudios superiores creada por el Ateneo, ha elegido para tema de sus lecciones el siguiente: *Resolución de las ecuaciones de grado superior y teoría de Galois*. No sabemos cuáles son los motivos que han inducido al Sr. Echegaray á elegir este tema con preferencia á otros menos áridos que él; pero es casi seguro que no tuvieron pequeña parte en la elección dos importantes consideraciones. La una es el deseo de que nuestra nación, ya que por causas de todos conocidas no puede contribuir con trabajos propios al adelantamiento de las ciencias, no quede en atraso lamentable respecto al conocimiento de lo que en otras partes se trabaja. Por lo que se refiere á cuestiones de Análisis, los programas de nuestros centros docentes se conservan en el mismo estado en que se hallaban medio siglo há; y si bien en las Escuelas de Ingenieros se exigen algunos conocimientos algo relacionados con los nuevos descubrimientos científicos, esos conocimientos son adquiridos por quien no ha de cultivar la ciencia por la ciencia, sino la ciencia en sus aplicaciones. El deseo del Sr. Echegaray de dar á conocer los trabajos realizados en el extranjero, en punto á la resolución algebraica de las ecuaciones, es digno de las mayores alabanzas y del profundo reconocimiento de todos los que se interesan por el

progreso de las matemáticas. La otra consideración á que nos referíamos anteriormente, es de otra naturaleza: el Sr. Echegaray, en quien se juntan amigablemente la ciencia y el arte, es partidario entusiasta de todo lo dramático, de todo lo emocional, y si la vida de Ábel, por lo que tuvo de dramática, le determinó á dárnosle á conocer con el justo sobrenombre del Newton del Norte, ¿cómo no había de elegir para tema de sus conferencias el que tan íntimamente se relaciona con los trabajos de Galois, de aquel adolescente que tuvo tan trágico fin, de aquel exaltado en materias políticas que á los veintiún años de edad había echado los cimientos de la nueva Álgebra, viendo con los ojos de la adivinación—ya que no es fácil concebir que lo hiciera con los de la razón serena—lo que no supieron ver los más eminentes matemáticos, el mismo Ábel entre ellos!

El Sr. Echegaray hubiera deseado poder entrar inmediatamente en materia, hubiera querido que la ciencia, alcanzada la suma perfección, pudiera ser enseñada y comprendida sin recurrir al estudio de los detalles que, formando encadenamientos de verdades particulares, sirven de pedestal para alcanzar las verdades generales. Esos detalles son ciertamente bellos adornos de estas verdades y hasta dan á la ciencia un carácter de grandeza que se compadece muy bien con ella; pero no es menos cierto que dificultan el estudio é introducen complicación donde debe reinar la sencillez. Ese estado de suma perfección á que se refería el Sr. Echegaray no ha sido alcanzado todavía; es posible que no se le pueda alcanzar nunca; en efecto, si cada hombre tuviera en su cerebro un número suficiente de verdades evidentes ó axiomas para que recurriendo sólo á ellos pudiera comprender todas las verdades, se habría llegado á la deseada perfección,

pero es difícil saber si es posible ó no poseer ese número de axiomas ó si influye en la cuestión no solamente nuestro entendimiento, sino también la misma naturaleza de la ciencia. Nada sabemos respecto de este punto; lo cierto es que hoy por hoy habremos de limitarnos á exponer nuestros conocimientos continuando el encadenamiento de los que les sirven de base.

El objeto de las conferencias es la exposición de la teoría de Galois para la resolución de las ecuaciones de grado superior. Para comprender esta teoría es preciso estudiar parte de la teoría de las sustituciones; y aquí vemos cómo en este caso especial marchan enlazadas las dos cuestiones que constituyen el objeto de las matemáticas. Una de ellas es la referente á la *cantidad*, la resolución de las ecuaciones; la otra es la teoría de las sustituciones, auxiliar de la anterior, que se refiere al *orden*.

El problema de la resolución de las ecuaciones se va complicando á medida que aumenta el grado de la ecuación; la complicación depende de que el valor de la incógnita en cada ecuación es de mayor grado de transcendencia que el primer miembro de aquella. La fórmula que da los valores de x en la ecuación de segundo grado, es fraccionaria é irracional, y el primer miembro de la ecuación es entero; en la ecuación de tercer grado, los valores de x son más complicados; lo son más aún en la ecuación de cuarto grado, y al llegar á la de quinto nos encontramos con que los valores de x no pueden ser expresados por los símbolos ordinarios del Álgebra; la resolución de esa ecuación es imposible por medio de radicales, como han demostrado Ábel y Galois; no se la ha podido resolver hasta que se creó un nuevo símbolo, la función elíptica. Si el grado de la ecuación aumenta, la dificultad no se puede dominar sino en casos particulares, cuando existan ciertas relaciones entre los coeficientes.

Todos los autores que tratan este asunto de la resolución algebraica de las ecuaciones, empiezan demostrando el teorema fundamental que dice que, *toda ecuación algebraica, entera y racional, con coeficientes reales ó imaginarios, tiene por lo menos una raíz de la forma $a + b\sqrt{-1}$* . Aunque el Sr. Echegaray suponía que todos los que le escuchaban sabían demostrar este teorema, consideró conveniente dar una demostración de él, á su juicio la más sencilla que se conoce.

Se supone que el teorema es cierto para toda ecuación de grado $m - 1$ y se demuestra que lo es también para la de grado m . Con esto basta para demostrar el teorema, llamado de Cauchy, pues hay un punto de partida, la ecuación de primer grado, que tiene siempre una raíz.

