

y $QM'F'$ (ó H) la diferencia $2AA' = 2C$, habremos llenado las condiciones contenidas en las dos fórmulas fundamentales y podremos trazar, con dos lápices, simultáneamente, y desde un solo foco, las dos ramas de una hipérbola cualquiera.

Resumiendo lo expuesto, tendremos:

1.º Que el método que hoy se sigue para el trazado de la hipérbola por movimiento continuo es deficiente, en cuanto no permite describir las dos ramas de la curva desde uno solo de los focos.

2.º Que, partiendo de una definición conveniente de la curva, se halla un método que permite describir, desde un mismo foco, las dos ramas sucesivamente; y

3.º Que si se quiere, este método se extiende á dar el trazado de las dos ramas, con dos lápices, y desde uno cualquiera de los focos, *simultáneamente*.

Sometemos al ilustrado juicio de los lectores de la REVISTA estas generalizaciones del trazado mecánico de la hipérbola. Hemos llegado á ellas guiados por el presentimiento de que debían existir y no las hemos visto en ninguno de los muchos tratados de Geometría que han venido á nuestras manos.

Por estas razones nos inclinamos á creer que son enteramente nuevas; mas como para hacer tal afirmación de un modo categórico, necesitaríamos una erudición matemática, que confesamos no tener, nos entregamos, en la cuestión de originalidad, que es delicada, al fallo de las personas competentes.

DETERMINACIÓN DEL CAUDAL MÁXIMO DE UNA AVENIDA

Los procedimientos ordinarios de aforo de una corriente de agua basados en la determinación directa de las velocidades por medio de flotadores, tubos de Pitot, molinetes, etc., pueden rara vez aplicarse á la determinación del caudal de una crecida; y el ingeniero puede verse en la necesidad de calcular el caudal máximo sin más datos que las alturas alcanzadas por las aguas en diversos puntos, y la forma del cauce, que siempre podrá determinar por los procedimientos de la Topografía.

En estos casos será preciso aplicar las ecuaciones del movimiento de los líquidos. El movimiento de un líquido puede ser uniforme, permanente ó variado. Sería evidentemente erróneo considerarlo como uniforme en una crecida de una corriente natural, pues aun suponiendo que la ecuación se aplicara á un período pequeño en las inmediaciones del máximo, de modo

que las variaciones del gasto puedan despreciarse, es imposible encontrar en el lecho de un río un tramo, por corto que sea, que llene las condiciones de regularidad que exige el establecimiento del régimen uniforme.

La determinación del movimiento variado conduciría á cálculos impracticables, y probablemente á resultados erróneos.

Veamos si racionalmente puede aplicarse la ecuación del régimen permanente. Se sabe que el movimiento es permanente cuando la velocidad y la presión son independientes del tiempo en un mismo punto del espacio, pero varían para una misma molécula en diversos puntos de su trayectoria. Las condiciones necesarias para que esto se verifique son las siguientes: 1.º Que los filetes líquidos correspondientes á una sección transversal sean sensiblemente paralelos, y por lo tanto normales á una sección plana; de donde se deduce que la sección no debe variar bruscamente. El paralelismo riguroso es imposible desde el momento en que las secciones varían, porque esto supone la existencia de componentes de la velocidad paralelas á las secciones transversales; pero si las variaciones son pequeñas y funciones sensiblemente continuas de las distancias, pueden considerarse los filetes como sensiblemente paralelos. 2.º El gasto deberá ser constante, puesto que siendo variable, lo sería también la altura de agua, y por lo tanto la presión. 3.º Que no haya cambios de dirección pronunciados, que hagan intervenir la fuerza centrífuga; la cual no se tiene en cuenta en la ecuación del movimiento permanente, como se verá al establecerla.

No es difícil encontrar en una corriente natural tramos de 200 á 500 metros de longitud, en que el cauce tenga una regularidad suficiente para que se cumplan aproximadamente las condiciones 1.ª y 3.ª. La 2.ª condición se cumple aproximadamente en las inmediaciones del máximo; basta que sean suficientemente pequeñas las variaciones del gasto en un período bastante largo para que, en el tramo considerado, se establezca el régimen permanente; y esto se verifica sensiblemente en todas las avenidas, aun en las más torrenciales, cuando el río es de alguna consideración, y se elige el tramo con buen criterio. Como en cada perfil se consideran las alturas mayores alcanzadas por las aguas, el régimen que se considera corresponderá al caudal máximo. Claro está que debe elegirse un tramo en que no hayan desbordado las aguas.

