

DETERMINACIÓN DEL CAUDAL MÁXIMO DE UNA AVENIDA

(Conclusión.)

Llamemos h á la distancia entre los perfiles, y las distancias de éstos al origen serán:

$$x_0 = 0; \quad x_1 = h; \quad x_2 = 2h. \dots \dots x_n = nh.$$

Sean los valores correspondientes de $f(x)$, U_0 , $U_1, \dots, U_n$, de modo que

$$U_0 = \frac{c_0}{\chi_0^2 a_0^5}; \quad U_1 = \frac{c_1}{\chi_1^2 a_1^5}; \quad U_2 = \frac{c_2}{\chi_2^2 a_2^5}; \dots \dots U_n = \frac{c_n}{\chi_n^2 a_n^5}.$$

La fórmula de Newton da

$$\begin{aligned} \frac{c}{\chi^2 a^5} = f(x) = U_0 + \frac{x}{h} \Delta U_0 + \frac{x}{h} \left(\frac{x}{h} - 1 \right) \frac{\Delta^2 U_0}{1 \cdot 2} + \dots \\ + \frac{x}{h} \left(\frac{x}{h} - 1 \right) \dots \dots \left(\frac{x}{h} - n + 1 \right) \frac{\Delta^n U_0}{n!}. \end{aligned}$$

Ordenando este polinomio resulta:

$$f(x) = P_0 + P_1 x + P_2 x^2 + \dots + P_n x^n;$$

en donde $P_0, P_1, \dots, P_n$ son conocidos; luego

$$\begin{aligned} (5) \quad \int_0^l f(x) dx &= \int_0^l \frac{c}{\chi^2 a^5} dx = \int_0^l (P_0 + P_1 x + \dots + P_n x^n) dx \\ &= P_0 l + P_1 \frac{l^2}{2} + P_2 \frac{l^3}{3} + \dots + P_n \frac{l^{n+1}}{n+1}. \end{aligned}$$

Para hacer aplicación de este procedimiento deben formarse primero las cantidades $U_0, U_1, U_2, \dots, U_n$ correspondientes á los $n+1$ perfiles equidistantes; en estos perfiles podrán medirse las áreas $a_0, a_1, \dots, a_n$ y los perímetros mojados $c_0, c_1, \dots, c_n$.

Los valores del coeficiente χ pueden calcularse, en el caso en que la pendiente sea mayor que 0,0005, por medio de la fórmula

$$\chi = \frac{1}{\sqrt{\alpha + \frac{\beta}{R}}},$$

en la que α y β son los coeficientes de la conocida fórmula de Bazin,

$$\frac{RI}{v^2} = \alpha + \frac{\beta}{R}; \text{ y cuyos valores son } \alpha = 0,0004; \beta = 0,0007.$$

Pero será más sencillo hacer uso de las tablas de Nazzani, en las que se encuentran calculados los valores de χ para todos los casos que pueden ocurrir en la práctica.

Determinadas las cantidades $U_0, U_1, \dots, U_n$ se formarán sus diferencias sucesivas hasta la de orden n^{mo} ; y substituidos en la fórmula de Newton los valores de $U_0, \Delta U_0, \Delta^2 U_0, \dots, \Delta^n U_0$, sólo quedará ordenar el polinomio y verificar la integración, todo lo cual no ofrecerá otra dificultad que lo prolijo y laborioso de las operaciones aritméticas.

La fórmula de Lagrange es

$$f(x) = \frac{c}{\chi^2 a^5} = \frac{(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2) \dots (x_0 - x_n)} U_0 + \\ \frac{(x - x_0)(x - x_2) \dots (x - x_n)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2) \dots (x_1 - x_n)} U_1 + \\ \frac{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_3) \dots (x - x_n)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)(x_2 - x_3) \dots (x_2 - x_n)} U_2 + \dots \\ + \frac{(x - x_0)(x - x_1) + \dots + (x - x_{n-1})}{(x_n - x_0)(x_n - x_1) + \dots + (x_n - x_{n-1})} U_n.$$

Basta para obtener $f(x)$ substituir en estas fórmulas los valores de $x_0, x_1, \dots, x_n$ y los de $U_0, U_1, \dots, U_n$ calculados como se ha indicado anteriormente, y ordenar el polinomio. La integración se terminará lo mismo que en el caso anterior.

Esta fórmula puede aplicarse para valores cualesquiera de $x_0, x_1, \dots, x_n$, y por lo tanto, al caso en que formen progresión aritmética. Si se aplican á este caso las dos fórmulas, los resultados deberán ser idénticos; así puede comprobarse la exactitud de los cálculos. Pero si se quiere formar idea de la aproximación del procedimiento, será preciso repetir el cálculo para otro tramo contiguo en que el gasto deba ser el mismo. Puede aprovecharse para esto una parte del tramo elegido, aumentando dos ó tres perfiles aguas-arriba ó aguas-abajo. Aplicando el mismo cálculo á este nuevo tramo, el resultado deberá diferir poco del hallado anteriormente.

EJEMPLO.—Apliquemos estas fórmulas á un ejemplo numérico.

Sean las áreas a , y los perímetros mojados c , los siguientes:

$a_0 = 510$ metros cuadrados.	$c_0 = 120$ metros.
$a_1 = 490$ — — —	$c_1 = 125$ —
$a_2 = 450$ — — —	$c_2 = 115$ —
$a_3 = 400$ — — —	$c_3 = 105$ —
$a_4 = 460$ — — —	$c_4 = 110$ —

La longitud del tramo es $l = 250$ metros, y la distancia constante entre

los perfiles $h = 50$ metros; el desnivel del eje hidráulico entre los perfiles extremos, $h = 1,40$ metros; $\theta = 1$.