El polinomio de grado m puede escribirse bajo la forma siguiente:

$$x(x^{m-1} + p_1x^{m-2} + \dots + p_{m-1}) + p_m = 0.$$

Si se iguala á cero el polinomio comprendido por el paréntesis se formará una ecuación de grado $m - 1$

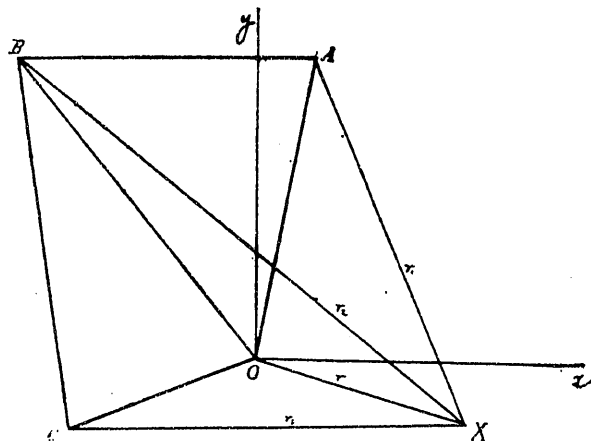
que, según la hipótesis admitida, tendrá por lo menos una raíz real ó imaginaria; sabiendo que tiene una raíz fácil es demostrar que tiene $m - 1$, y que su primer miembro es un producto de factores lineales correspondientes á las raíces; representando éstas por $a, b, c, \dots, l$, la ecuación anterior se escribirá de este modo:

$$x(x - a)(x - b) \dots (x - l) + p_m = 0.$$

Designemos por r y ω , r_1 y ω_1 , r_2 y ω_2 , $\dots$, r_{m-1} y ω_{m-1} , r' y ω' los módulos y argumentos de las cantidades x , $x - a$, $x - b$, $\dots$, $x - l$ y p_m . La ecuación tomará esta otra forma:

$$\begin{aligned} & r r_1 r_2 \dots r_{m-1} [\cos(\omega + \omega_1 + \omega_2 + \dots + \omega_{m-1}) \\ & + \sin(\omega + \omega_1 + \omega_2 + \dots + \omega_{m-1}) \sqrt{-1}] \\ & + r' (\cos \omega' + \sin \omega' \sqrt{-1}) = 0; \end{aligned}$$

r' y ω' son constantes, todas las demás cantidades que entran en esta ecuación son funciones de r y ω ; para demostrar lo que nos proponemos basta probar que r y ω pueden ser tales que la suma $\omega + \omega_1 + \omega_2 + \dots + \omega_{m-1}$ y el producto $r r_1 r_2 \dots r_{m-1}$ sean respectivamente iguales á $\omega' + \pi$ y r' . Para probar esto hay que recurrir á la representación geométrica.



Tracemos los radios vectores OA, OB, OC, $\dots$ que representan las raíces $a, b, c, \dots$. Los extremos de estos vectores y el origen O nos representan las raíces de la ecuación

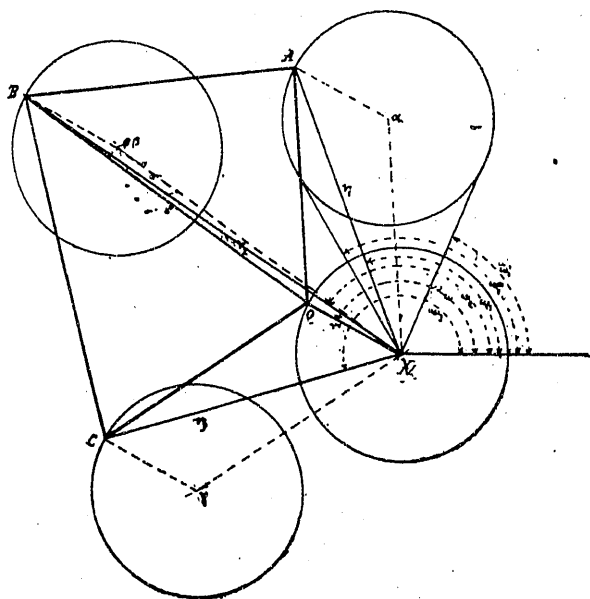
$x(x - a)(x - b) \dots (x - l) = 0$. Trazando las rectas que unen los puntos mencionados tendremos el polígono OABC $\dots$. Sea X el punto que representa el factor x . Las rectas XO, XA, XB, $\dots$ representarán los factores $x, x - a, x - b, \dots, x - l$ y sus módulos y argumentos serán respectivamente r y ω , r_1 y ω_1 , r_2 y ω_2 , $\dots$, r_{m-1} y ω_{m-1} . Si el punto X cambia de posición, las rectas XO, XA, XB, $\dots$ cambiarán de longitud y de inclinación; las expresiones

$$\omega + \omega_1 + \omega_2 + \dots + \omega_{m-1} \text{ y } r r_1 r_2 \dots r_{m-1}$$

cambiarán de valor, y si se demuestra que es posi-

ble que el punto X tome una posición tal que las expresiones anteriores sean respectivamente iguales á $\omega' + \pi$ y r' , quedará demostrado el teorema.

Para probar esto supongamos que en vez de que dar fijo el polígono OABC...O y moverse el punto X describiendo una trayectoria cualquiera, sucede lo contrario; queda fijo el punto X y se mueve el polígono.