Cierto es que, aun en el período considerado en las inmediaciones del máximo, siempre se producen en las avenidas naturales movimientos tumultuosos é irregulares. Pero estos movimientos se observan en la superficie, y no creemos muy aventurado el suponer que la mayor parte de la masa líquida obedece sensiblemente á las leyes del movimiento permanente, sobre todo si es considerable la altura de agua. De todos modos, en el estado actual de la Hidráulica, es el procedimiento más aproximado que

puede seguirse; y por otra parte, las aplicaciones que exigen este dato, solo lo requieren con una aproximación grosera, bastando ordinariamente fijar una cifra superior al verdadero máximo, y que no le exceda considerablemente.

Antes de pasar á la aplicación de la ecuación del movimiento permanente, que es el verdadero objeto de esta nota, estableceremos sucintamente dicha ecuación.

Sean, m la masa comprendida entre dos secciones transversales infinitamente próximas.

dx la distancia entre ambas secciones.

dh el desnivel de los puntos en que el eje hidráulico corta á las mismas.

v la velocidad media de una sección.

σ la suma de las resistencias por unidad de masa.

Aplicando el teorema de las fuerzas vivas á la masa líquida comprendida entre dos secciones infinitamente próximas, tendremos:

$$d \frac{mv^2}{2} = mg \left(dh - \frac{\sigma}{g} dx \right).$$

Diferenciando el primer miembro, dividiendo por m y despejando dh :

$$dh = \frac{1}{g} (v dv - \sigma dx).$$

Integrando entre los límites 0 y l , valores de x correspondientes á las secciones extremas del tramo considerado, y llamando v_0 á la velocidad media de la sección inicial:

$$h = \frac{v^2 - v_0^2}{2g} + \frac{1}{g} \int_0^l \sigma dx \quad (1).$$

Para tener en cuenta las diferencias entre las hipótesis admitidas y la realidad, algunos autores multiplican el primer término de esta ecuación por un coeficiente θ mayor que la unidad.

Según Coriolis, puede tomarse $\theta = 1,47$; según Vauthier y Bélanger, $\theta = 1,10$; Bazin da, para calcular θ , la siguiente fórmula empírica:

$$\theta = 1 + N \left(\frac{u}{v} - 1 \right)^2,$$

en la que u es la velocidad máxima, v la velocidad media, N un coeficiente que depende de la naturaleza del lecho; para secciones rectangulares de poca altura relativamente al ancho, como en el caso que nos ocupa, puede tomarse $N = 7,10$.

Nazzani no halla inconveniente en suponer $\theta = 1$, en atención á lo indeterminado de este coeficiente, y sobre todo á la poca influencia del término á que afecta; tomando dos secciones extremas cuyas áreas difieran poco, se

podrá disminuir su influencia; pero veremos, al estudiar las aplicaciones de la fórmula, la poca importancia de este término en el valor del gasto, por lo cual es innecesaria esta precaución.

Siguiendo al mismo profesor Nazzani evaluaremos σ como si el movimiento fuese uniforme.

Sean, σ_m la suma de las resistencias correspondientes á todo el tramo, y L la fuerza motriz total, ω el peso específico, a la sección media, I la pendiente; tendremos:

$$\sigma_m = L = \omega a l I.$$

Eliminaremos I por medio de la fórmula de Bazin

$$v = \chi \sqrt{RI} \quad \text{en la que} \quad R = \frac{a}{c},$$

siendo c el perímetro mojado y R , por lo tanto, el radio medio; despejando I en esta fórmula y sustituyendo su valor en σ_m ,

$$\sigma_m = \omega c l \frac{v^2}{\chi^2}.$$

Dividiendo por la masa total del tramo, que es $\frac{\omega}{g} al$, tendremos el valor

$$\sigma = \frac{gc}{\chi^2 a} v^2.$$

Y sustituyendo en (1)

$$h = \frac{v^2 - v_0^2}{2g} + \int_0^l \frac{cv^2}{a\chi^2} dx. \quad (2)$$

Siendo el gasto Q constante, tendremos $v = \frac{Q}{a}$ y $v_0 = \frac{Q}{a_0}$; y sustituyendo en la ecuación anterior

$$h = \frac{Q^2}{2g} \left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{a_0^2} \right) + Q^2 \int_0^l \frac{c}{\chi^2 a^3} dx. \quad (3)$$