Suponemos además que $\frac{1}{\chi^2}$ pueda considerarse como constante, y su valor en todos los perfiles sea $\frac{1}{\chi^2} = 0,0006$.

Formaremos las cantidades $U_0, U_1, \dots, U_n$.

$$U_0 = \frac{c_0}{\chi^2 a_0^5} = 0,000.000.000.552.$$

$$U_1 = \frac{c_1}{\chi^2 a_1^5} = 0,000.000.000.637.$$

$$U_2 = \frac{c_2}{\chi^2 a_2^5} = 0,000.000.000.757.$$

$$U_3 = \frac{c_3}{\chi^2 a_3^5} = 0,000.000.000.984.$$

$$U_4 = \frac{c_4}{\chi^2 a_4^5} = 0,000.000.000.678.$$

Apliquemos en primer lugar la fórmula de Newton, para lo cual formaremos el cuadro siguiente de las diferencias sucesivas:

Valores de U.	Diferencias primeras.	Diferencias segundas.	Diferencias terceras.	Diferencia cuarta.
$U_0 = 0,000.000.000.542$	$\Delta U_0 = 0,000.000.000.005$	$\Delta^2 U_0 = 0,000.000.000.025$	$\Delta^3 U_0 = 0,000.000.000.082$	$\Delta^4 U_0 = -0,000.000.000.722$
$U_1 = 0,000.000.000.657$	$\Delta U_1 = 0,000.000.000.420$	$\Delta^2 U_1 = 0,000.000.000.107$	$\Delta^3 U_1 = -0,000.000.000.640$	
$U_2 = 0,000.000.000.757$	$\Delta U_2 = 0,000.000.000.227$	$\Delta^2 U_2 = -0,000.000.000.533$		
$U_3 = 0,000.000.000.984$	$\Delta U_3 = -0,000.000.000.306$			
$U_4 = 0,000.000.000.678$				

Aplicando la fórmula de Newton tendremos:

$$f(x) = 0,000.000.000.542 + \frac{x}{50} \times 0,000.000.000.095 + \frac{x}{50} \left(\frac{x}{50} - 1 \right) \times \frac{0,000.000.000.025}{2} + \frac{x}{50} \left(\frac{x}{50} - 1 \right) \left(\frac{x}{50} - 2 \right) \times \frac{0,000.000.000.082}{1.2.3} - \frac{x}{50} \left(\frac{x}{50} - 1 \right) \left(\frac{x}{50} - 2 \right) \left(\frac{x}{50} - 3 \right) \times \frac{0,000.000.000.722}{1.2.3.4}$$

Ordenando este polinomio resulta:

$$f(x) = 0,000.000.000.542 + 0,000.000.001.900 x + 0,000.000.000.005.200 x^2 + 0,000.000.000.000.112 x^3 - 0,000.000.000.000.004.800 x^4$$

$$P_4 = 0,000.000.000.542 + 0,000.000.000.003.600 x + 0,000.000.000.001.6.800 x^2 - 0,000.000.000.000.192.000 x^3 + 0,000.000.000.001.552 x^4$$

$$P_3 = -0,000.000.000.000.290 x + 0,000.000.000.000.143.600 x^2 - 0,000.000.000.000.045.800 x^3$$

$$P_1 = 0,000.000.000.000.045.800$$

Aplicando la fórmula (5) tendremos:

$$\int_0^1 \frac{c}{x^2 a^5} dx = 0,000.000.254.$$

El primer término de la ecuación (3), es:

$$\frac{1}{2g} \left(\frac{1}{a_4^2} - \frac{1}{a_0^2} \right) = -0,000.000.044.$$

Como se ve, su valor es pequeño relativamente al segundo término, lo que justifica la adopción del coeficiente $\theta = 1$.

Por lo tanto, la ecuación (3) sustituyendo en vez de h su valor, se convierte en

$$0,000.000.210Q^2 = 1,40;$$

de donde

$$Q = \sqrt{\frac{1,40}{0,000.000.210}} = 2581,98 \text{ metros cúbicos.}$$

Si en vez de la fórmula de Newton, empleamos la de Lagrange, tendremos:

$$\begin{aligned} f(x) = & - \frac{(x-50)(x-100)(x-150)(x-200)(x-250)}{50 \cdot 100 \cdot 150 \cdot 200 \cdot 250} \times 0,000.000.000.542 \\ & + \frac{x(x-100)(x-150)(x-200)(x-250)}{50 \cdot 50 \cdot 100 \cdot 150 \cdot 200} \times 0,000.000.000.637 \\ & - \frac{x(x-50)(x-150)(x-200)(x-250)}{100 \cdot 50 \cdot 50 \cdot 100 \cdot 150} \times 0,000.000.000.757 \\ & + \frac{x(x-50)(x-100)(x-200)(x-250)}{150 \cdot 100 \cdot 50 \cdot 50 \cdot 100} \times 0,000.000.000.984 \\ & - \frac{x(x-50)(x-100)(x-150)(x-250)}{200 \cdot 150 \cdot 100 \cdot 50 \cdot 50} \times 0,000.000.000.678 \\ = & 0,000.000.000.542 + 0,000.000.000.005.800x \\ & - 0,000.000.000.000.143.600x^2 + 0,000.000.000.000.001.552x^3 \\ & - 0,000.000.000.000.000.004.800x^4; \end{aligned}$$

resultado idéntico al obtenido por la fórmula de Newton.

El cálculo se terminará como en el caso anterior, aplicando á este polinomio la fórmula (5).

Como se ve, el procedimiento no ofrece ninguna dificultad, y aún podría aumentarse el número de perfiles transversales, si hubiera interés en conocer con mayor exactitud el gasto máximo, sin que los cálculos llegasen á hacerse impracticables.

LUIS GAZTELU,
Ingeniero de Caminos.