Demos á r un valor constante cualquiera; el punto O describirá una circunferencia cuyo centro será X; el punto A describirá otra circunferencia cuyo centro es el punto α y cuyo radio αA es igual á r ; las circunferencias descritas por los otros vértices del polígono móvil serán también de radio r . El ángulo ω varía desde $+\infty$ hasta $-\infty$; ω_1 varía entre dos límites finitos que son los ángulos correspondientes á las tangentes trazadas desde X á la circunferencia de centro α ; varían también entre límites finitos

$$\omega_2, \omega_3, \dots, \omega_{m-1},$$

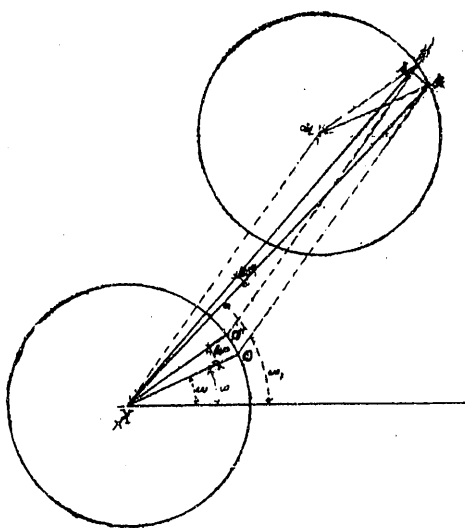
luego la función

$$\omega + \omega_1 + \omega_2 + \dots + \omega_{m-1}$$

para $\omega = +\infty$ toma el valor $+\infty$ y para $\omega = -\infty$ toma el $-\infty$; como esta función es *continua* y varía entre $+\infty$ y $-\infty$, pasará por todos los valores posibles y habrá un valor de ω , para el cual la función será igual á $\omega' + \pi$. Resulta, pues, que para cada valor de r es posible hacer que se verifique la primera condición; sólo nos falta demostrar que es posible encontrar un valor de r para el cual la otra función $r, r_1, r_2, \dots, r_{m-1}$ sea igual á una cantidad positiva r' ; esto es fácil de probar. Como todos los módulos son finitos cuando lo es r , resulta que el producto de ellos se anula para $r = 0$; se hace además infinito para $r = \infty$, y como también ésta es función *continua*, es posible hacerla igual á un número dado r' ; y esto cualquiera que sea ω .

La demostración se funda, como vemos, en la continuidad de las dos funciones formadas por los

módulos y los argumentos. Que la primera función es continua es evidente; es un producto de un número finito de factores continuos. No deja de ser evidente que la suma de los argumentos es también una función continua; pero no lo es tanto como el producto, por lo cual conviene demostrar esa continuidad.

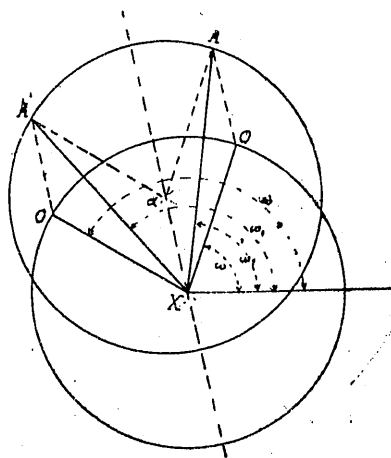


Sea XO el radio cuyo argumento es ω ; el argumento de XA es ω_1 ; dando á ω un incremento $\Delta\omega$, el incremento correspondiente de ω_1 será el ángulo $\Delta\omega_1$, indicado en la figura, que tiene por medida, en la circunferencia de radio XA, el arco AA_1 ; este arco, en el triángulo AA_1A' , tiene por valor

$$AA_1 = AA' \cos A = R \Delta\omega \cos A,$$

siendo R el radio αA ; resulta, pues, que AA_1 es un infinitamente pequeño del mismo orden que $\Delta\omega$, pues $\cos A$ está siempre comprendido entre $+1$ y -1 ; luego la suma de los argumentos es también una suma de cantidades continuas en número finito; es, por tanto, continua.

La demostración del teorema de Cauchy se funda, además, en que la suma de los argumentos se hace igual á $+\infty$ ó á $-\infty$ para los mismos valores de ω ,



pues esta variable puede variar entre estos límites, mientras los demás sumandos se conservan finitos. Sin embargo, hay un caso particular en que los demás sumandos pueden ser también infinitos, y entonces parece que la demostración anterior no puede aplicarse.

Este caso se presenta cuando una de las circunferencias descritas por uno de los vértices del polígono envuelve al punto fijo X; entonces no solamente ω varía entre $+\infty$ y $-\infty$; varía también entre los mismos límites el argumento ω_1 . Pero es fácil ver que aun en este caso es cierto el razonamiento hecho anteriormente y lo es hasta con mayor motivo. La figura anterior representa el caso particular de que hablamos; el punto X resulta ser interior á la circunferencia que describe el vértice A. Trazando la línea de los centros vemos que, cuando el punto A está á la derecha de esa línea, el ángulo ω es menor que ω_1 , y cuando A está á la izquierda, ω es mayor que ω_1 ; resulta de aquí que ω_1 puede escribirse bajo la forma $\omega_1 = \omega + \varphi$, siendo φ un ángulo positivo ó negativo, pero finito; es nulo cuando el punto A está sobre la línea de los centros, y nunca llega á valer 90° . La suma $\omega + \omega_1$ se convierte en $2\omega + \varphi$ y la suma total en

$$n\omega + \varphi + \varphi_1 + \varphi_2 + \dots + \varphi_{n-1} + \omega_\alpha + \omega_\beta + \dots$$

siendo $n-1$ el número de circunferencias que comprenden el punto X; como

$$\varphi, \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{n-1}, \omega_\alpha, \omega_\beta, \dots$$

con cantidades finitas en número finito, resulta que la suma anterior, para ω igual á $+\infty$ y á $-\infty$, toma estos mismos valores.