En vez de emplear para el cálculo de σ la fórmula de Bazin, que sólo es aplicable para pendientes fuertes, superiores á 0,0005, podríamos hacer uso de la de Humphreys-Abbot, que conviene á pendientes inferiores á aquel límite. En tal caso se obtiene, siguiendo el mismo procedimiento:

$$h = \frac{Q^2}{2g} \left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{a_0^2} \right) + Q^2 \int_0^l \frac{c+b}{\chi^2 a^3} dx \quad (4)$$

en la que b representa un coeficiente.

Nosotros emplearemos la fórmula (3); pero es fácil ver que cuanto digamos de ella será aplicable á la (4).

En la fórmula (3) se ve que para calcular el gasto basta obtener h por medio de una nivelación; a y a_0 son las áreas de los perfiles extremos, que

pueden también obtenerse directamente; pero para poder resolver la integral hace falta expresar $\frac{c}{\chi^2 a^3}$ en función de x .

Siendo esto imposible en general, hay que resolver la integral por aproximación. Nazzani indica la fórmula

$$\int_a^l \frac{c}{\chi^2 a^3} dx = \frac{c_0}{\chi_0^2 a_0^3} \frac{l_1}{2} + \frac{c_1}{\chi_1^2 a_1^3} \frac{l_1 + l_2}{2} + \dots + \frac{c_n}{\chi_n^2 a_n^3} \frac{l_n}{2},$$

que se obtiene calculando $\frac{c}{\chi^2 a^3}$ para varios perfiles intermedios distantes entre sí $l_1, l_2, \dots, l_n$. Como se ve, fácilmente resulta de aplicar la fórmula de Simpson.

Pero en ninguno de los tratados de hidráulica que conozco se desarrolla el procedimiento que creo más indicado, y que al mismo tiempo da resultados más aproximados.

Consiste en hacer uso de las fórmulas de interpolación de Newton y de Lagrange para expresar $\frac{c}{\chi^2 a^3}$ en función de x . Se calcula $\frac{c}{\chi^2 a^3}$ para los perfiles extremos y $n - 1$ perfiles intermedios entre ambos; de modo que se tienen $n + 1$ valores particulares de $f(x)$, correspondientes á los valores $x_0, x_1, \dots, x_n$. Tendremos, pues, $n + 1$ puntos de la curva $y = f(x)$, y se puede sustituir á la verdadera curva una parábola del grado n , cuya ecuación es, como se sabe:

$$y = P_0 + P_1 x + P_2 x^2 + \dots + P_n x^n.$$

En efecto; sustituyendo en vez de x sucesivamente $x_0, x_1, \dots, x_n$, obtendremos $n + 1$ valores de y , que podrán igualarse á los ya calculados $\frac{c_0}{\chi_0^2 a_0^3}, \frac{c_1}{\chi_1^2 a_1^3}, \dots, \frac{c_n}{\chi_n^2 a_n^3}$; de este modo tendremos $n + 1$ ecuaciones de primer grado, que servirán para calcular los $n + 1$ parámetros $P_0, P_1, \dots, P_n$.

Pero estos parámetros pueden calcularse más fácilmente empleando las fórmulas de Newton y Lagrange.

La de Newton exige que los valores $x_0, x_1, \dots, x_n$ crezcan en progresión aritmética. La de Lagrange puede aplicarse, cualesquiera que sean estos valores. Por consiguiente, la aplicación de la fórmula de Newton exige que el cauce sea suficientemente regular para que su forma quede bien determinada por medio de perfiles equidistantes. Vamos á examinar sucesivamente la aplicación de las dos fórmulas, empezando por la de Newton.

(Se continuará)

LUIS GAZTELU.
Ingeniero de Caminos.