La demostración es, pues, completamente general.

De este teorema se deducen dos consecuencias muy importantes: la primera es que toda ecuación de grado m tiene m raíces, y la segunda consiste en que si una ecuación de grado m se satisface por más de m valores, es idéntica; es decir, todos sus coeficientes son iguales á cero.

El Sr. Echegaray supone conocidos, no sólo los teoremas enunciados, sino todos los de la teoría general de las ecuaciones. Supone que también se conoce la teoría de las funciones simétricas. Respecto de esta clase de funciones recordó el teorema de Newton, que dice: toda función simétrica algebraica, entera y racional de las raíces de una ecuación, puede expresarse en función racional de los coeficientes. Dijo que el estudio de las funciones simétricas fraccionarias se reduce al de las enteras, porque las funciones fraccionarias, después de reducidas á un denominador común á toda la función, se descomponen en funciones *simétricas* enteras. Esta observación tiene más importancia que la que se le atribuye á primera vista; parece una propiedad evidente y no lo es.

Después de indicar á grandes rasgos el método de Newton, que se estudia en todos los tratados de Álgebra superior, expuso otro método más general que el anterior. Este método permite determinar cual-

quier función simétrica de las raíces en función de los coeficientes sin tener que distinguir que la función dada sea uniforme ó poliforme como era preciso hacer en el método de Newton. Basta decir que el nuevo método, no indicado en todas las Álgebras, abarca el problema en toda su generalidad, para saber quién es su autor: Cauchy. Este insigne matemático, cuyas concepciones siempre nuevas y asombrosas llegaron á poner temor en el ánimo del gran Lagrange, es el autor del método á que nos hemos referido y que está fundado en el siguiente principio: sea $S(a, b, c, \dots l)$ una función simétrica de las raíces de la ecuación

$$x^m + p_1 x^{m-1} + p_2 x^{m-2} + \dots + p_m = 0;$$

si de la función simétrica se han eliminado, por cualquier procedimiento, todas las raíces menos una, la l , por ejemplo, ésta puede eliminarse inmediatamente; en efecto, dividiendo la función S por el resultado de poner l en vez de x en la ecuación anterior y llamando Q y R al cociente y al resto, se tiene:

$$S(a, b, c, \dots l) = (l^m + p_1 l^{m-1} + \dots + p_m) Q + R = R,$$

puesto que el paréntesis es nulo. R es á lo más de grado $m-1$ en l ; será de la forma

$$R = S(a, b, c, \dots l) = q_0 l^{m-1} + q_1 l^{m-2} + \dots + q_{m-1}$$

de donde

$$q_0 l^{m-1} + q_1 l^{m-2} + \dots + q_{m-2} l + q_{m-1} - S(a, b, c, \dots l) = 0.$$

Repitiendo con las demás raíces lo que se ha dicho de l se llegará siempre á la ecuación anterior, en la cual sólo variará l , que será sustituida por las demás raíces; resulta de aquí que la ecuación anterior, de grado $m-1$, se verifica por m valores de la variable; es, pues, idéntica. Igualando á cero el término independiente, resulta:

$$S(a, b, c, \dots l) = q_{m-1},$$

quedando eliminada la raíz l , puesto que q_{m-1} no depende de ella.

De este principio se deduce que si, por ejemplo, tenemos una función simétrica de las dos raíces a y b de una ecuación y podemos determinar una de estas raíces por medio de otra ecuación, sustituyendo en la función simétrica el valor de esta raíz, podremos conocer la función eliminando por el método que indica el principio anterior la raíz que queda en la función simétrica. De aquí se deduce que para hallar una función simétrica de las raíces de la ecuación de grado m $X = 0$, no hay más que dividir X y los cocientes sucesivos por $x - a$, $x - b$, $\dots$; así se obtendrán los polinomios $X_1, X_2, X_3, \dots, X_{m-1}$, cuyos grados van disminuyendo de unidad en unidad hasta llegar al polinomio último, que es de primer grado. La función simétrica de las raíces de la ecuación $X = 0$, $S(a, b, c, \dots l)$ es también función simétrica de $b, c, \dots l$; de $c, \dots l$; $\dots$; de k, l . Los coefi-

cientes de $X_1, X_2, \dots, X_{m-1}$ son funciones de los coeficientes de la ecuación dada y de algunas de las raíces $a, b, c, \dots, l$. Sustituyendo en la función simétrica $S(k, l)$ en vez de l el valor deducido de la ecuación $X_{m-1} = 0$, obtendremos una función en k , de la cual se elimina esta raíz dividiendo la función por el resultado de poner k en vez de x en la ecuación $X_{m-2} = 0$; sacando luego de esta ecuación el valor de k — lo que se hace fácilmente, pues ya conocemos l — se sustituyen los valores de k y l en la función $S(k, l)$ y queda una función en k , á la cual se aplica otra vez el principio general, y así se continúa hasta llegar á la función simétrica dada.

El Sr. Echegaray expuso, para terminar lo relativo á las funciones simétricas, un procedimiento general para determinar una función simétrica cualquiera de las raíces de una ecuación $f(x) = 0$. Escribiendo las m condiciones

$$f(x_1) = 0, f(x_2) = 0, \dots, f(x_m) = 0,$$

y representando por z el valor de la función simétrica,

$$z = S(x_1, x_2, \dots, x_m),$$

se obtiene un sistema de $m+1$ ecuaciones con las $m+1$ incógnitas $z, x_1, x_2, \dots, x_m$. Eliminando las m raíces de la ecuación dada se obtiene una función entre z y los coeficientes de $f(x) = 0$; despejando z se obtiene el valor de la función simétrica. La ecuación en z parece que ha de ser de un grado muy elevado, puesto que el producto de los grados de las ecuaciones será un número muy grande; pero siendo z una función simétrica, el grado de la eliminante es muy reducido; en efecto, la teoría de las sustituciones nos indica que el grado de aquella ecuación será igual al número de valores que tome la función $S(x_1, x_2, \dots, x_m)$ cuando en ella se hagan todas las sustituciones posibles, que son $m!$. Pero la función S no cambia de valor cuando se sustituyen unas letras por otras; la ecuación en z será, pues, de primer grado.

No se crea que por ser tan pequeño el grado de la eliminante se puede llegar á ella fácilmente. La eliminación de las m raíces es una operación complicadísima y generalmente imposible de realizar. El método general que indicó el Sr. Echegaray es puramente teórico; tiene la ventaja de darnos idea clara del problema, comprendiéndole en toda su generalidad. Los métodos especiales de Newton y de Cauchy se reducen á ingeniosos artificios, para hacer posible y hasta fácil la eliminación que hemos indicado.

Aparte de la ventaja señalada en este método* general, nos revela hasta qué punto el poderoso entendimiento del Sr. Echegaray penetra y profundiza los asuntos que estudia. Este método general que, como vemos, no puede ser más sencillo, debió ser ideado, á juicio del Sr. Echegaray, por cualquiera que supiese la teoría de las ecuaciones. No lo ha sido, sin embargo, hasta que ese *cualquiera* á que él se refería fué el mismo Echegaray.

Hemos expuesto con toda la brevedad posible todas aquellas cuestiones de Álgebra que el Sr. Echegaray consideraba indispensables para poder comprender las teorías objeto del curso.

Debemos entrar ya en materia, estudiando de la teoría de las sustituciones la parte estrictamente indispensable para poder comprender la teoría de Galois.

Hemos llegado al punto en que terminan los conocimientos de todas aquellas personas que sólo se se ocuparon en el estudio de la parte del Álgebra que se exige en nuestros programas oficiales. De aquí en adelante será nuevo para ellas todo lo que diga el Sr. Echegaray. Con objeto de no hacer tan brusca la transición de las antiguas á las nuevas teorías, creyó conveniente el ilustre profesor preparar el paso á las nuevas ideas y á los métodos nuevos, mostrando que la teoría de las sustituciones no es puramente abstracta, sino que tiene aplicaciones de tan grande importancia, que de ella depende la resolución de las ecuaciones, que ella es quien ha descubierto los extensos horizontes que ahora se ven en la teoría de las ecuaciones, que es, en fin, la que permitió á Galois adivinar aquellas cosas, nunca hasta entonces por otro alguno pensadas, que le encaramaron á la altura de los grandes matemáticos.

Para mostrar la importancia de aquella teoría, indicó el Sr. Echegaray los diversos procedimientos que se conocen para resolver las ecuaciones de segundo, tercero y cuarto grado, exponiendo, como generalización de ellos, el método de Lagrange.

Las dos ecuaciones que ligan las raíces y los coeficientes de la ecuación de segundo grado, sirven para determinar aquellas raíces; pero al resolver el sistema formado por esas ecuaciones se llega á otra ecuación de segundo grado; de suerte que no es posible conocer esas raíces partiendo del sistema mencionado. Si la ecuación de segundo grado que forma parte de tal sistema, pudiera ser sustituida por otra de primero, quedaría salvada la dificultad.

Una de las ecuaciones que forman el sistema es $x_1 + x_2 = -p$; sea la otra $x_1 + Ax_2 = z$, siendo A una constante indeterminada. Si conociésemos z se determinaría inmediatamente x_1 y x_2 , resolviendo el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -p \\ x_1 + Ax_2 = z \end{cases}$$

Con las dos raíces pueden hacerse dos sustituciones: la

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_1 & x_2 \end{pmatrix}$$

que es la llamada, *idéntica* y la

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_2 & x_1 \end{pmatrix}$$

que es la invertida. El número de valores de z es, pues, dos, que son

$$\begin{cases} x_1 + Ax_2 = z_0 \\ x_2 + Ax_1 = z_1 \end{cases}$$

La ecuación que nos permite hallar z será
 $(z - z_0)(z - z_1) = (z - x_1 - Ax_2)(z - x_2 - Ax_1) = 0.$

Ordenando resulta:

$$z^2 - (A + 1)(x_1 + x_2)z + (x_1 + Ax_2)(x_2 + Ax_1) = 0.$$

Esta ecuación es también de segundo grado, y parece que llegamos á un resultado ilusorio; pero podemos disponer de A de modo que la ecuación se simplifique y pueda resolverse fácilmente; haciendo que desaparezca el segundo término resulta $A = -1$ y la ecuación toma la forma

$$z^2 - (x_1 - x_2)^2 = 0.$$

El término conocido es una función simétrica de x_1 y x_2 ; puede, pues, expresarse en función de p y q . Uno de los métodos que puede seguirse para expresar $(x_1 - x_2)^2$ en función de los coeficientes es el siguiente:

$$(x_1 - x_2)^2 = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 = p^2 - 4q.$$

La ecuación en z , que se llama la *resolvente*, es, pues,

$$z^2 = p^2 - 4q.$$

El problema está resuelto: no hay sino hallar x_1 y x_2 en el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -p \\ x_1 - x_2 = \pm \sqrt{p^2 - 4q} \end{cases}$$

Se obtiene para x los valores

$$x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$$

que ya conocemos.

Lo que acabamos de hacer con la ecuación de segundo grado no tiene por objeto precisamente resolverla; esto ya sabíamos hacerlo. La enseñanza que de aquí se saca es que el grado de la resolvente se determina por medio de las sustituciones.

La ecuación de tercer grado se resuelve por un procedimiento análogo al que hemos indicado para la de segundo.

Sabemos que $x_0 + x_1 + x_2 = -p$; nos hacen falta otras dos funciones lineales conocidas de las raíces. Haciendo $x_0 + Ax_1 + Bx_2 = z$, la teoría de las sustituciones nos dice que z tendrá $3! = 6$ valores que podemos representar por $z_0, z_1, z_2, \dots, z_5$. La resolvente será de la forma

$$(z - z_0)(z - z_1)(z - z_2)(z - z_3)(z - z_4)(z - z_5) = 0.$$

Esta ecuación es de mayor grado que la propuesta; como en ella entran A y B , si pudiéramos disponer de estas cantidades de modo que la ecuación pudiera resolverse, habríamos conseguido nuestro objeto. Desarrollando los cálculos se ve que si A y B son dos de las raíces de la ecuación binomia $y^3 - 1 = 0$, es posible hacer

$$(z - z_0)(z - z_2)(z - z_4) = z^3 - z_0^3$$

$$\text{y } (z - z_1)(z - z_3)(z - z_5) = (z^3 - z_1^3),$$

quedando reducida la resolvente á la forma

$$(z^3 - z_0^3)(z^3 - z_1^3) = 0,$$

ecuación de segundo grado en z^3 que nos permite conocer z . El problema queda resuelto resolviendo el sistema de ecuaciones

$$x_0 + x_1 + x_2 = -p$$

$$x_0 + Ax_1 + Bx_2 = z_0$$

$$x_0 + Bx_1 + Ax_2 = z_1$$

Estas cantidades A y B son de la forma $B = \alpha$, $A = \alpha^2$, siendo α una de las raíces de la ecuación binomia anterior que, elevadas á potencias, reproducen todas las de la misma ecuación; propiedad conocida de las raíces llamadas *primitivas* de una ecuación binomia.

En la ecuación de cuarto grado conocemos también la relación $x_0 + x_1 + x_2 + x_3 = -p$. Haciendo $x_0 + Ax_1 + Bx_2 + Cx_3 = z$, y determinando el grado de la resolvente por medio de la teoría de las sustituciones, llegaremos á escribir la ecuación en z , y estudiando la composición de los valores $z_0, z_1, \dots, z_{25}$ llegaremos á disponer de A, B y C , de modo que la ecuación en z pueda resolverse.

Pero se puede seguir otro método para resolver la ecuación de cuarto grado; haciendo

$$x_0 + x_1 - x_2 - x_3 = z$$

se ve que la resolvente es de grado 12, que se reduce á sexto por ser los valores $z_0, z_1, \dots, z_{11}$, iguales dos á dos. En la ecuación de sexto grado las raíces son además iguales dos á dos y de signo contrario, pudiendo escribir la resolvente bajo la forma

$$(z^2 - z_0^2)(z^2 - z_1^2)(z^2 - z_2^2) = 0$$

que es de tercer grado en z ; se despeja z y se hallan x_0, x_1, x_2 y x_3 por medio de un sistema de ecuaciones muy sencillo.

Otro método para resolver la ecuación de cuarto grado es debido á Lagrange, y consiste en hacer $x_0 + x_1 + x_2 + x_3 = z$; en la teoría de las sustituciones lo estudiaremos detenidamente.

El método de Lagrange para resolver la ecuación de grado m es una generalización de los que acabamos de exponer. El autor de la *Mecánica celeste* y del *Cálculo de las probabilidades* escribe

$$x_0 + \alpha x_1 + \alpha^2 x_2 + \dots + \alpha^{m-1} x_{m-1} = z$$

siendo α una de las raíces primitivas de la ecuación binomia $y^m - 1 = 0$; deduce que la resolvente es de grado $m!$ y llega á reducirla á otra ecuación de grado $(m-1)!$, y por último, á otra de grado $(m-2)!$. Para llegar á estas conclusiones escribe la resolvente bajo la forma

$$(z - z_0)(z - z_1)(z - z_2) \dots (z - z_{m!-1}) = 0,$$

y siguiendo un método análogo al expuesto para la ecuación de tercer grado agrupa los factores de tal suerte, que la ecuación anterior, sin dejar de ser de grado $m!$, puede reducirse á otras de grados mucho menores.

Este es el procedimiento que se sigue actualmente para simplificar la resolvente: agrupar convenientemente los factores de la ecuación escrita más arriba.

Comprendida la importancia que la teoría de las

sustituciones tiene en el problema de la resolución de las ecuaciones, entraremos en su estudio.

Cuando en una función se pone en lugar de las letras que la constituyen esas mismas letras, colocadas en otro orden, se dice que en ella se ha efectuado una *sustitución*. Si de la función $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$ pasamos á la $f(x_3, x_1, x_4, x_2)$, la sustitución efectuada habrá consistido en sustituir x_1 por x_3 , x_2 por x_1 , x_3 por x_4 y x_4 por x_2 . Para indicar cuáles son las letras que sustituyen á otras, se colocan unas debajo de otras con la correspondencia debida y se cierra con un paréntesis ó dos verticales el grupo formado. La sustitución anterior se indicará así:

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ x_3 & x_1 & x_4 & x_2 \end{vmatrix}.$$

Con tal que cada letra esté debajo de aquella á que sustituye, el orden de la colocación en sentido horizontal importa poco; la sustitución anterior podría también indicarse de este modo:

$$\begin{vmatrix} x_3 & x_4 & x_2 & x_1 \\ x_4 & x_2 & x_1 & x_3 \end{vmatrix};$$

pero es más conveniente, en general, colocar las letras de la primera fila según el orden de los subíndices; de este modo es más fácil buscar la letra que sustituye á otra.

Sea la función

$$x_1^2 + x_1x_3 - 2x_2;$$

haciendo la sustitución $\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_2 & x_1 & x_3 \end{vmatrix}$, que también puede escribirse así $\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ x_2 & x_1 \end{vmatrix}$, puesto que cuando una letra es común á las dos filas no hay necesidad de escribirla, resulta

$$x_2^2 + x_2x_3 - 2x_1.$$

Haciendo en esta nueva función la sustitución

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_3 & x_2 & x_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & x_3 \\ x_3 & x_1 \end{vmatrix}$$

se obtiene

$$x_1^2 + x_2x_1 - 2x_3.$$

Se dice que en este caso se han acumulado dos sustituciones.

En adelante nos ocuparemos solamente en el estudio de este nuevo símbolo, sin tener en cuenta la forma de la función en que se realiza la sustitución.

El símbolo que hemos dicho que indicaba la sustitución puede escribirse más brevemente así $\left| \sum_0 \right|$ pudiendo llamar á estas permutaciones numerador y denominador, habiendo autores que las separan por medio de una horizontal. Puede escribirse más brevemente aún representándole por una sola letra S.

El primer problema que se presenta en la teoría de las sustituciones, es el siguiente: ¿Cuántas sustituciones pueden hacerse con n letras? Ya hemos visto que el orden de colocación de las letras en el numerador es indiferente; dejando, pues, aquél invariable; el número de sustituciones que pueden hacerse con n

objetos, es igual al de las permutaciones que pueden formarse con las letras del denominador; es, pues, $n!$.

El Sr. Echegaray expuso en una de las primeras conferencias algunas ideas acerca del cálculo simbólico. La teoría de las sustituciones es simbólica, y á ella puede aplicarse lo que el Sr. Echegaray ha dicho en general. Refiriéndose el cálculo simbólico á combinaciones de objetos cualesquiera y no á representaciones de la cantidad, pueden definirse las operaciones ejecutadas con expresiones de aquella naturaleza de un modo totalmente arbitrario, siempre que en las definiciones no haya contradicciones imposibles de armonizar. Nosotros vamos á definir lo que entendemos por *multiplicación simbólica* de sustituciones, y es claro que para hacerlo no necesitamos inspirarnos en analogías ni semejanzas de ninguna clase.

Multiplicar dos sustituciones es formar otra, tal, que aplicada á una función cualquiera dé el mismo resultado que darían las sustituciones que hacen de factores si las hubiésemos acumulado empezando por la que está á la derecha.

El producto ST indica que se ha hecho la sustitución T, y en la función que resulta se ha hecho la S. Sean

$$S = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ x_3 & x_1 & x_4 & x_2 \end{vmatrix}, \quad T = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ x_3 & x_4 & x_1 & x_2 \end{vmatrix}.$$

Si en la función $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$ se hace la sustitución T, resulta $f(x_3, x_4, x_1, x_2)$, y si en ésta se hace la S, se obtiene $f(x_4, x_2, x_3, x_1)$; comparando la última función con la primera, se ve que podía haberse deducido de ella mediante la sustitución

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ x_4 & x_2 & x_3 & x_1 \end{vmatrix}.$$

Pues bien; esta sustitución es lo que se llama producto de las anteriores, y se escribe así: ST. Si queremos hacer el producto TS, habrá que efectuar primero la sustitución S, que dará por resultado

$$f(x_3, x_1, x_4, x_2),$$

y luego la T, obteniendo la función $f(x_1, x_3, x_2, x_4)$. El producto TS es, pues, igual á

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ x_1 & x_3 & x_2 & x_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ x_3 & x_2 \end{vmatrix}.$$

Vemos que en la multiplicación de sustituciones no se verifica la propiedad *conmutativa* de la multiplicación ordinaria, que consiste en que el orden de los factores no altera el producto. El producto ST no es igual, en el caso que hemos considerado, á TS; tampoco lo es en general; pero en algunos casos particulares puede ser cierta en las sustituciones la propiedad esencial de la multiplicación.

Fácil es saber qué entenderemos por producto de varios factores. Será la sustitución equivalente á la acumulación de varias sustituciones. El producto RSTV tampoco es, en general, igual á RTSV; pero si es igual á R(ST)V, lo cual quiere decir que la multiplicación de sustituciones es *asociativa*.

Las potencias se definen fácilmente, y por medio

de ellas pronto veremos qué es lo que se entiende por *orden* de una sustitución.

Esto es, reducido á sus líneas generales, casi todo lo que el Sr. Echegaray explicó en las cinco primeras conferencias del curso.

M. LUIÑA.

Alumno de la Escuela de Caminos.

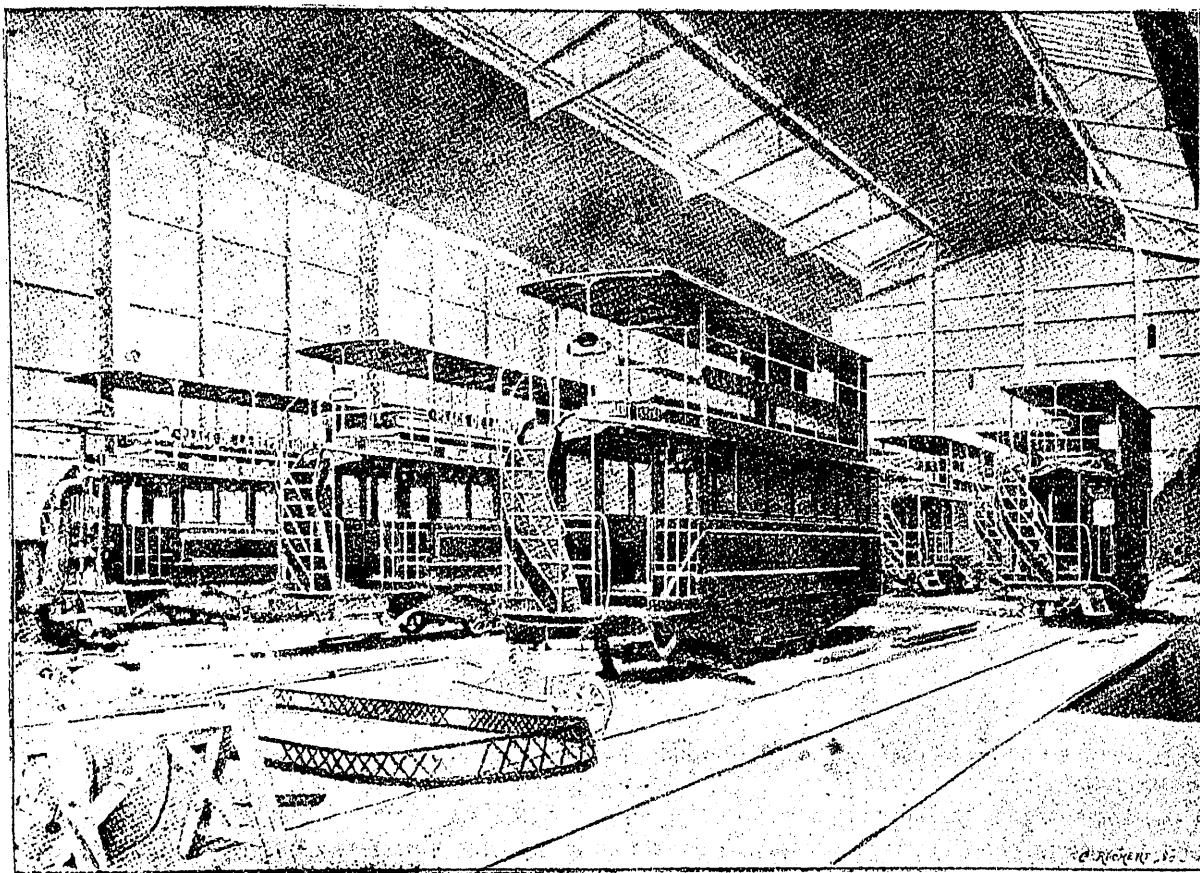
NUEVOS SISTEMAS

DE TOMA DE CORRIENTE PARA TRANVÍAS ELÉCTRICOS

El mal aspecto que en el interior de las poblaciones presentan los cables aéreos para toma de corriente de los tranvías eléctricos, sobre todo cuando

son frecuentes los cruzamientos de vía, como sucede en las grandes capitales; lo costoso del establecimiento y difícil conservación de cables subterráneos con el mismo fin y lo cara que resulta la tracción por acumuladores, han hecho que se ideen nuevos sistemas que, aunque todavía no están completamente sancionados por la experiencia, parecen evitar los inconvenientes citados.

En una obra, de que dió noticia la REVISTA en el número 21 del presente año, «les tranvays électriques, par Henri Marechal», se describen algunos de estos sistemas. Todos ellos consisten en esencia en disponer en la entrevía y al nivel del suelo contactos metálicos, sobre los cuales frota al pasar la varilla de toma de corriente unida al vehículo. Lo ingenioso de estos sistemas, y tal vez lo que origine su descrédito por las complicaciones á que da lugar, con-



TRANVIA ELECTRICO DE ROMAINVILLE. — Vista interior de la cochera de Romainville.

siste en que cada contacto solo está unido con el generador el breve tiempo durante el cual el vehículo pasa sobre aquél; esto se consigue por medio de electro-imanes que mueven automáticamente conmutadores llamados distribuidores, que alteran las conexiones al moverse el coche.

La primera aplicación de estos sistemas se hizo en la Exposición de Lyon de 1894 por Claret y Willeumier, entre el puente de Lafayette y la Exposi-

ción. En Junio último se inauguró el tranvía de París á Romainville, que es del mismo sistema, modificado ligeramente.

Los rieles son del tipo Broca, y sirven de conductor de vuelta á la corriente, para lo cual se asegura su continuidad, por medio de hilos de cobre convenientemente dispuestos.

Los contactos son adoquines de fundición de las mismas dimensiones que los ordinarios de la entre-